Cercle des Sciences

Année académique 2022-2023

Recueil d'examens

Math

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES

Introduction

Yooooooo cher.e mathématicien.ne! Ici Sophie, cooptée math-physique du Cercle des Sciences! Bienvenue dans ce qu'on appelle chez nous le meilleur ouvrage créé depuis environ beaucoup d'années, j'ai nommé… le recueil d'examens! Quoi, tu n'es pas d'accord? Mmmmh zut je pensais avoir réussi à te convaincre que le blocus c'est rigolo et que les examens c'est la meilleure partie de l'année. Bon allez, je reconnais, il y a peut-être plus fun mais je dois me creuser pour trouver ce qui est mieux que le blocus et là, je n'ai pas d'idée donc je vais plutôt te parler de ce qui va suivre. Dans ce recueil, tu trouveras des corrections des examens de janvier, de juin et des interros de novembre des années précédentes. Ça peut vraiment t'aider à te préparer, mais à la condition que tu joues le jeu: il vaut vraiment mieux que tu essayes de faire les examens tout.e seul.e, et seulement après, tu regardes les corrigés, sinon ça ne sert pas à grand chose. Il faut s'acharner sur les exercices et bosser à fond la théorie pour que ça marche ;) Faut s'accrocher mais promis ça en vaut la peine :D

Je te souhaite de prendre un max de plaisir dans tes études et bon bah… bonne m*!

Sophie

Table des matières

Math-f101

En sortant de secondaire, on est rarement préparé à faire des maths aussi rigoureuses et c'est un exercice difficile. Mais ce n'est pas infaisable. Oui, il y a un nombre impressionnant de lemmes, propositions et théorèmes à retenir, sans parler des démonstrations qui vont avec, mais bon, puisque tu sais qu'il y a beaucoup à étudier, il faut que tu t'y prennes à l'avance, et vraiment à l'avance. Pour ce qui est des exercices, je te conseille de vraiment les faire à fond, même quand tu as l'impression de ne rien comprendre parce qu'il n'y a que comme ça que tu comprendras quelque chose ;) Ils sont parfois très casse-tête, ils peuvent être longs et compliqués, et même s'il faut s'accrocher, c'est faisable et je suis sûre que tu y arriveras :) C'est vraiment important d'aller aux séances d'exercices parce que les assistant.e.s pourront t'expliquer les choses parfois d'une autre manière que les profs, et c'est toujours intéressant d'avoir ces explications en plus!

Cercle des Sciences

Calcul différentiel et intégral, 1.
Test de janvier.

MATH-F-101

19 janvier 2015

- **Aucun appareil électronique (calculatrices, GSM, . . .) n'est admis.**

- **Veuillez commencer chaque question sur une nouvelle feuille.**

- **Écrivez CLAIREMENT votre nom et prénom EN MAJUSCULES sur chaque feuille rendue.**

- **Justifiez soigneusement toutes vos réponses.**

1. (a) Énoncer et démontrer le théorème de la moyenne (aussi dit le théorème des accroissements finis).

(10 points.)

(b) i. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Démontrer qu'il existe $c \in (a,b)$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{1}$$

Conseil : vous pouvez supposer que f est intégrable ; vous pouvez utiliser le théorème fondamental de l'analyse à condition qu'il soit clairement énoncé.

ii. Trouver une fonction $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ qui est intégrable mais pour laquelle il n'existe pas de solution $c \in [0,1]$ à l'équation (1).

(10 points.)

2. (a) Nous disons que deux suites $(x_n), (y_n) \subset \mathbb{R}$ sont équivalentes si $|x_n - y_n| \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I. Démontrer que f est uniformément continue si et seulement si pour tout couple $(x_n), (y_n) \subset I$ de suites équivalentes, leurs images $(f(x_n)), (f(y_n))$ sont aussi équivalentes.

(10 points.)

(b) Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer si elle est uniformément continue ou pas. Justifier soigneusement vos réponses !

*Vous pouvez utiliser le fait que toute fonction continue sur un intervalle **fermé et borné** est uniformément continue*

i. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(e^x)$.

ii. $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \inf\{|x-n| : n \in \mathbb{Z}\}$.

(10 points.)

3. (a) i. Énoncer et démontrer le théorème fondamental de l'analyse.

   ii. Énoncer et démontrer la formule d'intégration par parties.
   Vous pouvez utiliser sans démonstration la formule de Leibniz pour la dérivée d'un produit à condition qu'elle soit clairement énoncée.

(10 points.)

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$, définissons

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\mathrm{d}x$$

   i. Montrer que pour tout $n > 0$, $0 < I_n < I_{n-1}$.

   ii. Démontrer que si $n > 1$ alors $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ et puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{2n}{2n+1} < \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} < 1$$

   iii. Démontrer par récurrence que

$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

   iv. En déduire que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{4n+1}(n!)^4}{(2n+1)(2n)!^2} = \pi$$

(10 points.)

4. (a) Soient $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un champ continu de vecteurs et $C \subset \mathbb{R}^n$ une courbe différentiable.

   i. À partir d'une paramétrisation de C, définir *l'intégrale de F le long de C* (aussi appelée la circulation de C) qui se note $\int_C \langle F, \mathrm{d}x\rangle$.

   ii. Supposons que $F = \nabla g$ où $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable. Démontrer que si C est un lacet alors $\int_C \langle F, \mathrm{d}x\rangle = 0$.

Pour cette question, vous pouvez utiliser sans démonstration la règle de la dérivation en chaîne (qui donne la dérivée de la composition de deux fonctions) et le théorème fondamental de l'analyse, à condition qu'ils soient clairement énoncés.

(10 points.)

(b) i. Soit $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ le champ de vecteurs défini par $F(x,y) = (-y,x)$. Démontrer qu'il n'existe pas de fonction différentiable g telle que $F = \nabla g$.

   ii. Soit $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ le champ de vecteurs défini par $G(x,y) = (y,x)$. Trouver une fonction différentiable $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $G = \nabla g$.

(10 points.)

Question concernant le premier quadrimestre

- **Si vous répondez à cette partie, vous avez jusque 17h et votre note de janvier est annulée.**
- **Répondez à la question ci-dessous sur une feuille séparée.**

6. a) Énoncer le théorème des accroissements finis (aussi appelé le théorème de la moyenne).

   b) Soient $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ continues sur $[a, b]$ et dérivables sur (a, b). Supposons de plus que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in (a, b)$.

      i. Démontrer que $g(a) \neq g(b)$.

      ii. Démontrer qu'il existe $c \in (a, b)$ tel que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

      Conseil : considérez la fonction $h(x) = f(x) - \lambda g(x)$ *où* $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

   c) Énoncer et démontrer la règle de l'Hospital.

   d) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{t\to 0^+} (1 + tx)^{1/t} = e^x$$

   Conseil : prenez d'abord le logarithme. Vous pouvez utiliser toute propriété standard du logarithme et des fonctions continues à condition qu'elles soient clairement énoncées.

   e) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable. Démontrer que pour tout a tel que $f(a) = 0$, nous avons la relation

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) + f(a - h)}{h^2} = f''(a)$$

   Conseil : commencez par appliquer la règle de l'Hospital !

a) cf Cours

b) i. Si $g(a) = g(b)$, le théorème de la moyenne implique l'existence d'un $c \in (a, b)$ tel que $g'(c) = 0$. Contradiction.

   ii. En appliquant le théorème de la moyenne à h, on obtient l'existence de c tel que $h'(c) = \frac{h(b)-h(a)}{b-a}$. Ceci est la relation demandée. (Les calculs sont laissés en exercices.)

c) cf cours.

d) Par continuité de l'exponentielle, on a

$$\lim_{t\to 0^+} (1 + tx)^{1/t} = \mathrm{e}^{\left(\lim_{t\to 0^+} \frac{\log(1+tx)}{t}\right)}$$

Par la règle de l'Hospital, la limite dans l'exponentielle vaut x, ce qui prouve l'affirmation.

e) La limite vaut, par l'Hospital :

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f'(a + h) - f'(a - h)}{2h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f'(a + h) - f'(a) + f'(a) - f'(a - h)}{2h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f'(a + h) - f'(a)}{2h} + \lim_{h\to 0} \frac{f'(a) - f'(a - h)}{2h}\end{aligned}$$

où la limite du terme de droite est égale à celle du terme de gauche par changement de variable $\tilde{h} = -h$, ce qui donne bien $f''(a)$ au total.

Quelques remarques :

- Le fait que le numérateur tend vers 0 (pour pouvoir appliquer l'Hospital) est dû à la continuité de f (elle est deux fois dérivable !) et à l'hypothèse $f(a) = 0$.
- La dérivée de $f(a+h)+f(a-h)$ est une dérivée par rapport à h, c'est pourquoi le résultat est $f'(a+h) - f'(a-h)$. Attention au signe !
- On ne peut, en toute généralité, pas appliquer une seconde fois la règle de l'Hospital, car sans hypothèse sur la continuité de f'' on ne peut pas calculer

$$\lim_{h\to 0} \frac{f''(a+h) + f''(a-h)}{2}.$$

BA1 en sciences mathématiques et physiques
Examen de Calcul Différentiel et Intégral — Math-F-101
(Titulaires : D. Bonheure, J. Fine, N. Richard)

5 juin 2015

Consignes

- **Si vous ne présentez que la matière du second quadrimestre, vous disposez de trois heures.**
- **Rédigez soigneusement et justifiez, sauf mention contraire, toutes vos réponses.**
- **Répondez à la première question sur une feuille séparée.**

> Ce document contient un corrigé des différents exercices. Les solutions sont parfois incomplètes et ne représentent pas forcément la solution idéale.

Matière du deuxième quadrimestre

1. a) Donner les définitions d'un *ensemble ouvert*, d'un *ensemble fermé* et d'un *ensemble compact* (tous ces ensembles étant sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$, bien entendu).

   b) Démontrer qu'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ est compact si et seulement si il est fermé et borné.

   c) Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ compact. Démontrer que $K \times K \subset \mathbb{R}^{2n}$ est compact, où

$$K \times K = \{(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n} : (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in K\}$$

   d) Le *diamètre* de $K \subset \mathbb{R}^n$ est le nombre réel D défini par

$$D = \sup\{\|x - y\| : x, y \in K\}$$

      i. Démontrer que si K est compact alors D est bien défini (c'est-à-dire que l'ensemble dont D est le supremum est bien majoré).

      ii. Démontrer que si K est compact alors il existe $x, y \in K$ tels que $\|x - y\| = D$. *Si vous utilisez une propriété "standard" des fonctions continues, elle doit être démontrée.*

      iii. Donner un exemple d'un ensemble K qui est borné mais pour lequel il n'existe pas de x, y avec $\|x - y\| = D$.

> a) Un ensemble E est ouvert si pour tout $a \in E$ il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset E$, où $B(a, r) = \{x \text{ t.q. } \|x - a\| < r\}$. Un ensemble est fermé si son complémentaire est ouvert. Un ensemble est compact si toute suite d'éléments dans cet ensemble admet une sous-suite convergente dont la limite se trouve dans cet ensemble.
>
> b) Soit d'abord E un ensemble compact.
>
> Pour montrer que E est fermé, regardons son complémentaire E^c. Si E^c n'est pas ouvert, c'est qu'il existe $a \in E^c$ tel que pour tout entier n, la boule $B(a, 1/n)$ n'est pas complètement contenu dans E^c. En d'autres termes, il existe une intersection avec E. Pour chaque tel n, notons x_n un élément dans cette intersection. Par construction x_n tend vers a. Par ailleurs ses valeurs sont dans E, donc elle admet

une sous-suite convergente vers un élément de E. Par unicité, cette sous-suite tend vers a, ce qui prouve $a \in E$.

Pour montrer que E est borné, supposons que ce ne soit pas le cas. Alors pour tout n il existe un élément hors de la boule $B(0, n)$. Notons x_n un tel élément. Par compacité la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$. Or $\left\|x_{n_j}\right\| \geq n_j$ et n_j tend vers l'infini, donc x_{n_j} ne peut pas avoir une limite.

Soit maintenant E fermé et borné.

Prenons d'abord suite convergente d'éléments de E. Montrons qu'alors sa limite est dans E. Sinon, $l \in E^c$. Or E^c est ouvert, donc il existe $r > 0$ tel que $B(l, r) \subset E^c$. Mais par définition de limite, tous les éléments de la suite (sauf un nombre fini) sont dans cette boule. Ceci est une contradiction puisque les éléments de la suite sont dans E mais la boule est dans son complémentaire.

Prenons maintenant une suite d'éléments de E, et montrons qu'elle admet une sous-suite convergente. Ceci suit immédiatement du résultat de Bolzano-Weierstrass : toute suite bornée d'éléments de $\mathbb{R}^n$ admet une sous-suite convergente. La limite de cette sous-suite est dans E d'après le paragraphe précédent.

c) On considère une suite d'élément de $K \times K$, c'est-à-dire $(x_j, y_j)_{j\in\mathbb{N}}$, avec $x_j \in K$ et $y_j \in K$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. On veut en extraire une sous-suite convergente dont la limite est dans $K \times K$. Comme K est compact, il existe une sous-suite $(x_{j_p})_{p\in\mathbb{N}}$ convergente dont la limite, notons-la x, vérifie $x \in K$. Par ailleurs, $(y_{j_p})_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de K, donc il existe une sous-suite $(y_{j_{p_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ qui converge dans K, notons y sa limite. Comme $(x_{j_{p_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(x_{j_p})_{p\in\mathbb{N}}$, elle converge vers x également. En conclusion, la sous-suite $\left(x_{j_{p_l}}, y_{j_{p_l}}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ converge vers (x, y), qui est un élément de $K \times K$.

d) i. Comme K est compact, il est borné, et il existe donc une boule $B(a, r)$ contenant K. Donc pour $x, y \in K$, on a

$$\|x - y\| = \|x - a + a - y\| \leq \|x - y\| + \|a - y\| \leq 2r$$

Dès lors l'ensemble $\{\|x - y\| \text{ t.q. } x, y \in K\}$ est borné, donc admet un supremum (fini).

ii. Considérons $g : K \times K \to \mathbb{R} : (x, y) \to \|x - y\|$. Cette fonction est continue puisque la norme est continue, et définie sur un compact. Donc g atteint ses bornes, c'est-à-dire qu'il existe x, y tels que $g(x, y) = \sup\{g(u, v) \text{ t.q. } u, v \in K\}$, ce que nous voulions démontrer. La preuve qu'une fonction continue atteint ses bornes est faite au cours.

iii. L'ensemble $I = (0, 1)$ est de diamètre 1 mais tous ses points sont à distance strictement en deça de 1.

2. a) Définir la convergence d'une série.

   b) Définir la convergence absolue d'une série.

   c) Démontrer que si une série converge absolument, alors elle converge.

3. a) Définir un ensemble de mesure nulle.

   b) Énoncer le critère de Lebesgue concernant l'intégrabilité au sens de Riemann.

4. Étudier la convergence de la série de puissance :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n^3)}{n^2 + \cos(n)}(2i - z)^n$$

C'est une série de puissance, de la forme $\sum a_n(z-z_0)^n$, dont le centre est $z_0 = 2i$ et les coefficients sont

$$a_n = (-1)^n \frac{\log(n^3)}{n^2+\cos(n)}.$$

Le rayon ρ se calcule par la limite suivante, si celle-ci existe :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho} &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n^3)}{n^2+\cos(n)} \frac{(n+1)^2+\cos(n+1)}{\log((n+1)^3)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3\log(n)}{3\log(n+1)} \frac{(n+1)^2+\cos(n+1)}{n^2+\cos(n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{\log n + \log(1+{}^1\!/\!_n)} \frac{(1+{}^1\!/\!_n)^2 + \frac{\cos(n+1)}{n^2}}{1+{}^{\cos(n)}\!/\!_{n^2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{\log(1+{}^1\!/\!_n)}{\log n}} \frac{(1+{}^1\!/\!_n)^2 + \frac{\cos(n+1)}{n^2}}{1+{}^{\cos(n)}\!/\!_{n^2}} = 1
\end{aligned}$$

Par le théorème des séries de puissances, lorsque $|z-2i| < 1$ la série converge absolument. Lorsque $|z-2i| > 1$, la série diverge.
Dans le cas d'égalité $|z-2i| = 1$, montrons que la série converge absolument. En effet, ne notant

$$c_n = \frac{\log(n^3)}{n^2+\cos(n)}(2i-z)^n$$

et en calculant

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{{}^1\!/\!_{n^{1.5}}}$$

on obtient 0 (les calculs sont laissés au lecteur). Or la série $\sum_n {}^1\!/\!_{n^{1.5}}$ converge absolument (série de Riemann d'exposant strictement plus grand que 1). Dès lors la série de départ doit également converger absolument par critère d'équivalence.

5. Soit F le champ de vecteurs de l'espace défini par $F(x,y,z) = (2x^2-3z, -2xy, -4x)$.
   a) Calculer la divergence de F.
   b) Déterminer le volume du solide défini par $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ et $2x+2y+z \leq 4$.
   c) Calculer le flux de F au travers de la surface bordant ce solide.

a) $\operatorname{div} F = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} = 2x$.

b) On peut calculer le volume par

$$\int_0^2 \int_0^{2-x} \int_0^{4-2x-2y} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

ce qui donne ${}^8\!/\!_3$.

c) D'après le théorème de la divergence, ce flux vaut

$$\int_0^2 \int_0^{2-x} \int_0^{4-2x-2y} 2x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

soit à nouveau ${}^8\!/\!_3$.

Calcul différentiel et intégral 1

Interrogation de novembre 2017

- **Aucun appareil électronique (calculatrices, GSM, . . .) n'est autorisé.**

- **Veuillez commencer chaque question sur une nouvelle feuille.**

- **Ecrivez CLAIREMENT vos nom et prénom EN MAJUSCULES sur chaque feuille rendue.**

- **Justifiez soigneusement toutes vos réponses. Vous pouvez utiliser tous les résultats vus au cours à condition de les énoncer clairement et de vérifier que les hypothèses sont satisfaites**

1. Considérons l'équation

$$y''(t)-2y'(t)+y(t)=-\cos(t)+\sin(t). \tag{1}$$

   a) Montrer que cette équation admet une solution du type

   $$a\cos(t)+b\sin(t),$$

   pour certains réels a et b. **(2 points)**

   Posons $y(t) = a\cos(t)+b\sin(t)$. Alors $y'(t) = -a\sin(t)+b\cos(t)$ et $y''(t)=-a\cos(t)-b\sin(t)$ et $y''(t)-2y'(t)+y(t)=2a\sin(t)-2b\cos(t)$ et donc $\frac{1}{2}\cos(t)+\frac{1}{2}\sin(t)$ est une solution de l'équation.

   b) Déterminer toutes les solutions de l'équation

   $$y''(t)-2y'(t)+y(t)=0,$$

   dite *équation homogène associée.* **(2 points)**

   Le polynôme caractéristique vaut $t^2-2t+1=(t-1)^2$. Les solutions de l'équation homogène sont donc

   $$y(t)=c_1e^t+c_2te^t,$$

   pour $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

   c) Montrer que si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation (1), alors y_1-y_2 est une solution de l'équation homogène associée et en déduire toutes les solutions de l'équation (1). **(2 points)**

   Si $y_1''(t)-2y_1'(t)+y_1(t)=-\cos(t)+\sin(t)$ et $y_2''(t)-2y_2'(t)+y_2(t)=-\cos(t)+\sin(t)$, alors en soustrayant la seconde équation de la première, on obtient

   $$y_1''(t)-y_2''(t)-2(y_1'(t)-y_2'(t))+(y_1(t)-y_2(t))=0,$$

   ce qui dit que y_1-y_2 est une solution de l'équation homogène associée et implique par le point précédent que $y_1(t)-y_2(t)=c_1e^t+c_2te^t$. En particulier, si $y_2(t)$ est la solution trouvée ci-dessous $y_2(t)=\frac{1}{2}\cos(t)+\frac{1}{2}\sin(t)$, et si y_1 est une solution quelconque, alors

   $$y_1(t)=c_1e^t+c_2te^t+\frac{1}{2}\cos(t)+\frac{1}{2}\sin(t),$$

   pour certain réels c_1, c_2.

2. a) Donner la définition de convergence d'une suite. **(3 points)**

   b) Enoncer et démontrer le théorème de convergence des suites monotones. **(3 points)**

   c) Considérons la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ définie par $x_0 = 2$

$$x_{n+1} = \frac{2x_n - 1}{x_n}.$$

   - Montrer que pour tout $n \geq 1,\ x_n > 1$.
   - En supposant que x_n converge, déterminer sa limite.
   - Montrer que (x_n) converge.

(3 points)

3. Déterminer si les suites (x_n) définies ci-dessous convergent et pour celles qui convergent, déterminer leur limite.

   a) $x_n = \dfrac{\cos(\pi n)n! + 2^n)}{n! + 3^n}$ **(2 points)**

   b) $x_n = \dfrac{n^{1/2} + (-1)^n}{n^2 + 1/n}$ **(2 points)**

   c) $x_n = n^{(1-\frac{1}{2^n})}$. **(2 points)**

Calcul différentiel et intégral 1
MATH-F-101

Test de janvier 2017

24 janvier 2017

- **Aucun appareil électronique (calculatrices, GSM, . . .) n'est autorisé.**
- **Veuillez commencer chaque question sur une nouvelle feuille.**
- **Ecrivez CLAIREMENT votre nom et prénom EN MAJUSCULES sur chaque feuille rendue.**
- **Justifiez soigneusement toutes vos réponses.**

1. a) Etant donné une fonction continue $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $a\in\mathbb{R}$, on définit la fonction $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ par

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

Montrer que $F'(x)=f(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. **(2 points)**

Il s'agit du théorème fondamental première version. Voir syllabus.

b) Enoncer et démontrer le théorème d'intégration par partie. **(2 points)**

Voir syllabus.

c) En utilisant ce théorème et ensuite le critère de comparaison, monter que l'intégrale impropre

$$\int_1^\infty \frac{\cos x}{x}dx$$

converge. Justifier chaque étape. **(2 points)**

Comme la fonction $\frac{\cos x}{x}$ est continue sur $[1,\infty)$, elle est bornée et intégrable sur chaque intervalle $[1,b]$. Il faut donc voir si la limite des intégrales $\int_1^b \frac{\cos x}{x}\,dx$ lorsque b tend vers l'infini existe.

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{\cos x}{x}dx &= \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{\cos x}{x}dx\\ &= \lim_{b\to\infty}\left([\frac{\sin x}{x}]_1^b+\int_1^b \frac{\sin x}{x^2}dx\right)\\ &= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{\sin b}{b}-\sin 1\right)+\lim_{b\to\infty}\left(\int_1^b \frac{\sin x}{x^2}dx\right).\end{aligned}$$

Or $\frac{-1}{b}\leq\frac{\sin b}{b}\leq\frac{1}{b}$ et le lemme du sandwich implique donc que $\frac{\sin b}{b}$ tend vers 0 lorsque b tend vers l'infini. La première limite converge donc vers sin(1). Par ailleurs, $|\frac{\sin x}{x^2}|\leq\frac{1}{x^2}$. Donc

$$\begin{aligned}|\int_1^b \frac{\sin x}{x^2}dx| &\leq \int_1^b |\frac{\sin x}{x^2}|dx\\ &\leq \int_1^b \frac{1}{x^2}\\ &= \left[\frac{-1}{x}\right]_1^b\\ &= 1-\frac{1}{b}.\end{aligned}$$

qui tend vers 1 lorsque b tend vers l'infini, ce qui montre que $\int_1^b \frac{\sin x}{x^2} dx$ converge.

2. a) Enoncer et démontrer le théorème de la valeur intermédiaire. **(2 points)**

Voir syllabus.

b) Soient I un intervalle. On dit qu'une fonction $f : I \to I$ a un point fixe s'il existe un point $x \in I$ tel que $f(x) = x$. Montrer que si f est continue et si I est du type $[a, b]$, pour $a < b \in \mathbb{R}$, alors f admet un point fixe. **(2 points)**

Observons que f a un point fixe si et seulement si la fonction $g(x) = f(x) - x$ a un zéro. Par ailleurs, comme $f(a) \geq a$ et $f(b) \leq b$, on a $g(a) \geq 0$ et $g(b) \leq 0$. Si $g(a) = 0$ ou $g(b) = 0$, alors on a prouvé l'assertion. Sinon, $g(a) > 0$ et $g(b) < 0$ et le théorème de la valeur intermédiaire nous fournit un point $x \in (a, b)$ tel que $g(x) = 0$.

c) Montrer par des exemples précis que chacune de ces hypothèses est nécessaire, c'est-à-dire, donner une exemple de fonction $f : [a, b] \to [a, b]$ qui n'a pas de point fixe et un exemple de fonction $f : I \to I$ continue qui n'a pas de point fixe. **(1 points)**

Considérons la fonction $f : [a, b] \to [a, b]$ qui vaut a partout sauf en a où elle vaut b. Elle n'a pas de point fixe et n'est pas continue.

Pour l'hypothèse portant sur l'intervalle, considérons la fonction $g : (0, 1] \to (0, 1] : x \mapsto \frac{1}{2}x$. Elle est continue mais n'a aucun point fixe puisque si $\frac{1}{2}x = x$, alors $\frac{1}{2}x = 0$, ce qui implique que $x = 0$ mais le point 0 n'appartient pas à l'intervalle $(0, 1]$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}_0$ le *n ième nombre harmonique* est le nombre réel

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Si x est un nombre réel, on définit $\lfloor x \rfloor$ comme étant le plus grand entier inférieurs ou égal à x et $\lceil x \rceil$ comme étant le plus petit entier supérieur ou égal à x.

a) Montrer que

$$\int_1^n \frac{1}{\lceil x \rceil} \leq \int_1^n \frac{1}{x} \leq \int_1^n \frac{1}{\lfloor x \rfloor}.$$

(1 point)

Comme $\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil$, on a $\frac{1}{\lfloor x \rfloor} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{\lceil x \rceil}$, ce qui implique que

$$\int_1^n \frac{1}{\lceil x \rceil} \leq \int_1^n \frac{1}{x} \leq \int_1^n \frac{1}{\lfloor x \rfloor}.$$

b) Déduire du point précédent les deux inégalités suivantes :

$$\log(n) \leq H_n \leq 1 + \log(n).$$

(1 point)

Les inégalités précédentes impliques que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \leq \log(n) \leq 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1},$$

c'est-à-dire que $H_n - 1 \leq \log(n) \leq H_{n-1}$. La première de ces inégalité est équivalente à $H_n \leq \log(n) + 1$ et la seconde, combinée avec le fait que $H_{n-1} \leq H_n$ implique que $\log(n) \leq H_n$.

c) Posons $\gamma_n = H_n - \log(n)$. Montrer que

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx.$$

En déduire que la suite γ_n est décroissante et converge vers un nombre γ. Ce nombre est appelé *la constante d'Euler*. **(1 point)**

$$\begin{array}{rcl}\gamma_{n+1}-\gamma_n & = & H_{n+1}-\log(n+1)-H_n+\log(n)\\ & = & H_{n+1}-H_n-(\log(n+1)-\log(n))\\ & = & \frac{1}{n+1}-\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx.\end{array}$$

Par ailleurs, sur l'intervalle $[n, n+1]$, la fonction $\frac{1}{x}$ est bornée inférieurement par $\frac{1}{n+1}$. Donc

$$\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx \geq \int_n^{n+1}\frac{1}{n+1}dx = \frac{1}{n+1}.$$

Ceci implique que $\frac{1}{n+1}-\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx \leq 0$ pour tout n et donc que la suite (γ_n) est décroissante. Comme elle est aussi bornée (le point b) implique que $\gamma_n \in [0,1]$), elle converge vers un réel γ.

d) Utiliser le point précédent pour montrer que la suite

$$H_{2n}-H_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$$

converge vers log(2). **(1 point)**

$$\begin{array}{rcl}H_{2n}-H_n & = & \gamma_{2n}+\log(2n)-\gamma_n-\log(n)\\ & = & \gamma_{2n}-\gamma_n+\log(2)+\log(n)-\log(n)\\ & = & \gamma_{2n}-\gamma_n+\log(2).\end{array}$$

Cette dernière suite converge vers $\gamma-\gamma+\log(2)=\log(2)$ par les règles de convergence des suites.

4. a) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Quand dit-on que f est dérivable ? **(2 points)**

Voir syllabus.

b) Soient $m, n \in \mathbb{N}_0$. Considérons la fonction $f_{m,n}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f_{m,n}(x) = \begin{cases} x^m \sin\left(\dfrac{1}{x^n}\right) & \text{si} \quad x > 0. \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0. \end{cases}$$

Pour quelles valeurs de m, n cette fonction est-elle continue ?
(1 point)

Voyons d'abord que la fonction $f_{m,n}$ est continue en tout point $x > 0$ pour tout $m, n \in \mathbb{N}_0$. On sait que les fonctions puissances $x \mapsto x^m$ et $x \mapsto x^{-n}$ et la fonction $x \mapsto \sin(x)$ sont continue. Comme la composition de deux fonctions continues est continue, la fonction $x \mapsto \sin(\frac{1}{x^n})$ est continue et comme le produit de deux fonctions continues est une fonction continue la fonction $f_{m,n}$ est continue pour tout $x > 0$.

Pour $x < 0$, la fonction est constante et donc aussi continue.

Il reste donc à voir pour quelles valeurs de $m, n \in \mathbb{N}_0$ la fonction $f_{m,n}$ est continue en 0.

Pour $x > 0$, on a $|f_{m,n}(x)| \leq x^m$. Comme x^m tend vers 0 lorsque x tend vers 0 pour tout $m > 0$, la fonction $f_{m,n}$ est continue pour tout $m, n \in \mathbb{N}_0$.

c) Pour quelles valeurs de m, n, la fonction $f_{m,n}$ est-elle dérivable ?
(1 point)

Ici aussi il est facile de voir, à partir des règles de calcul et du fait que la composition de deux fonctions dérivables est une fonction dérivable que la fonction $f_{m,n}$ est dérivable en tout point $a \neq 0$. Il reste donc à traiter le cas $a = 0$. Considérons le quotient différentiel avec $h > 0$:

$$\frac{f_{m,n}(h)-f_{m,n}(0)}{h}=\begin{cases} \dfrac{h^m\sin(\frac{1}{h^n})}{h}=h^{m-1}\sin(\dfrac{1}{h^n}) & \text{si} \quad h>0 \\ 0 & \text{si} \quad h<0. \end{cases}$$

Le quotient différentiel a une limite si et seulement si $h^{m-1}\sin(\frac{1}{h^n})$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0 par valeurs positives. Par la preuve du point précédent, c'est le cas si $m-1>0$, c'est-à-dire si $m>1$. Il faut encore vérifier que si $m\leq 1$, ce n'est pas le cas. Pour voir cela, observons que la fonction $\sin(\frac{1}{h^n})$ prend la valeur 1 en tous les points d'une suite (x_k) qui tend vers 0. Pour que le produit $h^{m-1}\sin(\frac{1}{h^n})$ tend vers 0 quand h tend vers 0 il faut donc que $(x_k^{m-1})_k$ tende vers 0. C'est le cas seulement si $m>1$.

Donc $f_{m,n}$ est dérivable si et seulement si $m,n\in\mathbb{N}_0$.

d) Pour quelles valeurs de m,n, la fonction $f_{m,n}$ est-elle de classe C^1 ?

(1 point)

La fonction est $f_{m,n}$ est de classe C^1 si elle est dérivable et si sa dérivée est continue. On sait qu'elle est dérivable si et seulement si $m>1$ et $n\geq 1$. Supposons donc que $m>1$ et calculons donc la dérivée de $f_{m,n}$:

$$f'_{m,n}=\begin{cases} mx^{m-1}\sin(\frac{1}{x^n})-nx^{m-n-1}\cos(\frac{1}{x^n}) \text{ si } x>0 \\ 0 \text{ si } x=0 \text{ (par le point précédent)} \\ 0 \text{ si } x<0. \end{cases}$$

De nouveau, les règles de calcul impliquent que le seul point en lequel cette fonction pourrait ne pas être continue est 0. Il faut donc voir que la limite à droite de $f'_{m,n}$ en 0 vaut 0.

Comme $m > 1$, le premier terme $mx^{m-1}\sin(\frac{1}{x^n})$ tend vers 0. Il faut donc voir pour quelles valeurs de m, n le second terme tend aussi vers 0. Comme pour le point précédent, c'est cas si et seulement si $m - n - 1 > 0$, encore $m > n + 1$.

Donc $f_{m,n}$ est C^1 si et seulement si $m > n + 1$.

BA1 en sciences mathématiques et physiques
Examen de Calcul Différentiel et Intégral — Math-F-101
(Prof. M. Bertelson et D. Bonheure)

2 JUIN 2017

Matricule : .... Nom : ....

Section : .... Prénom : ....

Questions concernant le second quadrimestre $\boxed{\qquad /64}$

- **Vous disposez de trois heures pour cette partie.**
- **Rédigez soigneusement et justifiez, sauf mention contraire, toutes vos réponses.**
- **Pour obtenir la note maximale, vous devez obtenir 58/64.**

1. $\boxed{\quad /4}$ Démontrez que toute suite bornée $(x_k)_k \subset \mathbb{R}^2$ contient une sous-suite qui converge. Vous pouvez utiliser le résultat correspondant pour les suites réelles sans le démontrer.

2. $\boxed{\quad /10}$ Soit $f\colon B(0,1) \to \mathbb{R}^2$ où $B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ est la boule ouverte centrée en 0 et de rayon 1.
   a) Quand dit-on que f est différentiable en 0 ?
   b) Supposons qu'il existe $0 < r < 1$ tel que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent dans $B(0,r)$ et que les fonctions
   $$\frac{\partial f}{\partial x}\colon B(0,r) \to \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}\colon B(0,r) \to \mathbb{R}^2$$
   sont continues en 0. Démontrez que f est différentiable en 0 et que la dérivée directionnelle de f en 0 dans la direction $v = (v_1, v_2)$ est donnée par
   $$\partial_v f(0) = J_f(0)(v_1, v_2).$$
   c) Donnez une (des) condition(s) qui assure(nt) que f est localement inversible autour de 0. Ne pas démontrer.

3. $\boxed{\quad /8}$ Soient $F : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ et $g : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, où U est ouvert.
   a) En supposant que g est de classe C^2, donnez une expression condensée du polynôme de Taylor $T_2(g,a)$ d'ordre 2 de g autour d'un point $a \in U$.
   b) Si g est de classe C^3, quel type d'estimation peut-on donner de l'erreur commise en remplaçant $g(x)$ par $T_2(g,a)(x)$ au voisinage de a ? Ne pas démontrer.
   c) Démontrez que si F et g sont de classe C^2, alors $\langle \nabla, \nabla \times F \rangle$ et $\nabla \times \nabla g$ sont identiquement nuls dans U. (Vous ne devez pas démontrer les théorèmes du cours dont vous auriez besoin.)

4. $\boxed{\quad /4}$ Soit $f\colon I \times J \to \mathbb{R}$ bornée et intégrable sur le rectangle $R = I \times J \subset \mathbb{R}^2$. Enoncez le Théorème de Fubini pour une telle fonction.

5. $\boxed{\quad /6}$ Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

   a) Démontrez que si la fonction f est contractante, alors elle est uniformément continue.

   b) Démontrez que si la fonction $f \circ f$ est contractante, alors f admet un unique point fixe. (Vous ne devez pas démontrer les théorèmes du cours dont vous auriez besoin.)

6. $\boxed{\quad /8}$ Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et

$$f(x,y) = \frac{x^3}{\sqrt{x^4+y^4}} \text{ si } (x,y) \neq (0,0).$$

   a) Etudiez la continuité de f en justifiant vos affirmations.

   b) Etudiez la différentiabilité de f en justifiant vos affirmations.

7. a) $\boxed{\quad /4}$ Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites de nombres réels telles que $a_n > 0$, $b_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et les séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergent. Peut-on en déduire que

      i. $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$ diverge ?

      ii. $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n b_n)$ diverge ?

   Si oui, démontrez-le, sinon donnez un contre-exemple.

   b) $\boxed{\quad /4}$ Répondez par vrai ou faux en justifiant soigneusement vos réponses. La série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{2n+1}}.$$

      i. converge ;

      ii. ne converge pas absolument.

8. $\boxed{\quad /6}$ Soit

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant y \leqslant 1, x \geqslant y\}.$$

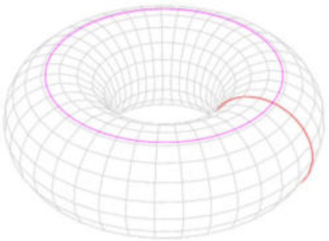
Déterminez les extréma locaux et globaux de la fonction

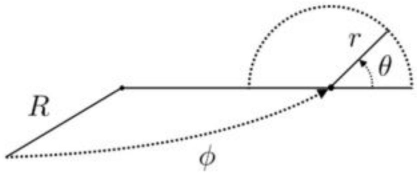
$$f : D \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto (x+y)e^{x-y}.$$

9. Un tore dans $\mathbb{R}^3$ est une surface de révolution engendrée par la rotation d'un cercle C de rayon r autour d'un axe coplanaire et disjoint de ce cercle, à distance $R > r$ du centre du cercle. Une paramétrisation du tore est donnée par

$$f : [0, 2\pi[\times [0, 2\pi[: (\phi, \theta) \mapsto ((R + r\cos\theta)\cos\phi, (R + r\cos\theta)\sin\phi, r\sin\theta),$$

où les angles ϕ, θ sont représentés dans la figure de droite ci-dessous.





a) $\boxed{\quad /2}$ Montrez que le vecteur normal sortant est donné par 3

$$n = r(R + r\cos\theta)(\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, \sin\theta).$$

b) $\boxed{\quad /2}$ Donnez l'équation du plan tangent en un point du tore (sous la forme que vous voulez : paramétrique ou cartésienne).

c) $\boxed{\quad /2}$ Calculez la surface du tore.

d) $\boxed{\quad /4}$ Les hauteurs minimales et maximales sur le tore sont $z_{min} = -r$ et $z_{max} = r$. Calculez le volume du "trou" intérieur créé par le tore entre les plans $z = z_{min}$ et $z = z_{max}$.

CORRECTION DE L'EXAMEN DE CDI JUIN 2017

1

Correction : Soit $(x_k) = (a_k, b_k)$. Comme la suite (x_k) est bornée, la suite (a_k) doit aussi être bornée. Par Bolzano-Weierstrass il existe une sous-suite (a_{k_l}) de (a_k) telle que (a_{k_l}) converge. Dès lors, $(x_{k_l}) = (a_{k_l}, b_{k_l})$ est toujours bornée ce qui implique que (b_{k_l}) est aussi bornée. Toujours par B-W, il existe une sous suite de (b_{k_l}) que l'on peut appeler $(b_{k_{l_m}})$ telle que $(b_{k_{l_m}})$ converge. Toute sous suite d'une suite convergente converge donc $(a_{k_{l_m}})$ converge. Donc $(x_{k_{l_m}})$ converge.

2

Correction : Toutes les définitions et démonstrations se trouvent dans le cours.

3

(1) $T_2(g,\, a)(x) = g(a) + < \vec{\nabla} g(a), (x-a) > + \frac{1}{2}(x-a)^T H(g;a)(x-a)$ où $H(g,a)$ est la matrice Hessienne de g en a.

$$H(g,a) = \begin{pmatrix} \partial_x^2 g(a) & \partial_x \partial_y g(a) \\ \partial_x \partial_y g(a) & \partial_y^2 g(a) \end{pmatrix}$$

(2) $|E_2(x)| = |g(x) - T_2(g,a)(x)| = |\sum_{|\alpha|=3} R_\alpha(x)(x-a)^\alpha|$ où les R_α vérifient l'inégalité : $|R_\alpha(x)| \leq \sup_{y \in [a;x]} |\frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha g(y)}{\partial x^\alpha}|$

(3) $< \nabla, \nabla \times F >= \partial_x(\partial_y F_z - \partial_z F_y) + \partial_y(\partial_z F_x - \partial_x F_z) + \partial_z(\partial_x F_y - \partial_y F_x)$ comme $F \in C^2$ on peut interchanger l'ordre des dérivées partielles ce qui donne l'annulation de l'expression.

4

On peut trouver le théorème de Fubini dans le syllabus

5

(1) f est contractante ce qui signifie qu'il existe $\alpha \in [0,\, 1)$ tel que $\forall x,\, y \in \mathbb{R}^n$:

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha |x-y|$$

La continuité uniforme suit directement. En effet, fixons ϵ et prenons $\delta = \epsilon/\alpha$ (si $\alpha \neq 0$. Dans le cas contraire la fonction est constante et la démonstration triviale). On obtient donc que si $|x-y| \leq \delta$, $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$.

(2) On se rappelle que pour une fonction contractante habituelle (cfr. syllabus), le point fixe est la limite de la série définie par récurrence comme : $x_{n+1} = f(x_n)$. Nous notons cette limite x. En effet, si la série converge, par continuité uniforme de f, nous avons que : $f(x) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = x$.

Il 'suffit' donc de montrer la convergence de x_n. Séparons cette suite en deux sous-suite : $a_n = (x_{2n})$ et $b_n = (x_{2n+1})$. Si chacune de ces suites converge, leur limite est un point fixe de f. Il suffira alors de montrer l'unicité du point fixe de f pour avoir la convergence de la suite x_n et finir l'exercice.

Pour montrer la convergence il suffit de réaliser que $a_{n+1} = fof(a_n)$ et fof est contractante on a donc convergence de cette suite vers un point fixe de fof. De même pour b_n.

Si chacune de ces deux séries convergaient vers un point différent, a et b, alors on aurait que :

$$|a-b| = |fof(a) - fof(b)| \leq \alpha|a-b|$$

ce qui contredit le fait que fof est contractante.

6

(1) En dehors de $(0, 0)$, il est clair que f est continue car elle est la division, multiplication, composition,... de fonction continue et le dénominateur est non-nul. Montrons que $\lim\limits_{(x,\, y)\to(0,\, 0)} f(x, y) = 0$. On a que

$$|f(x, y)| \leq \frac{|x^3|}{\sqrt{x^4}} = |x|$$

Ce qui implique que $\lim\limits_{(x,\, y)\to(0,\, 0)} |f(x, y)| \leq \lim\limits_{(x,\, y)\to(0,\, 0)} |x| = \lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$. La fonction est donc continue à l'origine.

(2) On peut facilement calculer qu'en dehors de $(0\,0)$, les dérivées partielles sont continues et valent :

$$\partial_x f(x,\, y) = \frac{x^6 + 3x^2y^4}{(x^4+y^4)^{3/2}}$$
$$\partial_y f(x,\, y) = \frac{-2x^3y^3}{(x^4+y^4)^{3/2}}$$

La fonction est donc C^1 en dehors de l'origine. A l'origine, on chercher la dérivée correspond à trouver une application linéaire $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\lim_{(b_1,\, b_2)\to(0,\, 0)} \frac{|f(b_1,\, b_2) - f(0,0) - L(b_1,\, b_2)|}{|(b_1,\, b_2)|} = 0$$

Ce qui revient à trouver α et β réels tels que :

$$\lim_{(b_1,\, b_2)\to(0,\, 0)} \frac{\left|\frac{b_1^3}{\sqrt{b_1^4+b_2^4}} - \alpha b_1 + \beta b_2\right|}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}} = 0$$

Nous allons tendre vers $(0,\, 0)$ par deux chemins différents et montrer que la contrainte ci-dessus va nous donner deux formes linéaires distinctes et que donc f n'est pas différentiable en $(0;\, 0)$. Prenons le chemin $b_1 = \lambda b_2$ et montrons que α et β dépendent de λ un paramètre que l'on choisit.

$$\lim_{b_2\to 0} \frac{\left|\frac{(\lambda b_2)^3}{\sqrt{(\lambda b_2)^4+b_2^4}} - \alpha\lambda b_2 + \beta b_2\right|}{\sqrt{(\lambda b_2)^2+b_2^2}} = 0$$

$$\lim_{b_2 \to 0} \frac{\left|\frac{\lambda^3}{\sqrt{\lambda^4+1}} - \alpha + \beta\right|}{\sqrt{\lambda^2+1}} = 0$$

Cela implique que $\beta = \frac{\lambda^3}{\sqrt{\lambda^4+1}} - \alpha\lambda$. Pour des λ différent on obtient donc bien des valeurs de β différentes.

7

(1) La somme de séries divergentes diverge. Cela s'observe facilement :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \infty + \infty = \infty$$

(2) Si l'on prend la suite $a_n = b_n = 1/n$, les séries associées à a_n et b_n divergent mais

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \times b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

Si l'on veut être complet, il faut montrer la divergence de la série associée à $1/n$ et la convergence de celle associée à $1/n^2$. Un truc classique est de borner ces séries par l'intégrale des fonctions associées (1/x et $1/x^2$) ("Laissé en exercice").

8

$$f : D \to \mathbb{R} : (x,\, y) \to (x+y)e^{x-y}$$

Pour en déterminer les extréma, il faut calculer le gradient de cette fonction :

$$\vec{\nabla} f : (x, y) \to (1 + x + y,\, 1 - x - y)e^{x-y}$$

Observons que sur D, le gradient ne s'annule jamais. Les extrema se situent donc sur le bord de D.

Sur le bord : $y = 0$, $x \geq 0$, $f(x,\, 0) = xe^x$ est une fonction croissante de x et, sur ce ce bord, le minima est à l'origine à la valeur 0.

Sur le bord : $y = 1$, $x \geq 1$, $f(x,\, 1) = (x+1)e^{x-1}$ qui est toujours une fonction croissante de x et possède sur ce bord un minima en (1,1) de valeur 2.

Sur le bord : $x = y$, $f(x,\, x) = 2x$ qui est croissante en fonction de x et possède donc un minima à l'origine.

Toutes ces informations combinées nous indique donc que la fonction possède un unique minima global en (0, 0)

9

(1) Calculons les vecteurs tangents au tore $\partial_\theta f$ et $\partial_\phi f$.

$\partial_\theta f = (-rsin(\theta)cos(\phi); -rsin(\theta)sin(\phi); rcos(\theta))$ et

$\partial_\phi f = (-(R + rcos(\theta))sin(\phi); (R + rcos(\theta)cos(\phi); 0)$.

On peut alors, au choix, soit calculer le produit vectoriel de ces deux vecteurs ou bien calculer le produit scalaire de ces vecteurs avec le vecteur normal et vérifier que cela vaut 0. Cette partie est juste calculatoire et sans subtilité vous est laissée.

(2) On connait deux vecteurs qui engendrent le plan tangeant au tore en fonction de $(\theta;\phi)$. Ainsi, l'équation paramétrique en un point en θ et ϕ fixé est :

$$x = (R + rcos(\theta)cos(\phi) + \lambda(-r\sin(\theta)cos(\phi)) + \mu(-R + r\cos(\theta))\sin(\phi) \tag{9.1}$$

$$y = (R + rcos(\theta)\sin(\phi) + \lambda(-r\sin(\theta)sin(\phi)) + \mu(-R + r\cos(\theta))\cos(\phi) \tag{9.2}$$

$$z = r\sin(\theta) + \lambda r\cos(\theta) + \mu 0 \tag{9.3}$$

(3) L'aire est donnée par :

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} ||\partial_\theta f \times \partial_\phi f|| \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi \tag{9.4}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (r\cos(\theta) + R) r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi \tag{9.5}$$

$$= (2\pi)^2 Rr \tag{9.6}$$

(4) Pour un solide de révolution dont le rayon est $r(z)$, nous avons que le volume est $V = \int \mathrm{d}z 4\pi(r(z))^2$. Dans notre cas, $r(z) = R - \sqrt{r^2 - z^2}$. On a alors :

$$V = 4\pi \int_{-r}^{r} \mathrm{d}z(R - \sqrt{r^2 - z^2})^2 \tag{9.7}$$

$$= 4\pi \int_{-r}^{r} \mathrm{d}z R^2 + r^2 - z^2 - 2R\sqrt{r^2 - z^2} \tag{9.8}$$

$$= 4\pi((R^2 + r^2) - (2/3r^3) - 2R\int_{-r}^{r} \mathrm{d}z\sqrt{r^2 - z^2}) \tag{9.9}$$

$$= 4\pi((R^2 + r^2)2r - (2/3r^3) - \pi Rr^2) \tag{9.10}$$

Correction de l'examen CDI juin 2017-1er quadri

August 6, 2017

Question 1 a) Trouver une primitive de $tg(x)$

$$\int tg(x)dx = \int \frac{sin(x)}{cos(x)}dx \tag{1}$$

Le changement de variables $cos(x) = u$ donne

$$\int \frac{-1}{u}du = -ln(u) = -ln(cos(x)) \tag{2}$$

b) Trouver une solution a l'équation différentielle suivante:

$$f'(x) + tg(x)f(x) = sin(x) \tag{3}$$

En posant $f(x) = M(x) * g(x)$ on obtient:

$$g(x)(M'(x) + tg(x)M(x)) + g'(x)M(x) = sin(x) \tag{4}$$

Pour simplifier cette équation, on cherche un $M(x)$ tel que:

$$\begin{aligned} M'(x) + tg(x)M(x) &= 0 \\ M'(x) &= -tg(x)M(x) \\ \int \frac{dM}{M(x)} &= \int -tg(x)dx \\ ln(M(x)) &= ln(cos(x)) \\ M(x) &= cos(x) \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient:

$$\begin{aligned} g'(x)M(x) &= sin(x) \\ g'(x)cos(x) &= sin(x) \\ g'(x) &= tg(x) \\ g(x) &= -ln(cos(x)) \end{aligned}$$

Finalement, nous obtenons que

$$f(x) = M(x)g(x) = -ln(cos(x))cos(x)$$

est une solution à l'equation (3). On peut vérifier ce résultat en dérivant f(x).

Question 2 Soit f(x) $x \in [0,1]$ telle que $f(x) = f(x^2)$
a) Montrer que:

$$f(x^2) = f(x^{2^n}) \tag{5}$$
$$\forall n \geq 1, x \in [0,1]$$

Par induction, on a que le cas n = 1 marche. On suppose que le cas n fonctionne aussi et on regarde le cas n+1.

$$f(x^{2^{n+1}}) = f((x^2)^{2^n}) = f(x^2)$$

donc le cas n+1 fonctionne aussi. Ceci complète la preuve par induction.

b) f est continue et f(0) = 0. Déterminez la fonction exactement. La continuité en 0 nous donne :

$$\forall \epsilon > 0; \exists \delta > 0 : |x| < \delta; |f(x)| < \epsilon$$

Soit $x \in [0,1)$ et la suite $x_n = x^{2^n}$.Comme $x < 1$ cette suite tends vers 0 :

$$\forall \delta > 0; \exists N : \forall n \geq N : |x^{2^n}| < \delta$$

Ainsi, un tel x_n avec $n \geq N$ rentre dans la définition de la continuité en 0 et avec le point a) on peut dire que:

$$|f(x)| = |f(x^{2^n})| < \epsilon$$

Pour ϵ arbitrairement petit. Donc $f(x) = 0 : \forall x \in [0:1)$. De plus, comme f est continue aussi en 1, alors $f(1) = 0$. La fonction est totalement déterminée.

Question 3 a) Enoncer le théorème de la valeur intermédiaire. CF COURS.
b) Comme f' est continue et ses limites en 0 et en 1 sont de signes opposés, il est tentant d'utiliser directement le théorème de la valeur intermédiaire pour obtenir qu'il existe un point $c \in (0,1) \mid f'(c) = 0$. Cependant ce théorème tel qu'énoncé ne s'applique que sur des intervalles fermés. On peut facilement contourner cette difficulté en définissant la fonction g sur l'intervalle $[0,1]$:

$$\begin{aligned} g(x) = f'(x)\ \forall x \in (0;1) \\ g(0) = -a \\ g(1) = b \end{aligned}$$

Cette fonction est continue sur $[0;1]$ et les valeurs aux bornes sont de signes opposés. Le théorème de la valeur intermédiaire s'applique et il existe un $c \mid g(c) = f'(c) = 0$.
c) CF COURS

Calcul différentiel et intégral 1

MATH-F-101

Le 23 janvier 2018

NOM et PRÉNOM :

NUMÉRO DE MATRICULE :

Aucun appareil électronique (calculatrice, GSM, . . .) n'est autorisé.

Justifiez soigneusement toutes vos réponses.

1. /16
2. /26
3. /14
4. /30

Tot : /80

Tot : /20

1. a) $\boxed{\quad /6}$ Enoncer et démontrer le théorème de la moyenne.
Pour ce faire vous pouvez utiliser le théorème des bornes atteintes à condition de l'énoncer clairement

Voir notes de cours

b) $\boxed{\quad /4}$ Etant donné la fonction $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$, montrer que pour tout $x > 0$ il existe un nombre $c = c(x) \in]x, x+1[$ pour lequel

$$f(x+1) - f(x) = -\frac{1}{c^2} e^{\frac{1}{c}}.$$

On applique le théorème de la moyenne à la fonction $f : [x, x+1] \to \mathbb{R} : x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$. Il nous dit qu'il existe un point $c \in [x, x+1]$ pour lequel

$$\frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} = f'(c).$$

Comme $f'(c) = -\frac{1}{c^2} e^{\frac{1}{c}}$, ceci revient à dire qu'il existe un point $c \in [x, x+1]$ pour lequel

$$f(x+1) - f(x) = -\frac{1}{c^2} e^{\frac{1}{c}}.$$

c) $\boxed{\quad /6}$ En déduire que la limite suivante existe et déterminer sa valeur

$$\lim_{x\to\infty} x^2 (e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}}).$$

On observe tout d'abord que la limite est indéterminée puisque $\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$ et que $\lim_{x\to\infty} (e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}}) = 0$. Grâce au résultat précédent, on sait que si $x > 0$, alors il existe $c(x) \in]x, x+1[$ tel que

$$(e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}}) = -\frac{1}{c(x)^2} e^{\frac{1}{c(x)}},$$

qui s'écrit aussi $c(x)^2 (e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}}) = -e^{\frac{1}{c(x)}}$. Il est clair que $\lim_{x\to\infty} c(x) = \infty$ et que donc $\lim_{x\to\infty} -e^{\frac{1}{c(x)}} = -1$. Donc $\lim_{x\to\infty} c(x)^2 (e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}}) = -1$. Mais nous voulons trouver la limite de $x^2 (e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}})$ (avec x^2 au lieu de $c(x)^2$). Le fait que $x < c(x) < x+1$ implique que $c(x) - 1 < x < c(x)$ et donc que $(c(x)-1)^2 < x^2 < c(x)^2$. Par ailleurs, la fonction f étant décroissante, on a $e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}} < 0$. Tout ceci mis ensemble implique que

$$(c(x)-1)^2 (e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}}) > x^2 (e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}}) > c(x)^2 (e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}}),$$

pour tout $x > 0$, ce qui implique que

$$\lim_{x\to\infty} (c(x)^2 - 2c(x) + 1)(e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}}) \geq \lim_{x\to\infty} x^2 (e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}}) \geq \lim_{x\to\infty} c(x)^2 (e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}}) = -1.$$

Pour conclure, il faudrait donc voir que $\lim_{x\to\infty} (c(x)^2 - 2c(x) + 1)(e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}}) = -1$. Comme $\lim_{x\to\infty} c(x)^2 (e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}}) = -1$, il suffit de voir que $\lim_{x\to\infty} (-2c(x) + 1)(e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}}) = 0$. Or $\lim_{x\to\infty} (e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}}) = 0$ et

$$\lim_{x\to\infty} -2c(x)(e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}}) = -2 \lim_{x\to\infty} c(x)^2 (e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}}) \lim_{x\to\infty} \frac{1}{c(x)} = 2.0 = 0.$$

2. a) /6 Enoncer et démontrer le critère de Riemann pour l'intégrabilité d'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Voir notes de cours

b) /6 En déduire que toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable.
Vous pouvez utiliser sans démonstration le fait que toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est uniformément continue à condition de bien définir tous les termes que vous utilisez.

Voir notes de cours

c) /6 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Pour un naturel $n > 1$, considérer la partition $P_n = \{a + (b-a)\frac{i}{n} | i = 0, 1, ..., n\}$ et montrer que

$$U(f,P_n) - L(f,P_n) = \frac{(b-a)}{n}(f(b) - f(a)).$$

Il faut se rappeler que

$$U(f,P_n) - L(f,P_n) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i+1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i+1}),$$

où $M_i = \sup\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, $m_i = \sup\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\}$. Or comme f est monotone croissante, $M_i = f(x_i)$ et $m_i = f(x_{i-1})$. Par ailleurs, $x_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$ et donc $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$. On peut donc réécrire $U(f,P_n) - L(f,P_n)$ comme suit :

$$\begin{aligned} U(f,P_n) - L(f,P_n) &= \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))\frac{(b-a)}{n} \\ &= \frac{(b-a)}{n}(f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + ... + f(x_n) - f(x_{n-1})) \\ &= \frac{(b-a)}{n}(f(x_n) - f(x_0)) \\ &= \frac{(b-a)}{n}(f(b) - f(a)). \end{aligned}$$

d) /4 En déduire que f est intégrable.

D'après le critère de Riemann, une fonction est intégrable si pour tout $\varepsilon > 0$ existe une partition P_ε de $[a,b]$ telle que

$$U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On a vu au point précédent que si on considère la partition $P_n = \{a + (b-a)\frac{i}{n} | i = 0, 1, ..., n\}$, alors $U(f,P_n) - L(f,P_n) = \frac{(b-a)}{n}(f(b) - f(a))$. Donc si on veut que $U(f,P_n) - L(f,P_n) < \varepsilon$, il faut choisir $n > 1$ suffisamment grand pour que $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{(b-a)(f(b)-f(a))}$.

e) /4 Trouver une fonction intégrable $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ qui n'est pas continue.

Ce qu'on vient de faire nous dit qu'il suffit de trouver une fonction qui est croissante et discontinue, comme par exemple la fonction $f : [0,2] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ 1 & \text{si} \quad x \in]1,2]. \end{cases}$$

3. Soit (x_n) une suite bornée de nombres réels. Voici une preuve de l'existence d'une sous-suite convergente différente de celle vue au cours. Vous allez devoir compléter les détails. Justifiez soigneusement en énonçant clairement chaque résultat que vous utilisez.

   a) $\boxed{\quad /6}$ Comme (x_n) est bornée, l'ensemble $\{x_n\}$ est contenu dans un intervalle $[a_0, b_0]$. Coupons cet intervalle en deux intervalles égaux. Montrer que l'un d'eux contient une infinité de points de la suite (x_n) et notons cet intervalle $[a_1, b_1]$.

   Première remarque, il se peut que $\{x_n\}$ ne soit pas en ensemble infini. C'est le cas d'une suite constante par exemple. Mais cela ne change rien à la discussion. Au contraire, si $\{x_n\}$ est fini, alors c'est encore plus simple car cela signifie qu'il existe une valeur x_n qui est atteinte une infinité de fois, ce qui nous donne une sous-suite constante et donc convergente.
   Seconde remarque : Il s'agit ici d'un problème de tiroirs : si une infinité d'objets sont répartis entre deux tiroirs, au moins l'un des deux doit contenir une infinité d'objets (peut-être les deux !).
   Plus précisément, notons c_0 le milieu de l'intervalle $[a_0, b_0]$ ($c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$). Supposons au contraire que $x_n \in [a_0, c_0]$ pour un nombre fini de $n \subset \mathbb{N}$, disons pour les $n \in A_1 \subset \mathbb{N}$, et aussi que $x_n \in [c_0, b_0]$ pour un nombre fini de n, disons pour les $n \in A_2 \subset \mathbb{N}$. Alors $A_1 \cup A_2$ est fini et donc on ne peut avoir $\mathbb{N} = A_1 \cup A_2$. On sont les points x_n de la suite avec $n \notin A_1 \cup A_2$? ! ?

   b) $\boxed{\quad /8}$ On répète cette opération ce qui nous donne une suite décroissante d'intervalles $[a_k, b_k]$, $k \in N$, chacun contenant une infinité de points de la suite. Pour chaque $k \geq 1$, choisissons un point $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$ de la suite, de telle manière que $n_{k-1} < n_k$. Montrer, en utilisant le théorème de convergence des suites monotones et le critère de comparaison, que la suite (x_{n_k}) converge.

   Il faut observer que comme l'intervalle $[a_k, b_k]$ est contenu dans l'intervalle $[a_{k-1}, b_{k-1}]$, on a que la suite (a_k) est croissante et la suite (d_k) est décroissante. Comme ces deux suites sont bornées puisque $a_k, b_k \in [a_0, b_0]$ pout tout k, elles convergent par le théorème de convergence des suites monotones. On a donc $\lim_{k\to\infty} a_k = a$ et $\lim_{k\to\infty} b_k = b$. Par ailleurs, comme l'intervalle $[a_k, b_k]$ est deux fois plus petit que l'intervalle $[a_{k-1}, b_{k-1}]$ pour tout k, on a

   $$b_k - a_k = \frac{1}{2}(b_{k-1} - a_{k-1}) = \frac{1}{4}(b_{k-2} - a_{k-2}) = \ldots = \frac{1}{2^k}(b_0 - a_0),$$

   ce qui montre que $b - a = \lim_{k\to\infty}(b_k - a_k) = 0$.
   Par ailleurs, $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$, ce qui implique, par le critère de comparaison, que

   $$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a.$$

4. Les affirmations suivantes sont-elle vraies ou fausses ? Pour chacune, si elle est vraie démontrez là, si elle est fausse exhibez un contre-exemple. Vous pouvez utiliser tous les résultats vus au cours à condition des les énoncer clairement et complètement.

   a) $\boxed{\quad /6}$ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue, alors la fonction $f^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto (f(x))^2$ est aussi uniformément continue.

      Faux : la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x$ est uniformément continue car pour $\varepsilon > 0$, il suffit de prendre $\delta = \varepsilon$ pour avoir que si $|x - y| < \varepsilon$, alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Par contre, la fonction $f^2(x) = x^2$ n'est pas uniformément continue. Supposons au contraire qu'elle le soit. Cela nous dit que si $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si x, y sont deux réels tels que $|x - y| < \delta$, alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. En particulier, si $x > 0$ et $y = x + \frac{\delta}{2}$, on a $|x - y| = \frac{\delta}{2} < \delta$ et donc $\varepsilon > |x^2 - y^2| = |x - y|\,|x + y| > \frac{\delta}{2} \cdot 2x$, ce qui est impossible puisque $\delta \cdot x$ tend vers l'infini avec x.

   b) $\boxed{\quad /6}$ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue injective. Si (x_n) est une suite de réels telle que la suite $(f(x_n))$ converge, alors (x_n) converge.

      Faux : Considérons la suite $x_n = n$ et une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, strictement croissante et bornée (donc avec une asymptote horizontale), comme par exemple $Arctg : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. II est clair que (x_n) diverge. Par contre, la suite $f(x_n)$ converge car elle est croissante et bornée.

   c) $\boxed{\quad /6}$ Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui admet en $a \in \mathbb{R}^n$ toutes ses dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x^i}(a)$, $i = 1, \ldots, n$ est différentiable en a.

      Faux : La fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^4 + y^4} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

      admet des dérivées partielles en $(0, 0)$, puisque $f(0, y) = 0$ et $f(x, 0) = 0$ (et que donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0) = 0$). Si f était différentiable en 0, son gradient serait donc $\nabla f(0) = (\frac{\partial f}{\partial x}(0), \frac{\partial f}{\partial y}(0)) = (0, 0)$ et donc toutes les dérivées directionnelles de f en 0 seraient nulles puisque $\partial_v f(0) =< \nabla f(0), v >$ pout tout $v \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$. Or le long de la droite $y = x$, la fonction f vaut $f(x, x) = \frac{x^5}{2x^4} = \frac{1}{2}x$, ce qui implique que $\partial_v f(0) = \frac{1}{2}$ pour $v = (1, 1)$, une contradiction.

   d) $\boxed{\quad /6}$ Si $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est un champ de vecteurs conservatif et si $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ est un lacet, alors $\int_\gamma < F, dx >= 0$.

      Vrai : Un résultat du cours (Lemme 3.2) nous dit que si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un champ de vecteurs conservatif, c'est-à-dire tel que $F = \nabla g$ pour une certaine fonction $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, alors $\int_\gamma < F, dx >$ ne dépend que des points $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$. On a en fait que $\int_\gamma < F, dx >= g(\gamma(1)) - g(\gamma(0))$. Si γ est un lacet, alors $\gamma(0) = \gamma(1)$ et donc $\int_\gamma < F, dx >= 0$.

   e) $\boxed{\quad /6}$ Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : x = (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, alors le gradient de f est perpendiculaire aux sphères de $\mathbb{R}^3$ centrées à l'origine.

      Vrai : On voit que $\nabla f(x_1, x_2, x_3) = 2(x_1, x_2, x_3)$ qui est visiblement orthogonal aux sphères en question. Plus précisément, soit $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ et notons $S = \{x = (x_1, x_2, x_3) \mid ||x||^2 = ||a||^2\}$ la sphère centrée à l'origine qui passe par a. La règle de dérivation des fonctions composées (Proposition 8.7) nous dit que si $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est dérivable en $t \in \mathbb{R}$ et si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dérivable en $u(t)$, alors $(f \circ u)'(t) =< \nabla f(u(t)), u'(t) >$. Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dérivable et prenant ses valeurs dans S. Alors puisque f est constante le long de S, on a $(f \circ u)'(t) = 0$, ce qui implique que $\nabla f(u(t))$ et $u'(t)$ sont perpendiculaires. Puisque $u'(t)$ est tangent à S, ceci démontre cela.

BA1 en sciences mathématiques et physiques
Examen de Calcul Différentiel et Intégral — Math-F-101
(Prof. M. Bertelson et D. Bonheure)

Le 1er JUIN 2018

Matricule : …………………… Nom : ………………………………….

Section : ……………………… Prénom : ……………………………….

Questions concernant le premier quadrimestre

- **Si vous répondez à cette partie, vous disposez d'une heure supplémentaire et votre note de janvier est annulée.**
- **Rédigez et justifiez soigneusement toutes vos réponses.**

1. ☐ /15 Rédiger soigneusement la définition de chaque énoncé ci-dessous :

   a) ☐ /5 *a est l'infimum de l'ensemble $S \subset \mathbb{R}$,*

   Le réel a est le plus grand *minorant* de l'ensemble S. Un *minorant* est un réel m tel que $m \leq s$ pour tout $s \in S$. Si S admet un minorant (on dit qu'il est minoré), alors il existe, par l'axiome de complétude, un minorant maximal a, c'est-à-dire que a est un minorant et $a \geq m$ pour tout minorant m de S. On note $a = \inf S$. Si S n'admet aucun minorant alors on pose $\inf S = -\infty$.

   b) ☐ /5 *la suite $(x_k) \subset \mathbb{R}$ n'est pas une suite de Cauchy,* en termes de ε, N,

   La suite (x_k) n'est pas de Cauchy s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout naturel N, il existe des naturels $m, n \geq N$ tels que $|x_m - x_n| \geq \varepsilon$.

   c) ☐ /5 *La fonction $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est uniformément continue,* en termes de ε, δ.

   La fonction f est uniformément continue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in E$ tels que $|x - y| < \delta$, on a $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. (La différence entre le continuité uniforme et la continuité est que δ ne dépend pas du point $x \in E$.)

2. ☐ /15 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(s) = \int_a^s f(t)dt.$$

   a) ☐ /10 Montrer que F est dérivable sur $[a, b]$ et que $F'(s) = f(s)$ pour tout $s \in [a, b]$.

Il s'agit du théorème fondamental de l'analyse. Soient $s \in [a,b]$ et $\varepsilon > 0$, on va montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que si $0 < |h| < \delta$ est tel que $s + h \in [a,b]$, alors

$$\left|\frac{F(s+h)-F(s)}{h} - f(s)\right| < \varepsilon.$$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(s+h)-F(s)}{h} - f(s)\right| &= \left|\frac{\int_a^{s+h} f(t)dt - \int_a^{s} f(t)dt}{h} - f(s)\right| \\
&= \left|\frac{\int_s^{a} f(t)dt + \int_a^{s+h} f(t)dt}{h} - \frac{hf(s)}{h}\right| \\
&= \left|\frac{\int_s^{s+h} f(t)dt}{h} - \frac{\int_s^{s+h} f(s)dt}{h}\right| \\
&= \left|\frac{\int_s^{s+h} f(t) - f(s)dt}{h}\right| \\
&\leq \frac{\int_s^{s+h} |f(t) - f(s)|dt}{h}.
\end{aligned}$$

Comme $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur un intervalle fermé et borné, f est aussi uniformément continue et il existe donc $\delta > 0$ tel que si $s, t \in [a,b]$ sont tels que $|s - t| < \delta$ alors $|f(t) - f(s)| < \varepsilon$. Supposons que h est tel que $0 < |h| < \delta$ et tel que $s + h \in [a,b]$. Alors on peut continuer la suite d'inégalités précédente :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(s+h)-F(s)}{h} - f(s)\right| &< \frac{\int_s^{s+h} \varepsilon dt}{h} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

b) $\boxed{\quad /5}$ Montrer par un contre-exemple explicite que ceci n'est plus vrai si f est seulement intégrable au sens de Riemann.

Voyons maintenant par un exemple qu'il existe des fonctions intégrables au sens de Riemann qui ne sont pas continues et pour lesquelles le théorème précédent n'est plus vrai. Un exemple très simple consiste à prendre la fonction $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ qui vaut 0 partout sauf en $t = 0$ où elle vaut 1. Cette fonction est intégrable au sens de Riemann car elle est continue sauf en un point. Elle n'est évidemment pas continue en 0. La fonction $F(s) = \int_{-1}^{s} f(t)dt$ est identiquement nulle et donc dérivable. Sa dérivée est la fonction identiquement nulle qui n'est donc pas égale à f en $t = 0$. Donc ici la fonction F est dérivable mais sa dérivée n'est pas égale partout à la fonction f.

Alternative : de façon plus intéressante, considérons une fonction en escalier, comme par exemple la fonction $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-1,0] \\ 0 & \text{si } t \in]0,1]. \end{cases}$$

Elle est aussi intégrable au sens de Riemann car c'est une fonction continue sauf en un point ($t = 0$). On peut donc définir $F(s) = \int_{-1}^{s} f(t)dt$ qui vaut $s + 1$ pour $s \in [-1,0]$ et 1 pour $s \in [0,1]$. Il est facile de vérifier que cette fonction est dérivable partout sauf en $t = 0$ car, en $t = 0$, la limite à gauche du quotient différentiel vaut 1, alors que la limite à droite vaut 0 (similaire au cas de la fonction $t \mapsto |t|$.)

3. $\boxed{\quad /10}$

a) $\boxed{\quad /5}$ Enoncer le théorème de la moyenne.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

b) $\boxed{\quad /5}$ On suppose que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable et telle que

$$f'(x) \geq e^x - x + 1$$

pour tout $x \in [0,1]$. Montrer que

$$f(1) \geq f(0) + 1.$$

En appliquant le théorème de la moyenne à la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ qui est bien continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$, on trouve un point $c \in]0,1[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = f(1) - f(0).$$

Comme, par hypothèse,

$$f'(c) \geq e^c - c + 1,$$

on a

$$f(1) \geq f(0) + e^c - c + 1.$$

Par ailleurs, on vérifie facilement que $e^c - c \geq 0$ pour $c \in [0,1]$: il suffit de voir que c'est vrai en $c = 0$ et que la fonction $g(c) = e^c - c$ est croissante puisque sa dérivée $g'(c) = e^c - 1$ est positive sur l'intervalle $[0,1]$. Dès lors,

$$f(1) \geq f(0) + e^c - c + 1 \geq f(0) + 1.$$

<u>Alternative :</u> il y a aussi moyen d'arriver à la même conclusion sans appliquer le théorème de la moyenne, en intégrant avec bornes (!) les deux membres de l'inégalité $f'(x) \geq e^x - x + 1$, ce qui donne :

$$\int_0^1 f'(x)dx \leq \int_0^1 (e^x - x + 1)dx$$

et donc

$$f(1) - f(0) \leq [e^x - \frac{x}{2} + x]_0^1 = (e - \frac{1}{2} + 1) - 1 = e - \frac{1}{2} \geq 1,$$

qui implique que $f(1) \geq f(0) + 1$.

BA1 en sciences mathématiques et physiques
Examen de Calcul Différentiel et Intégral — Math-F-101
(Prof. C. Azizieh et M. Bertelson)

Le 29 mai 2019

Matricule : .... Nom : ....

Section : .... Prénom : ....

Questions concernant le premier quadrimestre

- **Vous disposez d'une heure pour répondre à cette partie. Sachez que votre note de janvier sera annulée.**
- **Rédigez et justifiez soigneusement toutes vos réponses.**

1. $\boxed{/10}$ Rédiger soigneusement la définition de chaque énoncé ci-dessous.
   a) *La fonction* $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est uniformément continue*, en terme de ϵ, δ.
   b) *La suite* $(x_k)_k \subset \mathbb{R}$ *n'est pas convergente vers un nombre réel* en terme de ϵ, N.
2. $\boxed{/5}$ Enoncer, sans le démontrer, le théorème de Bolzano-Weierstrass.
3. $\boxed{/15}$ Déterminer parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses. Lorsqu'une assertion est vraie, donner une démonstration ; dans le cas contraire, donner un contre-exemple.
   a) Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ continue. Alors f est uniformément continue ;
   b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Alors f est bornée.
   c) Soit (x_n) une suite réelle bornée et monotone. Alors (x_n) est convergente.
4. $\boxed{/10}$ Déterminer si la suite
$$x_n = \frac{4^n + \cos(n\pi)}{3^n + (2n)!}$$
converge, et si oui, déterminer sa limite.
5. $\boxed{/10}$ Soit $f : \mathbb{R}^2 \to R$ définie par :
$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y > 0 \text{ et } x^2 < y < 2x^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
Montrer que f possède une dérivée directionnelle dans toutes les directions en $(0, 0)$, mais que f n'est pas continue en $(0, 0)$.

BA1 en sciences mathématiques et physiques
Examen de Calcul Différentiel et Intégral — Math-F-101
(Prof. C. Azizieh et M. Bertelson)

29 mai 2019

SOLUTIONS

Matricule : .... Nom : ....

Section : .... Prénom : ....

Questions concernant le second quadrimestre /70

- **Vous disposez de trois heures pour cette partie.**
- **Rédigez soigneusement et justifiez, sauf mention contraire, toutes vos réponses.**

1. /8 Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.

   a) /2 Quand dit-on que le point $a \in \mathbb{R}^n$ est adhérent à A ? Pouvez-vous donner un exemple de point adhérent à $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| < 1\}$?

   b) /2 Quand dit-on que A est connexe par arc ? L'ensemble $(-1, 0) \cup (0, 1) \subset \mathbb{R}$ est-il connexe par arc (ici $n = 1$) ?

   c) /4 Montrer que l'image d'un ensemble connexe par arc par une fonction continue est un ensemble connexe par arc.

2. /10 Considérons la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y) = \begin{cases} x^2y^2 & \text{si} \quad y > x^2 \\ xy & \text{si} \quad y \leq x^2 \end{cases}$$

   a) /4 En quels points de $\mathbb{R}^2$ cette fonction est-elle discontinue ? Justifiez soigneusement votre réponse.

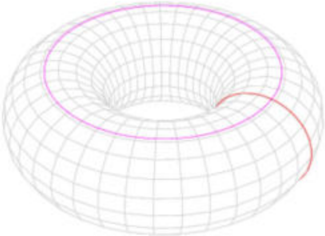
   b) /4 En quels points de $\mathbb{R}^2$ cette fonction est-elle différentiable ? Idem.

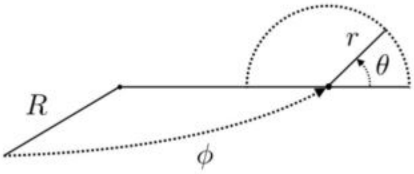
   c) /2 Calculer le gradient de f au point $(0, 1)$.

3. /10 Un tore dans $\mathbb{R}^3$ est une surface de révolution engendrée par la rotation d'un cercle C de rayon r autour d'un axe coplanaire et disjoint de ce cercle, à distance $R > r$ du centre du cercle. Une paramétrisation du tore (moins deux courbes) est donnée par

$$f : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) : (\phi, \theta) \mapsto ((R + r\cos\theta)\cos\phi, (R + r\cos\theta)\sin\phi, r\sin\theta),$$

où les angles ϕ, θ sont représentés dans la figure de droite ci-dessous.





a) $\boxed{\quad /3}$ Montrez que le vecteur normal unitaire sortant est donné par

$$n(f(\phi,\theta)) = (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, \sin\theta).$$

b) $\boxed{\quad /3}$ Donnez l'équation du plan tangent en un point du tore (sous la forme que vous voulez : paramétrique ou cartésienne).

c) $\boxed{\quad /4}$ Calculez la surface du tore.

4. $\boxed{\quad /8}$ Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, un domaine compact dont le bord $\partial\Omega$ est une surface différentiable et soient f, g deux fonctions à valeurs réelles de classe C^2 définies sur un ouvert qui contient $adh(\Omega)$.

a) $\boxed{\quad /4}$ Montrer que $div(g\nabla f) = g div(\nabla f) + < \nabla g, \nabla f >$.

b) $\boxed{\quad /4}$ En déduire que

$$\int_\Omega \Big(g div(\nabla f) - f div(\nabla g) \Big) = \int_{\partial\Omega} \Big(< g\nabla f, dn > - < f\nabla g, dn > \Big).$$

Vous pouvez utiliser un théorème du cours à condition de l'énoncer précisément en vérifiant que les hypothèses sont bien satisfaites.

5. $\boxed{\quad /12}$ Considérons la série

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \dots.$$

a) $\boxed{\quad /3}$ Donner explicitement la suite des sommes partielles $(s_n)_{n\geq 1}$ de cette série. En déduire que la série converge et donner sa somme.

b) $\boxed{\quad /3}$ Montrer que cette série ne converge pas absolument.

c) $\boxed{\quad /3}$ Enoncer le *théorème de réarrangement de Riemann.*

d) $\boxed{\quad /3}$ Montrer que le réarrangement suivant est divergent :

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{m\geq 0} \Big(\sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{k} - \frac{1}{m+2} \Big).$$

Aide : Montrer que la suite des sommes partielles associées $(\widetilde{s}_n)_{n\geq 1}$ n'est pas convergente puisque la sous-suite $(\widetilde{s}_{2^m+m+1})_{m\geq 0}$ n'est pas de Cauchy.

6. $\boxed{\quad /6}$ Soit $F : X \to X$, une application définie sur un sous-ensemble X de $\mathbb{R}^n$.

a) $\boxed{\quad /2}$ Quand dit-on que F est une contraction ? Donner un exemple.

b) $\boxed{\quad /4}$ Montrer que si F est une contraction, alors F a au plus un point fixe. La réciproque est-elle vraie ?

① (a) $a \in \mathbb{R}^n$ est adhérent à A si pour tout $\delta > 0$ il existe $x \in A$ tel que $\|x - a\| < \delta$

x_0 est un exemple de point adhérent à $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < 1\}$

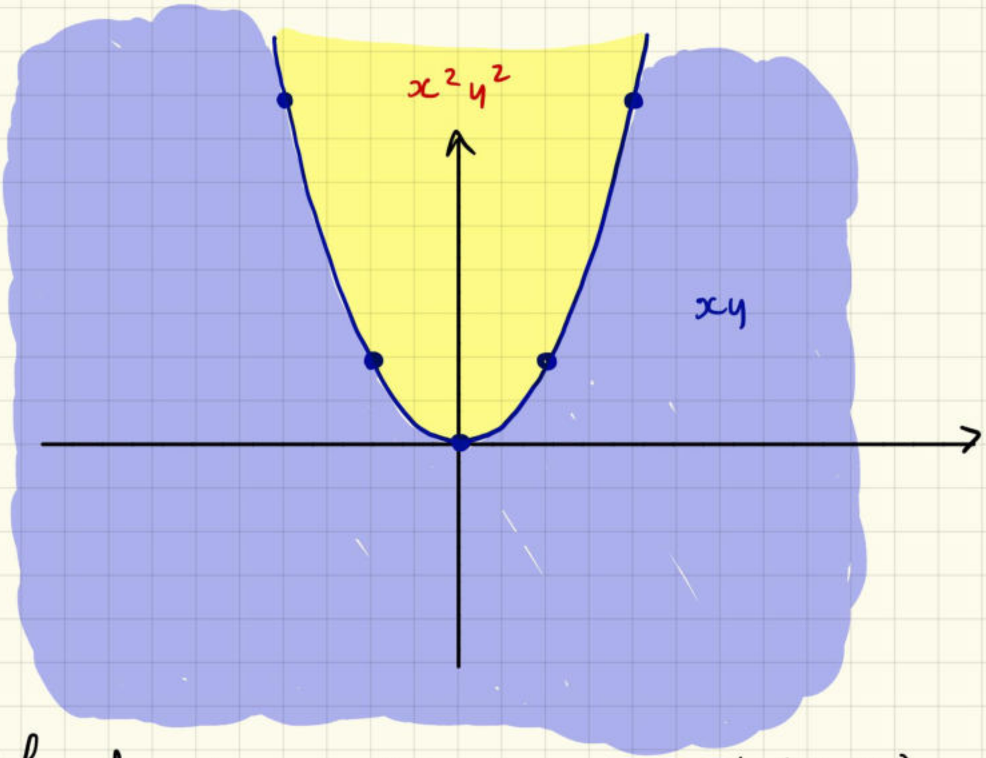
(b) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ est connexe par arcs si étant donnés deux points $p, q \in A$, il existe une application continue $\gamma : [0,1] \to A$ telle que $\gamma(0) = p$ et $\gamma(1) = q$.

(c) L'ensemble $(-1,0) \cup (0,1)$ n'est pas connexe par arc. S'il existait une application continue $\gamma : [0,1] \to (-1,0) \cup (0,1)$ telle que $\gamma(0) = \frac{-1}{2}$ et $\gamma(1) = \frac{1}{2}$ alors, par le théorème de la valeur intermédiaire, il existerait $x \in [0,1]$ tel que $\gamma(x) = 0 \notin (-1,0) \cup (0,1)$, une contradiction.

(d) Soit $f : A \to \mathbb{R}^m$ une fonction continue. Prenons p et q dans $f(A)$. Il existe a et b dans A tels que $p = f(a)$ et $q = f(b)$. Comme A est connexe par arcs, il existe une fonction continue $\gamma : [0,1] \to A$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$. Alors $f \circ \gamma : [0,1] \to f(A)$ est une fonction continue telle que $f \circ \gamma(0) = f(a) = p$ et $f \circ \gamma(1) = f(b) = q$ et $f(A)$ est donc connexe par arcs.

②

$$f(x,y) = \begin{cases} xy & \text{si } x^2 \geq y \\ x^2y^2 & \text{si } x^2 < y \end{cases}$$



(a) Les fonctions $(x,y) \longmapsto xy$ et $(x,y) \longmapsto x^2y^2$ sont C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ donc f est continue sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 < y\}$ et $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 > y\}$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(\alpha,\alpha^2)\\ y>x^2}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(\alpha,\alpha^2)} x^2y^2$$
$$= \alpha^6$$

$\alpha^6 = f(\alpha,\alpha^2) = \alpha^3$ si et seulement si $\alpha^3(\alpha^3-1) = 0$ c'est à dire si et seulement si $\alpha^3(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1) = 0$.

Comme $\alpha^2+\alpha+1 \neq 0$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, on a f continue en $(0,0)$ $(\alpha=0)$ et en $(1,1)$ et discontinue en (α,α^2) quand $\alpha \neq 0, 1$.

(b) Les fonctions $(x,y) \longmapsto xy$ et $(x,y) \longmapsto x^2y^2$ sont C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ donc f est différentiable sur $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2<y\}$ et $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2>y\}$.

Comme la fonction n'est pas continue aux points de la forme (α, α^2) quand

$\alpha \neq 0,1$, elle ne peut pas être différentiable

f est-elle différentiable en $(1,1)$?

$$\partial_{(0,1)} f(1,1) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{f((1,1)+h(0,1)) - f(1,1)}{h}$$

$$= \lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{f(1,h+1)-1}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{(h+1)^2-1}{h}$$

$$= \lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{h^2+2h}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} (h+2) = 2$$

$$\partial_{(0,-1)} f(1,1) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{f(1,1-h)-1}{h}$$

$$= \lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{(1-h)-1}{h} = -1$$

Donc $\partial_{(0,-1)} f(1,1) = -1 \neq -2 = -\partial_{(0,1)} f(1,1)$

et f n'est pas différentiable en $(1,1)$.

f est-elle différentiable en (0,0)?

$$\nabla f(0,0) = \left(\frac{\partial(xy)}{\partial x}(0,0), \frac{\partial(x^2y^2)}{\partial y}(0,0) \right) = (0,0)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \langle \nabla f(0,0), (x,y)-(0,0) \rangle}{\|(x,y)-(0,0)\|}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y\leq x^2}} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 & (1) \\[2ex] \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y> x^2}} \dfrac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 & (2) \end{cases}$$

(1)

$$0 \leq \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

(2)

$$0 \leq \frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{(x^2+y^2)^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{(x^2+y^2)^3} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

f est différentiable en $(0,0)$.

③ $\frac{\partial f}{\partial \phi} \times \frac{\partial f}{\partial \theta}$

$$= \begin{pmatrix} -(R+r\cos\theta)\sin\phi \\ (R+r\cos\theta)\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\theta\cos\phi \\ -r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \big(r(R+r\cos\theta)\cos\theta\cos\phi, r(R+r\cos\theta)\cos\theta\sin\phi,$$
$$r(R+r\cos\theta)\sin\theta\sin^2\phi + r(R+r\cos\theta)\sin\theta\cos^2\phi\big)$$

$$= r(R+r\cos\theta)\big(\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, \sin\theta\big)$$

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial \phi} \times \frac{\partial f}{\partial \theta} \right\|$$
$$= r|R+r\cos\theta| \sqrt{\cos^2\theta\cos^2\phi + \cos^2\theta\sin^2\phi + \sin^2\theta}$$
$$= r|R+r\cos\theta| \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}$$

(comme $\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$)

$$= r|R+r\cos\theta|$$

(comme $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$)

$= r(R + r\cos\theta)$

(comme $R > r$ et donc

$R + r\cos\theta \geq R + r(-1) = R - r > 0$)

Donc

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial \phi} \times \frac{\partial f}{\partial \theta}}{\left\| \frac{\partial f}{\partial \phi} \times \frac{\partial f}{\partial \theta} \right\|} = (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, \sin\theta)$$

Ce vecteur est soit entrant soit sortant. En $\phi = \pi = \theta$, on a $(1, 0, 0)$ au point $(r - R, 0, 0)$ (un point de l'intérieur du tore). Il s'agit donc bien d'un vecteur sortant.

(b)
$$(\lambda, \mu \in \mathbb{R}) \begin{cases} x = (R + r\cos\theta)\cos\phi - \lambda(R + r\cos\theta)\sin\phi - \mu r\sin\theta\cos\phi \\ y = (R + r\cos\theta)\sin\phi + \lambda(R + r\cos\theta)\cos\phi - \mu r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\sin\theta + \mu r\cos\theta \end{cases}$$

$\cos\theta\cos\phi\, x + \cos\theta\sin\phi\, y + \sin\theta\, z + d = 0$

où $d = -(R + r\cos\theta)\cos\theta\cos^2\phi - (R + r\cos\theta)\cos\theta\sin^2\phi$
$- r\sin^2\theta$

$= -(R + r\cos\theta)\cos\theta - r\sin^2\theta$

(comme $\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$)

$= -R\cos\theta - r\cos^2\theta - r\sin^2\theta$

(comme $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$)

$= -R\cos\theta - r = -(R\cos\theta + r)$

Donc

$\cos\theta\cos\phi\, x + \cos\theta\sin\phi\, y + \sin\theta\, z - R\cos\theta - r = 0$

(c) Surface du tore

1

$= \iint_T 1 \, d\sigma$ (où T est le tore paramétré)

$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left\| \frac{\partial f}{\partial \phi} \times \frac{\partial f}{\partial \theta} \right\| d\phi\, d\theta$

$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r(R + r\cos\theta)\, d\phi\, d\theta$

$$=2\pi\int_0^{2\pi}(rR+r^2\cos\theta)\,d\theta$$

$$=2\pi\left[rR\theta+r^2\sin\theta\right]_{0=\theta}^{2\pi}$$

$$=2\pi\left(2\pi rR\right)=4\pi^2rR$$

④ (a) $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$

$$\nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z} \right)$$

$$\operatorname{div}(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Donc $g \operatorname{div}(\nabla f) + \langle \nabla g, \nabla f \rangle$

$$= g\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + g\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + g\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial g}{\partial z}$$

$$= g\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}(g)\frac{\partial f}{\partial x} + g\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(g)\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$+ g\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}(g)\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(g\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(g\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(g\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$= \operatorname{div}\left(g\frac{\partial f}{\partial x}, g\frac{\partial f}{\partial y}, g\frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

$= \operatorname{div}(g \nabla f)$, comme requis.

(b) Théorème de la divergence :
Soit Ω un domaine borné, fermé et régulier de $\mathbb{R}^3$ dont le bord est une surface différentiable par morceaux. Si F est un champ de vecteurs de classe C^1 sur un ouvert contenant $\Omega \cup \partial\Omega$ alors
$$\iiint_\Omega \operatorname{div} F \, d(x,y,z) = \iint_{\partial\Omega} \langle F, dn \rangle$$
où $\partial\Omega$ est orienté de telle sorte que le vecteur normal unitaire soit extérieur.

Si Ω est compact, il est borné et fermé. Comme son bord est différentiable, Ω est régulier. Si $\partial\Omega$ est différentiable, elle est forcément différentiable par morceaux. Si f et g sont C^2 alors

∇f et ∇g sont de classe C^1 et donc $g\nabla f - f\nabla g$ est de classe C^1.
Le théorème de la divergence s'applique et on a

$$\iint_{\partial\Omega} \langle g\nabla f, dn\rangle - \langle f\nabla g, dn\rangle$$

$$= \iint_{\partial\Omega} \langle g\nabla f - f\nabla g, dn\rangle$$

$$= \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(g\nabla f - f\nabla g)\, d(x,y,z)$$

$$= \iiint_{\Omega} \left(\operatorname{div}(g\nabla f) - \operatorname{div}(f\nabla g)\right) d(x,y,z)$$

$$= \iiint_{\Omega} \Big(g\operatorname{div}(\nabla f) + \langle \nabla g, \nabla f\rangle - \left(f\operatorname{div}(\nabla g) + \langle \nabla f, \nabla g\rangle\right)\Big) d(x,y,z)$$

$$= \iiint_{\Omega} \left(g\operatorname{div}(\nabla f) - f\operatorname{div}(\nabla g)\right) d(x,y,z)$$

5. /12 Considérons la série

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+....$$

a) /3 Donner explicitement la suite des sommes partielles $(s_n)_{n\geq 1}$ de cette série. En déduire que la série converge et donner sa somme.

b) /3 Montrer que cette série ne converge pas absolument.

c) /3 Enoncer le *théorème de réarrangement de Riemann.*

d) /3 Montrer que le réarrangement suivant est divergent :

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+.... = \sum_{m\geq 0}(\sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}}\frac{1}{k}-\frac{1}{m+2}).$$

Aide : Montrer que la suite des sommes partielles associées $(\widetilde{s}_n)_{n\geq 1}$ n'est pas convergente puisque la sous-suite $(\widetilde{s}_{\cancel{2^m+m+1}})_{m\geq 0}$ n'est pas de Cauchy.

2^m+m-1] Le total a été fait sur 50 (au lieu de 54) pour que cette erreur ne vous pénalise pas.

(a)

$$S_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{2}{n+3} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

On a $\lim_{n\to\infty} S_n = 0$ donc la série converge avec somme 0.

(b) La série $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\cdots$

$$= \frac{2}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\cdots = \sum_{k\geqslant 2}\frac{2}{k}$$

ne converge pas puisque

$\frac{2}{k} \geqslant \frac{1}{k} \quad \forall\, k \geqslant 2$ et $\sum_{k\geqslant 2}\frac{1}{k}$ diverge

(comparaison)

(c) Théorème de réarrangement de Riemann :

Soit $(a_k)_k \subseteq \mathbb{R}$. Si $\sum_k a_k$ converge mais ne converge pas absolument alors pour tout $s \in \mathbb{R}$ il existe un réarrangement de la série dont la somme vaut s. De plus, il existe un réarrangement divergent.

(d) On considère le réarrangement

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc} 1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13&14&15&16&17&18&19 \\ \hline \end{array}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}}_{2^0} - \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{2^1} - \frac{1}{3} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{2^2} - \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}}_{2^4} - \frac{1}{5}$$

On a $2^m + m - 1 = \sum_{k=0}^{m-1} 2^k + 1 + m - 1 = \sum_{k=0}^{m-1} 2^k + m$

Pour $m = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$, $2^m + m - 1 = 0, 2, 5, 10, 19, \dots$

On voit que ceci correspond aux termes négatifs du réarrangement.

$$|\tilde{S}_{2^{m+1}+(m+1)-1} - \tilde{S}_{2^m+m-1}|$$

$$= \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{k} - \frac{1}{m+2}$$

$$\geqslant \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{2^{m+1}} - \frac{1}{m+2} \quad \left(\text{car } \frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2^{m+1}} \ \forall \ k \in \{2^m+1, \dots, 2^{m+1}\} \right.$$

$$= \frac{1}{2^{m+1}} \left(2^{m+1} - 2^m\right) - \frac{1}{m+2}$$

$$= \frac{2^m}{2^{m+1}} - \frac{1}{m+2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}$$

$$\geqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad \forall \ m \geqslant 1$$

Il suit que $\tilde{S}_{2^m+m-1}$ n'est pas une suite de Cauchy et donc elle ne peut pas converger. Donc $\tilde{S}_n$ possède une sous-suite divergente et ainsi est divergente.

En conclusion, le réarrangement

diverge.

⑥

(a) F est une contraction s'il existe $\alpha \in [0,1)$ tel que

$\|F(x) - F(y)\| \leq \alpha \|x-y\|$

$\forall x, y \in X$.

Exemple: $n = 1$

$X = \mathbb{R}$

$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 0$

(b) Supposons que $F(x) = x$ et $F(y) = y$ pour $x, y \in X$. On a alors

$\|x-y\| = \|F(x) - F(y)\| \leq \alpha \|x-y\|$ ⊛

Si $x \neq y$ alors $\|x-y\| \neq 0$ et ⊛ donne $\alpha \geq 1$, une contradiction.

Donc $x = y$ et F ne peut avoir plus d'un point fixe.

Considérons la fonction

$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \longmapsto 2x$

Alors n'a qu'un seul point fixe : $x = 0$. De plus $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$

$$\| F(x) - F(y) \| = \| 2x - 2y \|$$
$$= 2 \| x - y \|$$

et donc F n'est pas une contaction. La fonction n'est donc pas une contaction. La réciproque n'est donc pas vraie.

Calcul différentiel et intégral 1
MATH-F-101

Interrogation de novembre 2019

Le 29 octobre 2019

- **Aucun appareil électronique (calculatrice, GSM, . . .) n'est autorisé.**

- **Veuillez commencer chaque question sur une nouvelle feuille.**

- **Ecrivez CLAIREMENT vos nom et prénom EN MAJUSCULES sur chaque feuille rendue.**

- **Justifiez soigneusement toutes vos réponses. Vous pouvez utiliser tous les résultats vus au cours à condition de les énoncer clairement et de vérifier que les hypothèses sont satisfaites**

1. /10 Considérons l'équation différentielle suivante :

$$f''(x)-5f'(x)+6f(x)=4xe^{x} \tag{1}$$

   (a) /2 Trouver une solution f_o de cette équation du type $f_o(x)=(ax+b)e^{x}$.

   (b) /2 Montrer que la fonction f est une solution de l'equation (1) si et seulement si la fonction $g=f-f_o$ est une solution de l'équation homogène $g''(x)-5g'(x)+6g(x)=0$.

   (c) /2 Trouver toutes les solutions de l'équation $g''(x)-5g'(x)+6g(x)=0$.

   (d) /2 En déduire toutes les solutions de l'équation (1).

   (e) /2 Trouver l'unique solution de l'équation (1) qui satisfait $f(0)=1$ et $f'(0)=0$.

2. /10

   (a) /2 Définir les notions d'infimum et de supremum d'un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ et les illustrer sur un exemple.

   (b) /2 Enoncer l'axiome de complétude des réels.

   (c) /4 Montrer que $\sqrt{5}$ est un nombre irrationnel.

   (d) /2 Quels sont les tous les nombres naturels n tels que $\sqrt{n}$ est irrationnel ? Pourquoi ?

3. /12 Déterminez si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Pour chacune d'elles, si elle est vraie, donnez-en une preuve, si elle est fausse, décrivez un contre-exemple.

   (a) /2 Une suite de Cauchy est bornée.

   (b) /2 Une suite croissante est minorée.

   (c) /2 Une suite convergente (x_n) est nécessairement monotone à partir d'un certain indice (i.e. la suite $(x_n)_{n\geq N}$ est monotone pour un certain $N\in\mathbb{N}$).

   (d) /2 Si la suite (x_n) est croissante et si les termes de la suite (y_n) sont tels que $y_n\geq x_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, alors la suite (y_n) est aussi croissante.

   (e) /2 Pour une suite (x_n), si la suite $(|x_n|)$ converge, alors la suite (x_n) converge aussi.

   (f) /2 Pour une suite (x_n), si la suite $(|x_n|)$ converge vers 0, alors la suite (x_n) converge aussi vers 0.

4. /8 Etudiez la convergence des suites ci-dessous et déterminez leur limite si elle existe. Invoquez les résultats du cours pour justifier vos conclusions.

   (a) /2 $x_n=2^n-3^n+4^n$

   (b) /2 $x_n=\dfrac{2^n+(-1)^n n!}{n^3+3^n+n!}$

   (c) /2 $x_n=\dfrac{(n+2)!}{(n^2+1)\cdot n!}$

   (d) /2 Sachant que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$, en déduire la limite de la suite $x_n=\left(1+\dfrac{1}{3n}\right)^n$.

Calcul différentiel et intégral 1
MATH-F-101

Interrogation de novembre 2019

Le 29 octobre 2019

- **Aucun appareil électronique (calculatrice, GSM, ...) n'est autorisé.**

- **Veuillez commencer chaque question sur une nouvelle feuille.**

- **Ecrivez CLAIREMENT vos nom et prénom EN MAJUSCULES sur chaque feuille rendue.**

- **Justifiez soigneusement toutes vos réponses. Vous pouvez utiliser tous les résultats vus au cours à condition de les énoncer clairement et de vérifier que les hypothèses sont satisfaites**

1. $\boxed{/10}$ Considérons l'équation différentielle suivante :

$$f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) = 4xe^x \tag{1}$$

(a) $\boxed{/2}$ Trouver une solution f_o de cette équation du type $f_o(x) = (ax+b)e^x$.

On calcule

$$\begin{array}{l} f_o'(x) = ae^x + (ax+b)e^x = (ax+a+b)e^x \\ f_o''(x) = (ax+2a+b)e^x \\ f_0''(x) - 5f_o'(x) + 6f_o(x) = (2ax-3a+2b)e^x \end{array}$$

Donc f_o satisfait l'équation si et seulement si $(2ax-3a+2b)e^x = 4xe^x$, c'est-à-dire si et seulement si $2a = 4$ et $-3a+2b = 0$. On trouve donc $f_o(x) = (2x+3)e^x$.

(b) $\boxed{/2}$ Montrer que la fonction f est une solution de l'equation (1) si et seulement si la fonction $g = f - f_o$ est une solution de l'équation homogène $g''(x) - 5g'(x) + 6g(x) = 0$.

Supposons que f est solution de (1). Alors, comme f_o est aussi solution de (1), on a $f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) = 4xe^x$ et $f_o''(x) - 5f_o'(x) + 6f_o(x) = 4xe^x$, ce qui implique que

$$\begin{array}{rcl} g''(x) - 5g'(x) + 6g(x) & = & f''(x) - f_o''(x) - 5(f'(x) - f_o'(x)) + 6(f(x) - f_o(x)) \\ & = & f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) - (f_o''(x) - 5f_o'(x) + 6f_o(x)) \\ & = & 4xe^x - 4xe^x = 0. \end{array}$$

Inversement, si g satisfait $g''(x) - 5g'(x) + 6g(x) = 0$, alors la fonction $f = g + f_o$ est une solution de l'équation (1). En effet,

$$\begin{array}{rcl} f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) & = & g''(x) + f_o''(x) - 5(g'(x) + f_o'(x)) + 6(g(x) + f_o(x)) \\ & = & g''(x) - 5g'(x) + 6g(x) + f_o''(x) - 5f_o'(x) + 6f_o(x) \\ & = & 4xe^x. \end{array}$$

(c) $\boxed{/2}$ Trouver toutes les solutions de l'équation $g''(x) - 5g'(x) + 6g(x) = 0$.

Il s'agit d'une équation du second ordre linéaire à coefficients constants, de polynôme caractéristique $t^2 - 5t + 6$ qui admet 2 et 3 comme racines. Ce sont donc deux racines réelles distinctes et les fonctions e^{2x} et e^{3x} sont dès lors des solutions, comme prédit par la théorie (cf. Chapitre 1, Section 2.2) et comme on le vérifie facilement. Les solutions sont donc toutes les combinaisons linéaires à coefficients réels de ces deux solutions, c'est-à-dire les fonctions

$$c_1e^{2x} + c_2e^{3x},$$

avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(d) $\boxed{/2}$ En déduire toutes les solutions de l'équation (1).

Par le point b), ce sont les toutes les fonctions du type $g + f_o$, où g est solution de l'équation homogène $g''(x) - 5g'(x) + 6g(x) = 0$, c'est-à-dire les fonctions

$$f(x) = (2x+3)e^x + c_1e^{2x} + c_2e^{3x},$$

où $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(e) $\boxed{\quad /2}$ Trouver l'unique solution de l'équation (1) qui satisfait $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

Il s'agit de déterminer c_1 et c_2 pour que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$, où $f(x) = (2x+3)e^x + c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$. On calcule

$$\begin{aligned} &f(0) = 3 + c_1 + c_2 \\ &f'(x) = (2x+5)e^x + 2c_1 e^{2x} + 3c_2 e^{3x} \\ &f'(0) = 5 + 2c_1 + 3c_2, \end{aligned}$$

ce qui implique que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$ si et seulement si $c_1 = -1$ et $c_2 = -1$. Donc

$$f(x) = (2x+3)e^x - e^{2x} - e^{3x}.$$

2. $\boxed{\quad /10}$

(a) $\boxed{\quad /2}$ Définir les notions d'infimum et de supremum d'un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ et les illustrer sur un exemple.

On dit que A est *minoré* s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $a \geq m$ pour tout $a \in A$. Un tel nombre m est appelé un *minorant de A*. Si A est minoré, *l'infimum de A*, noté $\inf A$, est le minorant maximal m de A, si il existe. Ceci signifie que

- $\inf(A)$ est un minorant de A
- $\inf(A) \geq m$ pour tout autre minorant m de A.

Si A n'est pas minoré, alors on pose $\inf(A) = -\infty$.

De même, on dit que A est *majoré* s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $a \leq M$ pour tout $a \in A$. Un tel nombre M est appelé un *majorant de A*. Si A est majoré, le supremum de A, noté $\sup(A)$ est le majorant minimal M de A, s'il existe. Ceci signifie que

- $\sup(A)$ est un majorant de A
- $\sup(A) \leq M$ pour tout autre majorant M de A.

Si A n'est pas majoré, alors on pose $\sup(A) = \infty$.

(b) $\boxed{\quad /2}$ Enoncer l'axiome de complétude des réels.

Tout sous-ensemble non-vide et minoré de $\mathbb{R}$ possède un infimum et tout sous-ensemble non-vide et majoré de $\mathbb{R}$ possède un supremum.

(c) $\boxed{\quad /4}$ Montrer que $\sqrt{5}$ est un nombre irrationnel.

Supposons au contraire que $\sqrt{5}$ soit rationnel, autrement dit, que $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$, où a et b sont des entiers premiers entre eux et $b \neq 0$. Alors $5b^2 = a^2$, c'est-à-dire que 5 divise a^2. L'entier a^2 a donc 5 dans sa décomposition en facteurs premiers, ce qui implique que a aussi car les facteurs premiers de a et de a^2 sont les même. On peut donc écrire $a = 5a'$, ce qui implique que $b^2 = 5a'^2$ et donc que 5 divise b^2 et aussi b par le même raisonnement. l'entier 5 divise donc à la fois a et b, ce qui entre en contradiction avec l'hypothèse que a et b sont premiers entre eux.

(d) /2 Quels sont les tous les nombres naturels n tels que $\sqrt{n}$ est irrationnel ? Pourquoi ?

On voit que si $n = m^2$ pour un certain $m \in \mathbb{Z}$ (on dit que n est *un carré*), alors $\sqrt{n}$ est un nombre naturel et donc un rationnel. Nous prétendons que dans tous les autres cas, $\sqrt{n}$ est irrationnel. En effet, si n n'est pas un carré, considérons le plus grand carré m^2 qui divise n, c'est-à-dire que $n = m^2 \cdot k$ où k n'est pas divisé par un carré, à part par 1. Alors $n = m\sqrt{k}$ et il suffit de montrer que $\sqrt{k}$ est irrationnel.

La décomposition en nombres premiers de k est un produit de nombres premiers distincts $k = p_1 ... p_k$. Procédons de nouveau par l'absurde et supposons que $\sqrt{k} = \frac{a}{b}$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ et pgcd(a, b) = 1. Alors $kb^2 = a^2$, ce qui implique que k et donc chaque p_j divise a^2. Donc chaque p_j divise a et on peut donc écrire $a = ka'$, ce qui implique que $kb^2 = k^2 a'^2$, ou encore que $b^2 = ka'^2$. Par le même raisonnement, k divise b et donc a et b ne seraient pas premiers entre eux, contrairement à l'hypothèse de départ. Ceci implique donc que $\sqrt{k}$ est irrationnel.

3. /12 Déterminez si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Pour chacune d'elles, si elle est vraie, donnez-en une preuve, si elle est fausse, décrivez un contre-exemple.

(a) /2 Une suite de Cauchy est bornée.

C'est vrai car si (x_n) est une suite de Cauchy, alors pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - x_m| < \varepsilon$ pour tous $n, m \geq N$. Prenons par exemple $\varepsilon = 1$. Alors l'inégalité triangulaire implique que

$$|x_n| \leq |x_n - x_N| + |x_N| < 1 + |x_N|,$$

pour tout $n \geq N$. Alors le nombre

$$K = \max\{|x_0|, ..., |x_{N-1}|, 1 + |x_N|\}$$

est une borne pour tous les termes de la suite.

(b) /2 Une suite croissante est minorée.

C'est vrai car si (x_n) est croissante, alors $x_n \geq x_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (à prouver par récurrence) et x_0 est donc un minorant.

(c) /2 Une suite convergente (x_n) est nécessairement monotone à partir d'un certain indice (i.e. la suite $(x_n)_{n \geq N}$ est monotone pour un certain $N \in \mathbb{N}$).

C'est faux car la suite $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ converge vers 0 puisque la suite $|x_n| = \frac{1}{n}$ converge 0 mais elle n'est pas monotone à partir d'un certain indice puisque $x_{2n} = \frac{1}{2n} > x_{2n+1} = -\frac{1}{2n+1} < x_{2n+2} = \frac{1}{2n+2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(d) /2 Si la suite (x_n) est croissante et si les termes de la suite (y_n) sont tels que $y_n \geq x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la suite (y_n) est aussi croissante.

C'est faux car la suite $x_n = 0$ est croissante (les suites constantes sont à la fois croissantes et décroissantes) et la suite $(y_n = 1 + (-1)^n \frac{1}{n})$ est à termes positifs et satisfait donc l'inégalité $y_n \geq x_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par contre, la suite (y_n) n'est pas croissante.

(e) $\boxed{\quad /2}$ Pour une suite (x_n), si la suite $(|x_n|)$ converge, alors la suite (x_n) converge aussi.

C'est faux comme le montre la célèbre suite $(-1)^n$!

(f) $\boxed{\quad /2}$ Pour une suite (x_n), si la suite $(|x_n|)$ converge vers 0, alors la suite (x_n) converge aussi vers 0.

C'est vrai car si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $||x_n| - 0| = |x_n| \leq \varepsilon$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - 0| = |x_n| \leq \varepsilon$.

4. $\boxed{\quad /8}$ Etudiez la convergence des suites ci-dessous et déterminez leur limite si elle existe. Invoquez les résultats du cours pour justifier vos conclusions.

(a) $\boxed{\quad /2}$ $x_n = 2^n - 3^n + 4^n$

Il s'agit, à priori, d'une indétermination puisque 2^n et 4^n tendent vers l'infini lorsque n tend vers l'infini, alors que -3^n tend vers moins l'infini. On voit cependant que

$$2^n - 3^n + 4^n = \frac{4^n}{4^n}(2^n - 3^n + 4^n) = 4^n \left(\frac{2^n - 3^n + 4^n}{4^n} \right) = 4^n \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n - \left(\frac{3}{4} \right)^n + 1 \right).$$

Comme $\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{3}{4}\right)^n + 1$ tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini (cf. Proposition 2.10 du Chapitre 3), et que 4^n tend vers l'infini, on en conclut que la suite initiale tend vers l'infini lorsque n tend vers l'infini.

(b) $\boxed{\quad /2}$ $x_n = \dfrac{2^n + (-1)^n n!}{n^3 + 3^n + n!}$

Cette suite diverge. En effet, elle possède deux sous-suites qui convergent vers des nombres distincts (et on invoque le Corollaire 3.6 du Chapitre 3), à savoir la suite

$$x_{2n} = \frac{2^{2n} + (2n)!}{(2n)^3 + 3^{2n} + (2n)!}$$

et la suite

$$x_{2n+1} = \frac{2^{2n+1} - (2n+1)!}{(2n+1)^3 + 3^{2n+1} + (2n+1)!}.$$

La première suite est une sous-suite de la suite

$$a_n = \frac{2^n + n!}{n^3 + 3^n + n!},$$

tandis que la seconde est une sous-suite de la suite

$$b_n = \frac{2^n - n!}{n^3 + 3^n + n!}.$$

Le terme dominant de chacune de ces suites est $n!$ et en divisant numérateur et dénominateur par $n!$, on voit que

$$a_n = \frac{\frac{2^n}{n!}+1}{\frac{n^3}{n!}+\frac{3^n}{n!}+1},$$

qui converge vers 1 (cf. Proposition 2.10 du Chapitre 3), tandis que

$$b_n = \frac{\frac{2^n}{n!}-1}{\frac{n^3}{n!}+\frac{3^n}{n!}+1},$$

qui converge vers -1 (cf. Proposition 2.10 du Chapitre 3). Cela implique que x_{2n} converge vers 1 aussi, alors que x_{2n+1} converge vers -1 (cf. Lemme 3.5 du Chapitre 3).

(c) $\boxed{\quad /2}$ $x_n = \dfrac{(n+2)!}{(n^2+1)\cdot n!}$

$$\frac{(n+2)!}{(n^2+1)\cdot n!} = \frac{(n+2)(n+1)}{(n^2+1)} = \frac{n^2+3n+1}{n^2+1}.$$

Le terme dominant est donc n^2 et en divisant la dénominateur et le numérateur de cette dernière fractions par ce terme, on obtient

$$\frac{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}},$$

qui converge vers 1 (cf. Proposition 2.10 du Chapitre 3).

(d) $\boxed{\quad /2}$ Sachant que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$, en déduire la limite de la suite $x_n = \left(1+\dfrac{1}{3n}\right)^n$.

La suite

$$\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}$$

est la sous-suite y_{3n} de la suite

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Elle converge donc vers e aussi (cf. Lemme 3.5 du Chapitre 3). Or les égalités

$$\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n = \left(\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}\right)^{\frac{1}{3}} = y_{3n}^{\frac{1}{3}},$$

montrent que notre suite converge vers $e^{\frac{1}{3}}$ par la *Règle de l'exponentielle* (Proposition 2.8 du Chapitre 3).

Calcul différentiel et intégral 1
MathF101

Examen de janvier 2020

NOM et PRÉNOM : **MATRICULE :**

- **Aucun appareil électronique (calculatrice, GSM, . . .) n'est autorisé.**

- **Veuillez commencer chaque question sur une nouvelle feuille.**

- **Ecrivez clairement vos nom et prénom EN MAJUSCULES sur chaque feuille rendue.**

- **Justifiez soigneusement toutes vos réponses. Vous pouvez utiliser tous les résultats vus au cours à condition de les énoncer clairement et de vérifier que les hypothèses sont satisfaites**

1. /24

2. /16

3. /12

4. /16

5. /16

Tot : /80

TOT : /20

NOM et PRÉNOM : **MATRICULE :**

Question 1 (24 points)

Pour chacun des énoncés suivants, dire s'il est vrai ou faux. Dans le premier cas, écrire une démonstration, dans le second donner un contre-exemple et démontrer qu'il s'agit d'un contre-exemple.

1. **(4 points)** Toute suite bornée converge.
2. **(4 points)** Toute suite décroissante converge.
3. **(4 points)** Toute fonction f telle qu'il existe $L \geq 0$ pour lequel $|f(x)-f(y)| \leq L|x-y|$ pour tout $x, y \in \text{dom}(f)$ est continue.
4. **(4 points)** La fonction $|x|\sin(x)$ est dérivable en 0.
5. **(4 points)** La suite définie récursivement par $u_{n+1} = 2u_n - 1$, $u_0 = a$ converge si et seulement si $a = 1$.
6. **(4 points)** La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en a si pour tout réel $\spadesuit > 0$ il existe un réel $\blacksquare > 0$ tel que $|x - a| < \spadesuit$ implique $|f(x) - f(a)| < \blacksquare$.

NOM et PRÉNOM : **MATRICULE :**

Question 2 (16 points)

1. **(4 points)** Etant donné une fonction bornée $g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, quand dit-on que l'intégrale $\int_a^\infty g(x)dx$ converge (énoncer toutes les conditions) ?
2. **(4 points)** Quelles sont les valeurs de $\alpha > 0$ pour lesquelles l'intégrale $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge/diverge ?
3. **(4 points)** Considérons la fonction
$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$
Montrer qu'il existe une fonction continue $\overline{f} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ telle que $\overline{f}(x) = f(x)$ pour tout $x \in (0, \infty)$.
4. **(4 points)** Montrer que l'intégrale
$$\int_0^\infty \overline{f}(x) dx$$
converge en traitant séparément les intégrales $\int_0^1 \overline{f}(x)dx$ et $\int_1^\infty \overline{f}(x)dx$. L'intégration par parties pourrait vous être utile.

   (Commentaire : On peut montrer que $\int_0^\infty \overline{f}(x)dx$ converge vers $\frac{\pi}{2}$, ce qui fournit une méthode de calcul des décimales de π.)

NOM et PRÉNOM : **MATRICULE :**

Question 3 (12 points)

1. **(4 points)** Donner la définition d'adhérence d'un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$.
2. **(4 points)** Montrer que $x \in \mathrm{adh}(A)$ si et seulement s'il existe une suite (a_n) de points de A qui converge vers x.
3. **(4 points)** Soit
$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \cos\left(\frac{1}{x-1}\right)$$
et considérons le sous-ensemble $A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$. Déterminer l'ensemble des points qui sont dans adh(A) mais pas dans A. Justifier soigneusement.

NOM et PRÉNOM : **MATRICULE :**

Question 4 (16 points)

1. **(8 points)** Enoncer et démontrer le théorème de la moyenne.
2. **(8 points)** On veut montrer que pour tout réel strictement positif x, on a les inégalités suivantes :

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}. \tag{1}$$

   (a) **(4 points)** Montrer que (1) est équivalente à

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1)-\ln(x) < \frac{1}{x}. \tag{2}$$

   (b) **(4 points)** Montrer que (2) est toujours vraie et conclure.

NOM et PRÉNOM : **MATRICULE :**

Question 5 (16 points)

1. **(4 points)** Enoncer la définition de continuité uniforme d'une fonction.
2. **(4 points)** Montrer que la fonction $f : [0, \infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur l'intervalle $[0, 1]$.
3. **(4 points)**
   1. **(2 points)** Montrer que pour tous x, y dans $[1, +\infty)$,

      $$\left|\sqrt{y} - \sqrt{x}\right| \leq \frac{1}{2}|y - x|.$$

   2. **(2 points)** En déduire que f est uniformément continue sur $[1, +\infty)$.
4. **(4 points)** Montrer que f est uniformément continue sur $[0, +\infty)$.

Aide : il faut considérer 3 cas :
i) x *et* y *dans* $[0, 1]$*;*
ii) x *et* y *dans* $[1, +\infty)$*;*
iii) $x \leq 1 \leq y$ *(le cas* $y \leq 1 \leq x$ *se traite de la même manière).*

Examen Janvier 2020 CDI 1 : correction

Dimtri Konen

Question 1

1. Faux : la suite $x_n = (-1)^n$ est bornée mais ne converge pas ;
2. Faux : la suite $x_n = -n$ est décroissante mais ne converge pas vers un nombre réel ;
3. Vrai : Soit $\epsilon > 0$. Posons $\delta = \varepsilon/L$. Pour tous $x, y \in \text{dom(f)}$ tels que $|x-y| < \delta$, alors $|f(x) - f(y)| \leq L|x-y| \leq L\delta = L\ \varepsilon/L = \varepsilon$;
4. Vrai : Posons $f(x) = |x|\sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a $f(0) = 0$. On calcule
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|\sin(x)}{x}.$$
Observons que pour tout $x \neq 0$, on a
$$0 \leq \left|\frac{|x|\sin(x)}{x}\right| \leq |\sin(x)|.$$
De plus, $|\sin(x)| \to 0$ lorsque $x \to 0$. On conclut par le théorème du sandwich que $\left|\frac{|x|\sin(x)}{x}\right| \to 0$ lorsque $x \to 0$. Ceci implique que $\frac{|x|\sin(x)}{x} \to 0$ lorsque $x \to 0$. On en conclut que f est dérivable en 0 et de plus que $f'(0) = 0$;
5. Vrai. Prouvons les deux implications. $\Rightarrow$. Supposons que la suite (u_n) converge vers une certaine limite L. Commençons par observer que L doit être égal à 1. En effet, si (u_n) converge, alors on a par unicité des limites que
$$\lim_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (2u_n - 1),$$
c'est-à-dire $L = 2L - 1$, ce qui implique que $L = 1$. Supposons, de plus, que $u_k > 1$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$. On a alors $u_{k+1} = 2u_k - 1 > u_k$, ce qui implique que $u_{k+1} > 1$ également. Il suit, par récurrence, que $u_{n+1} > u_n > 1$ pour tout $n \geq k$. La suite (u_n) ne peut donc pas converger vers 1, ce qui est une contradiction. On en déduit que $u_n \leq 1$ pour tout n. Supposons que $u_k < 1$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Alors $u_{k+1} = 2u_k - 1 < u_k$ et on déduit à nouveau par récurrence que $u_{n+1} < u_n < 1$ pour tout $n \geq k$. Il suit que la suite (u_n) ne peut pas converger vers 1, ce qui est une contradiction. On en conclut que $u_n \geq 1$ pour tout n. On doit donc avoir $u_n = 1$ pour tout n, en particulier $u_0 = a = 1$. Ceci montre la première implication.

   $\Leftarrow$. Pour la deuxième implication, supposons que $u_0 = 1$. Remarquons que si $u_k = 1$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$, alors $u_{k+1} = 2u_k - 1 = 1$. On conclut par récurrence que $u_n = 1$ pour tout n. En particulier, la suite (u_n) converge vers 1. Ceci montre l'équivalence.
6. Faux : les rôles du coeur et du carré doivent être inversés pour que la proposition devienne vraie. Contre exemple : soit $f(x) = 1$ si $x > 0$ et $f(x) = 0$ si $x \leq 0$. Cette fonction n'est pas continue en 0 et pourtant, il est vrai que pour tout $\delta > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $|x - 0| < \delta$ alors $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$. En effet, soit $\delta > 0$. Fixons $\varepsilon = 2$. Alors, si $|x| < \delta$, on a que $|f(x)| \leq 2 = \varepsilon$.

Question 2

---

1. Lorsque g est intégrable sur tout intervalle borné de la forme $[a, b]$, avec $b > a$, et
$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\, dx$$
existe dans $\mathbb{R}$.

2. Soit $\alpha > 0$. Notons $f(x) := 1/x^\alpha$ pour tout $x \geq 1$. Pour tout $M > 1$, la fonction f est continue sur l'intervalle $[1, M]$ et donc intégrable sur $[1, M]$. Si $\alpha \neq 1$, on calcule, par le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral,
$$\int_1^M f(x)\, dx = \int_1^M \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^M = \frac{1}{1-\alpha}\left(M^{1-\alpha} - 1\right).$$
On a que $\lim_{M \to +\infty} M^{1-\alpha}$ existe si et seulement si $1 - \alpha \leq 0$. Il suit que si $\alpha \neq 1$, l'intégrale impropre converge si et seulement si $\alpha < 1$ et diverge si $\alpha > 1$. Si $\alpha = 1$, on a
$$\int_1^M f(x)\, dx = \int_1^M \frac{1}{x}\, dx = \Big[\ln(x)\Big]_1^M = \ln(M) \overset{M \to \infty}{\to} +\infty.$$
On en conclut que l'intégrale impropre converge si et seulement si $\alpha < 1$ et diverge si $\alpha \geq 1$.

3. Observons que
$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1.$$
Définissons alors la fonction $\bar{f}(x) = 1$ si $x = 0$, $f(x) = \sin(x)/x$ si $x > 0$. La fonction $\tilde{f}$ est continue sur $(0, \infty)$ car $x \mapsto 1/x$ et $x \mapsto \sin(x)$ le sont, et on a $\lim_{x \to 0} \bar{f}(x) = \bar{f}(0)$. La fonction $\bar{f}$ est donc continue sur $[0, \infty]$. De plus, $\bar{f}(x) = f(x)$ pour tout $x \in (0, +\infty)$ par construction.

4. Puisque la fonction $\bar{f}$ est continue sur $[0, \infty]$, elle l'est en particulier sur $[0, 1]$. L'intégrale $\int_0^1 \bar{f}(x)\, dx$ existe donc dans $\mathbb{R}$. Par le même argument de continuité, il suit que $\bar{f}$ est intégrable sur $[1, M]$ pour tout $M > 1$. De plus, on calcule par intégration par parties
$$\int_1^M \bar{f}(x)\, dx = \int_1^M \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \left[\frac{-\cos(x)}{x}\right]_1^M - \int_1^M \frac{\cos(x)}{x^2}\, dx.$$
Observons que
$$0 \leq \left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$$
et que l'intégrale sur $[1, M]$ de la fonction bornée et continue $x \mapsto 1/x^2$ converge lorsque $M \to \infty$. Par le critère de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, on en déduit que l'intégrale sur $[1, M]$ de la fonction bornée et continue $\left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right|$ converge lorsque $M \to \infty$. Il a du être mentionné en séance d'exercices que dans ce cas, l'intégrale de $\cos(x)/x^2$ sur $[1, M]$ converge également lorsque $M \to \infty$. Si ce n'est pas le cas, voir la remarque ci-dessous. On a aussi que
$$\left[\frac{-\cos(x)}{x}\right]_1^M = \cos(1) - \frac{\cos(M)}{M}.$$
Or $|\cos(M)/M| \leq 1/M \to 0$ lorsque $M \to 0$. Par le théorème du sandwich, il suit que $\cos(M)/M \to 0$ lorsque $M \to \infty$. On en déduit que
$$\lim_{M \to \infty} \int_1^M \bar{f}(x)\, dx$$
existe. Comme $\int_0^1 \bar{f}(x)\, dx$ existe également, ceci conclut la preuve.

Remarque. Si $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ est bornée, intégrable sur $[a, b]$ pour tout $b > a$ et telle que

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b |f(x)|\, dx$$

existe, alors

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

existe également.

Démonstration. Soit M_n une suite telle que $M_n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$. Par hypothèse, l'intégrale de $|f(x)|$ sur $[a, M_n]$ converge lorsque $n \to \infty$. Etant donné $\varepsilon > 0$, il existe alors, par le principe des suites de Cauchy, un $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\int_{M_p}^{M_n} |f(x)|\, dx = \left| \int_{M_p}^{M_n} |f(x)|\, dx \right| = \left| \int_a^{M_n} |f(x)|\, dx - \int_a^{M_p} |f(x)|\, dx \right| < \varepsilon$$

dès que $n, p > N$ et si $M_n \geq M_p$. Nous avons alors pour de tels n, p que

$$\left| \int_a^{M_n} f(x)\, dx - \int_a^{M_p} f(x)\, dx \right| = \left| \int_{M_p}^{M_n} f(x)\, dx \right| \leq \int_{M_p}^{M_n} |f(x)| \leq \varepsilon.$$

On en déduit que la suite $\left(\int_a^{M_n} f(x)\, dx \right)_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et converge donc dans $\mathbb{R}$.

On sait maintenant que $\int_a^{M_n} f(x)\, dx$ converge, pour toute suite $M_n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$. Il faut encore s'assurer que la limite est la même pour toute suite $M_n \to \infty$. Soient m_n et m'_n deux suites qui convergent vers ∞. On sait à présent qu'il existe L_1 et L_2 telles que

$$\int_a^{m_n} f(x)\, dx \to L_1,$$

$$\int_a^{m'_n} f(x)\, dx \to L_2,$$

lorsque $n \to \infty$. On veut montrer que $L_1 = L_2$. On définit la suite M_n de la façon suivante : $M_{2n} = m_n$ et $M_{2n+1} = m'_n$. Il est clair que $M_n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$. Il suit que $\int_a^{M_n} f(x)\, dx$ converge vers une certaine limite L, de sorte que toutes ses sous-suites doivent converger vers L également. Or, $\int_a^{M_{2n}} f(x)\, dx$ converge vers L_1 et $\int_a^{M_{2n+1}} f(x)\, dx$ converge vers L_2. On en déduit que $L = L_1 = L_2$. Ceci implique que pour toute suite $M_n \to \infty$, on a que $\int_a^{M_n} f(x)\, dx$ converge vers L. On en conclut que

$$\lim_{M\to\infty} \int_a^M f(x)\, dx = L.$$

□

Question 3

1. $\mathrm{adh(A)} = \{\mathrm{a} \in \mathbb{R} : \forall\ \delta > 0,\ (\mathrm{a} - \delta, \mathrm{a} + \delta) \cap \mathrm{A} \neq \emptyset\}$;
2. $\Rightarrow$. Soit $x \in$ adh (A). Soit δ_n une suite tendant vers 0 lorsque $n \to \infty$. Pour tout n, $(a - \delta_n, a + \delta_n) \cap A$ est non-vide. Choisissons alors, pour tout n, $a_n \in (a - \delta_n, a + \delta_n) \cap A$. On a alors que $|a - a_n| \leq \delta_n$ pour tout n. Comme $\delta_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$, on conclut par le théorème du sandwich que $a_n \to a$. De plus, on a $a_n \in A$ pour tout n, par construction.
   $\Leftarrow$. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe une suite (a_n) contenue dans A qui converge vers a. Soit $\delta > 0$. Puisque $a_n \to a$ lorsque $n \to \infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|a - a_n| < \delta$ lorsque $n \geq N$. Il suit que $a_N \in (a - \delta, a + \delta)$. Comme $a_N \in A$, on conclut que $(a - \delta, a + \delta) \cap A \neq \emptyset$. Comme $\delta > 0$ était arbitraire, ceci implique que $a \in$ adh (A).

3. On a que $f(x) = 0$ si et seulement si $\frac{1}{x-1} = \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{N}$ (on ne considère que les x positifs), c'est-à-dire
$$A = \left\{1 + \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi} : k = 0, 1, 2, \dots\right\}.$$
Définissons la suite $x_k = 1 + \frac{1}{\frac{\pi}{2}+k\pi}$. La suite (x_k) est strictement décroissante et converge trivialement vers 1. Il suit donc que $1 \in \text{adh}(A)$. Puisque (x_k) est décroissante, on a que si $x < 1$, alors $x \notin \text{adh}(A)$. De même, si $x > 1 + 2/\pi = x_0$, $x \notin$ adh(A). On a, à nouveau puisque (x_k) décroit, que pour tout $x \in [1, 1 + 2/\pi]$ tel que $x_{k+1} < x < x_k$, x n'appartient pas à adh(A). Comme $A \subset \text{adh}(A)$, il suit que $\text{adh}(A) = A \cup \{1\}$. On en conclut que $\text{adh}(A) \setminus A = \{1\}$.

Question 4

1. Voir cours.
2. Comme $x > 0$, on a que $(1 + 1/x) > 0$ et $(1 + 1/x)^x > 0$. Prenant le logarithme, qui est une fonction croissante, de chaque côté, (1) est alors équivalent à
$$x \ln(1 + 1/x) < 1 < (x + 1) \ln(1 + 1/x).$$
La première inéquation se réecrit $\ln(1+1/x) < 1/x$ tandis que la deuxième se réecrit $\ln(1+1/x) > 1/(x+1)$. Il suffit à présent de remarquer que
$$\ln(1 + 1/x) = \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) = \ln(1 + x) - \ln(x).$$
3. Soit $f(x) = \ln(x)$. La fonction f est dérivable en tout $x > 0$ avec $f'(x) = 1/x$. Pour tout $x > 0$, le théorème de la moyenne garantit alors l'existence d'un $c \in (x, x + 1)$ tel que
$$\frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} = f'(c).$$
Ceci se réecrit
$$\ln(x + 1) - \ln(x) = \frac{1}{c}.$$
Comme $c \in (x, x + 1)$, on a $1/(x + 1) < \frac{1}{c} < 1/x$. On conclut que
$$\frac{1}{x+1} < \ln(1 + x) - \ln(x) < \frac{1}{x}.$$

Question 5

1. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tels que pour tous $x, y \in \text{dom}(f)$ avec $|x - y| < \delta$, on a $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
2. Soient $x, y \in (0, 1]$. Supposons sans perte de généralité que $x > y$. Alors
$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \sqrt{x} - \sqrt{y} = (\sqrt{x} - \sqrt{y})\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{x-y}{\sqrt{(x-y)+y}+\sqrt{y}} \leq \frac{x-y}{\sqrt{x-y}} = \sqrt{x-y}.$$
Le cas $x < y$ se traite de la même manière. On en déduit que pour tout $x, y \in (0, 1]$ avec $x \neq y$, on a
$$|\sqrt{y} - \sqrt{x}| \leq \sqrt{|y - x|}.$$
Or cette égalité est évidemment vérifiée si $x = y$ ou si $x = 0$ ou $y = 0$. Ceci conclut donc pour tous $x, y \in [0, 1]$. Etant donné $\varepsilon > 0$, posons $\delta = \varepsilon^2$. Alors si $x, y \in [0, 1]$ sont tels que $|y - x| < \delta$, on a
$$|\sqrt{y} - \sqrt{x}| \leq \sqrt{|y - x|} \leq \sqrt{\delta} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon.$$

On en conclut que $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0, 1]$.

3. Soient $x, y \geq 1$. On a alors que $\sqrt{x} \geq 1$ et $\sqrt{y} \geq 1$, ce qui implique que
$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq \frac{1}{2}.$$
Comme précédemment, on a
$$|\sqrt{x}-\sqrt{y}| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq \frac{1}{2}|x-y|.$$
Etant donné $\varepsilon > 0$, posons $\delta = 2\varepsilon$. Alors si $x, y \geq 1$ sont tels que $|x-y| < \delta$, on a
$$|\sqrt{y}-\sqrt{x}| \leq \frac{1}{2}|x-y| \leq \frac{1}{2}\,2\varepsilon = \varepsilon.$$
On en conclut que $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[1, +\infty)$.

4. Posons $f(x) = \sqrt{x}$ pour $x \geq 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta_1 > 0$ et $\delta_2 > 0$ tels que pour tous $x, y \in [0, 1]$ et $x', y' \in [1, \infty)$, si $|x-y| < \delta_1$ ($|x'-y'| < \delta_2$, resp.), alors $|f(x)-f(y)| < \varepsilon/2$ ($|f(x')-f(y')| < \varepsilon/2$, resp.). Posons $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Soient $x, y \in [0, \infty)$ tels que $|x-y| < \delta$. Si $x, y \in [0, 1]$ ou $[1, \infty]$ tous les deux, alors on a déjà que $|f(x)-f(y)| < \varepsilon/2 < \varepsilon$. Si $x \in [0, 1]$ et $y \in [1, \infty)$, alors
$$|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f(1)| + |f(1)-f(y)|.$$
On a que $|x-1| = 1-x = 1-y+y-x \leq y-x < \delta$ car $1-y \leq 0$. De même, $|y-1| = y-1 = y-x+x-1 \leq y-x < \delta$ car $x-1 \leq 0$. On en déduit que $|f(x)-f(1)| < \varepsilon/2$ et $|f(1)-f(y)| < \varepsilon/2$. Il suit que
$$|f(x)-f(y)| < \varepsilon$$
On en conclut que $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0, \infty)$.

Remarque. Au point 2, on n'a pas utilisé le fait que $x \leq 1$ pour déduire $|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leq \sqrt{|y-x|}$. Cette inégalité est valide pour tous $x, y \in [0, \infty)$. La continuité uniforme sur $[0, \infty)$ pouvait donc se déduire directement à partir de là. Par contre l'inégalité $|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leq \frac{1}{2}|x-y|$ n'est vraie en toute généralité que pour $x, y \geq 1$.

CORRIGÉ

Calcul différentiel et intégral 1
MATH-F-101

Interrogation de novembre 2021

Le 4 novembre 2021

- **Aucun appareil électronique (calculatrice, GSM, . . .) n'est autorisé.**
- **Veuillez commencer chaque question sur une nouvelle feuille.**
- **Ecrivez CLAIREMENT vos nom et prénom EN MAJUSCULES sur chaque feuille rendue.**
- **Justifiez soigneusement toutes vos réponses. Vous pouvez utiliser tous les résultats vus au cours à condition de les énoncer clairement et de vérifier que les hypothèses sont satisfaites**

CORRIGÉ

Nom, Prénom :

1. /15

a) /6 Déterminer l'ensemble de tous les majorants du sous-ensemble

$$E = \left\{1-\frac{1}{n}\,;\, n\in\mathbb{N}_0\right\}.$$

b) /4 Déterminer le supremum de E s'il existe.

c) /5 Soient $A \subset B$, deux sous-ensembles non-vides et majorés de $\mathbb{R}$ et notons s_A le supremum de A et s_B celui de B. Montrer que $s_A \leq s_B$.

d) BONUS/5 Si A est non-vide et majoré, montrer qu'il existe une suite $(x_n) \subset A$ qui converge vers $\sup A$.

a) L'ensemble des majorants de E est $M := [1,+\infty)$. En effet, $\forall\, n\in\mathbb{N}_0$ on a $\frac{1}{n}\geq 0$ et donc $1-\frac{1}{n}\leq 1$. De plus, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $N\in\mathbb{N}_0$ tel que $N>\frac{1}{\varepsilon}$ et donc $\varepsilon>\frac{1}{N}$ par la propriété d'Archimède. On a alors $1-\varepsilon<1-\frac{1}{N}\in E$ de sorte que $1-\varepsilon$ ne peut être majorant de E.

b) Par l'argument ci-dessus 1 est le plus petit majorant de E, c'est-à-dire $1=\sup E$.

(c) Pour tout $a \in A$, on a $a \in B$ et donc $a \leq s_B$ (le supremum de B en est un majorant). Donc s_B est un majorant de A.

Comme s_A est le plus petit majorant de A, on a $s_A \leq s_B$, comme requis.

(d) Comme sup A est le plus petit majorant de A, on a que, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, $\sup A - \frac{1}{n} < \sup A$ et donc il existe $x_n \in A$ tel que $\sup A - \frac{1}{n} < x_n$ ($\sup A - \frac{1}{n}$ n'est pas majorant de A).

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq \sup A - x_n < \frac{1}{n}$ (où la première inégalité provient du fait que $x_n \in A$ et donc $x_n \leq \sup A$) donc, par le théorème du Sandwich, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ converge vers $\sup A$.

CORRIGÉ

Nom, Prénom :

2. $\boxed{/15}$ Pour chacun des énoncés suivants, déterminer s'il est vrai ou faux. Rédiger une preuve rigoureuse dans le premier cas. Donner un contre-exemple dans le second.

a) $\boxed{/6}$ Toute suite (x_n) croissante et majorée converge.

b) $\boxed{/5}$ La suite $x_n = n$, $n \in \mathbb{N}$ ne converge pas vers 37.

c) $\boxed{/4}$ Soit (x_n) une suite qui possède une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $a \in \mathbb{R}$. Alors (x_n) converge aussi vers a.

(a) VRAI

Considérons $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Comme il s'agit d'un ensemble non-vide et majoré, il possède un supremum, ℓ disons. Soit $\varepsilon > 0$. Alors $\ell - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ (puisque $\ell - \varepsilon < \ell$ et ℓ est le plus petit des majorants de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$) et donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\ell - \varepsilon < x_N$. Comme (x_n) est croissante, on a, pour tout $n \geq N$ $\ell - \varepsilon < x_N \leq x_n \leq \ell < \ell + \varepsilon$ et donc $|x_n - \ell| < \varepsilon$. Ceci démontre que (x_n) converge vers ℓ.

(b) VRAI

Soit $\varepsilon = 1$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$|x_n - 37| = x_n - 37 \geq 1 = \varepsilon$$

pour $n := \max\{N, 38\} \geq 38$.

Donc $\exists \varepsilon > 0 : \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N : |x_n - 37| \not< \varepsilon$, c'est-à-dire (x_n) ne converge pas vers 37.

(c) FAUX.

Soit (x_n) la suite définie par $x_n = (-1)^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Soit $n_k := 2k$ $\forall k \in \mathbb{N}$ de telle sorte que la suite (x_{n_k}) est de valeur constante 1.

Alors (x_{n_k}) converge vers 1 et pourtant (x_n) ne converge pas.

CORRIGÉ

Nom, Prénom :

3. $\boxed{\quad /15}$ Pour chacune des suites suivantes, déterminer si elle converge et si oui, vers quelle limite.

a) $\boxed{\quad /5}$

$$x_n = \frac{n^2+2n+1}{2n^3+n-\pi}$$

b) $\boxed{\quad /5}$

$$x_n = \frac{3^n+n^9}{2^{2n}+2^n}$$

c) $\boxed{\quad /5}$

$$x_n = \frac{n!}{n^n}$$

(a)

$$x_n = \frac{n^2+2n+1}{2n^3+n-\pi} = \frac{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{2+\frac{1}{n^2}-\frac{\pi}{n^3}}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{0+0+0}{2+0-0} = 0$$

En effet (Proposition 2.10) :

On a $\frac{1}{n^p} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$ si $p>0$. (Ici $p=1$ ou 2 ou 3).

|

(b)

$$x_n = \frac{3^n + n^9}{2^{2n} + 2^n} = \frac{3^n + n^9}{4^n + 2^n} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{n^9}{4^n}}{1 + \left(\frac{2}{4}\right)^n}$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{0 + 0}{1 + 0} = 0$$

En effet (Proposition 2.10.) :

On a $c^n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$ si $|c| < 1$ (ici $c = \frac{3}{4}$ ou $c = \frac{2}{4}$)

On a également $n^p c^n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$ si $p \in \mathbb{R}$ et $|c| < 1$ (ici $p = 9$ et $c = \frac{1}{4}$)

(c)

$$0 \leq x_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n \cdot n \cdot n}$$

$$= \underbrace{\frac{n}{n}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\frac{n-2}{n}}_{\leq 1} \cdot \cdots \cdot \underbrace{\frac{3}{n}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\frac{2}{n}}_{\leq 1} \cdot \frac{1}{n}$$

$$\leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Par le théorème du Sandwich, $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

CORRIGÉ

Nom, Prénom :

4. ☐ /15 On définit une suite (x_n) récursivement par

$$x_0 = 0 \quad \text{et} \quad x_{n+1} = \frac{x_n^2+4}{4}, \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

a) ☐ /5 Montrer que $0 \leq x_n \leq 2$ pour tout naturel n.

b) ☐ /4 Montrer que la suite (x_n) est croissante.

c) ☐ /3 Déduire des deux précédentes questions que la suite (x_n) converge.

d) ☐ /3 Déterminer la limite de la suite (x_n).

(a) On a $x_0=0$ donc, en particulier $0 \leq x_0 \leq 2$.

Si $0 \leq x_n \leq 2$ alors $0 \leq x_n^2 \leq 4$ donc $4 = 0+4 \leq x_n^2+4 \leq 4+4 = 8$ et finalement $0 \leq 1 = \frac{4}{4} \leq \frac{x_n^2+4}{4} \leq \frac{8}{4} = 2$ c'est-à-dire $0 \leq x_{n+1} \leq 2$.

Par récurrence, il suit que $0 \leq x_n \leq 2$ $\forall n \in \mathbb{N}$, comme requis.

(b) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n^2 + 4}{4} - x_n$$

$$= \frac{x_n^2 - 4x_n + 4}{4}$$

$$= \frac{(x_n - 2)^2}{4} \geq 0$$

donc $x_{n+1} \geq x_n$.

La suite (x_n) est bien croissante

(c) Par (b), (x_n) est croissante. Par (a), (x_n) est majorée. Par le théorème de convergence des suites monotones, toute suite croissante et majorée converge donc (x_n) converge.

(d) Soit l la limite de (x_n).

Par les règles de calcul des limites,

$$l = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n^2+4}{4}$$

$$= \frac{\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right)^2+4}{4}$$

$$= \frac{l^2+4}{4}$$

Donc $\frac{l^2+4}{4} - l = 0$

Donc $l^2 - 4l + 4 = 0$

Donc $(l-2)^2 = 0 \iff l = 2$

Calcul différentiel et intégral 1
MathF101

Examen de janvier 2022

NOM et PRÉNOM : **MATRICULE :**

- **Aucun appareil électronique (calculatrice, GSM, . . .) n'est autorisé.**
- **Ecrivez clairement vos nom et prénom EN MAJUSCULES sur chaque feuille rendue.**
- **Justifiez soigneusement toutes vos réponses. Vous pouvez utiliser tous les résultats vus au cours à condition de les énoncer clairement et de vérifier que les hypothèses sont toutes satisfaites**

1. /24

2. /18

3. /20

4. /18

Tot : /80

TOT : /20

NOM et PRÉNOM : **MATRICULE :**

Question 1 (24 pts) Pour chacun des énoncés suivants, dire s'il est vrai ou faux et fournir une justification complète. Vous pouvez utiliser tous les résultats du cours, à condition de les énoncer clairement et de vérifier que les hypothèses sont toutes satisfaites.

1. **(4 pts)** Notons $\mathscr{M}(A)$ l'ensemble des majorants d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}$. Si $A \subset B$, alors $\mathscr{M}(A) \supset \mathscr{M}(B)$.
2. **(4 pts)** Si (x_n) est une suite bornée, alors elle converge.
3. **(4 pts)** Si (x_n) et (y_n) sont deux suites qui convergent vers a et b respectivement, alors la suite produit $(x_n \cdot y_n)$ converge vers $a \cdot b$.
4. **(4 pts)** Pour tout intervalle $[a,b)$, avec $a < b$, il existe une fonction continue non-bornée $f : [a,b) \to \mathbb{R}$.
5. **(4 pts)** Si la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfait $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable et $f'(c) = 0$ pour tout $c \in \mathbb{R}$.
6. **(4 pts)** Soit $f : I \to \mathbb{R}$, une fonction définie sur un intervalle ouvert. Soit $a \in I$ tel que $f'(a) = f''(a) = 0$ et $f'''(a) < 0$, alors a est un maximum local de f.

Question 2 (18 pts) Soit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$, une série de puissances, où $z_0, z \in \mathbb{C}$ et $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite dans $\mathbb{C}$.

1. **(4 pts)** Expliquer de manière rigoureuse les termes *rayon de convergence* et *disque de convergence.*
2. **(8 pts)** Deux formules permettent de calculer le rayon de convergence à partir de la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Veuillez les énoncer toutes les deux et en prouver une des deux, au choix.
3. **(6 pts)** Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries de puissances suivantes :

   (a)
   $$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{7}{3}\right)^k z^k$$

   (b)
   $$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\ln(k)+7^k}{3k^5+3^k}\right)(i-z)^k.$$

Question 3 (20 pts) Soit $f : E \to \mathbb{R}$, définie par

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x},$$

où E est le domaine de f. Vous pouvez utiliser toute propriété standard du logarithme.

1. **(3 pts)** Déterminer E et montrer que $0 \in \text{adh}(E)$.
2. **(3 pts)** Ecrire le développement de Taylor à l'ordre k de $\ln(1+x)$ en 0.
3. **(3 pts)** Déduire, du développement à l'ordre 1 de $\ln(1+x)$, la limite de f en 0.
4. **(5 pts)** On note $g : D = E \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie ci-après :

   $$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in E \\ \lim\limits_{x \to 0} f(x) & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

   La fonction g est-elle dérivable en 0 ? Si oui, déterminer $g'(0)$.
   (Remarque : La fonction g est *le prolongement continu* de f en 0.)
5. **(6 pts)** Calculer $g'(x)$ pour $x \in D$. La fonction g' est-elle continue sur D ?

Question 4 (18 pts)

1. **(6 pts)** Enoncer et démontrer la formule d'intégration par parties.
2. Considérons l'intégrale

$$I_n = \int_1^e (\ln(t))^n \, dt.$$

   (a) **(6 points)** Calculer I_0 et I_1.

   (b) **(6 points)** Montrer, au moyen de la formule d'intégration par parties, que pour tout $n \geq 1$, on a

$$I_n = e - nI_{n-1}.$$

   (c) **(6 points - Bonus)** En déduire une formule pour I_n en fonction de n.

①

1. Vrai.

Soit $x \in \mathcal{M}(B)$. On montre que $x \in \mathcal{M}(A)$.

Soit $a \in A$. Comme $A \subset B$, $a \in B$. Donc $x \geq a$, puisque x est un majorant de B. Ceci étant vrai pour tout $a \in A$, $x \in \mathcal{M}(A)$, comme requis..

2. Faux

La suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée mais ne converge pas. Bornée : $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Ne converge pas : en notant $a_n = (-1)^n$, les deux sous-suites $(a_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ et $(a_{2k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ sont constantes et donc convergent. Mais la première converge vers 1 et la seconde vers -1, des limites différentes, donc $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger.

3. Vrai.

Soit $\varepsilon>0$.

Comme (y_n) converge vers a, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|y_n-b|<1$ $\forall\, n\geq N$. Par l'inégalité triangulaire, on a $\big||y_n|-|b|\big| \leq |y_n-b| < 1$ $\forall\, n \geq N$

Donc $|y_n| < |b|+1$ $\forall\, n\geq N$.

Soit $\varepsilon>0$.

Puisque $x_n \to a$ lorsque $n\to\infty$, il existe $N_x \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n-a| < \dfrac{\varepsilon}{2(|b|+1)}$ $\forall\, n\geq N_x$.

Puis que $y_n \to b$ lorsque $n \to \infty$, il existe $N_y \in \mathbb{N}$ tel que $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2(|a|+1)}$

On a donc, pour tout $n \geq \max\{N_x, N_y\}$,

$$\begin{aligned}
|x_n \cdot y_n - a \cdot b| &= |x_n \cdot y_n - a \cdot y_n + a \cdot y_n - a \cdot b| \\
&= |y_n \cdot (x_n - a) + a \cdot (y_n - b)| \\
&\leq |y_n| \cdot |x_n - a| + |a| \cdot |y_n - b| \\
&< (|b|+1) \frac{\varepsilon}{2(|b|+1)} + |a| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|a|+1)} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \left(\frac{|a|}{|a|+1} < 1 \right) \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

Donc $(x_n \cdot y_n)$ converge vers $a \cdot b$.

4. Vrai

On peut considérer la fonction $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x-b}$.

Le dénominateur étant non-nul pour

tout $x \in [a,b)$, la fonction est continue sur $[a,b)$. Par contre $\lim_{\substack{x \to b \\ <}} f(x) = -\infty$ et donc la fonction n'est pas bornée.

5. Vrai.

Soit $c \in \mathbb{R}$, on a, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{c\}$, $|f(x) - f(c)| \leq |x-c|^2$ donc, en divisant par $|x-c| \neq 0$,

$$\left| \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \right| \leq |x-c|.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\delta = \varepsilon$. Si $0 < |x-c| < \delta$ alors

$$\left| \frac{f(x)-f(c)}{x-c} - 0 \right| = \left| \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \right| \leq |x-c| < \delta = \varepsilon$$

donc $\lim_{\substack{x \to c \\ \neq}} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = 0$. La limite existe et vaut 0 donc

f est dérivable en c et $f'(c)=0$.

6. Faux

Considérons la fonction

$f : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto 1-x^3$.

Alors $f'(x) = -3x^2 < 0 \ \forall x \in (-1,1) \setminus \{0\}$

et $f'(0) = 0$; et $f''(x) = -6x \ \forall x \in (-1,1)$ donc

$f''(0) = 0$; et $f'''(x) = -6 \ \forall x \in (-1,1)$

donc $f'''(0) = -6 < 0$.

Malgré tout, 0 n'est pas un maximum local de f puisque f est strictement décroissante sur $(-\infty, 0)$ et $(0, +\infty)$.

② 1. Il existe $\rho_a \in [0, +\infty]$ tel que la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ converge absolument si $|z-z_0| < \rho_a$ et diverge si $|z-z_0| > \rho_a$. On appelle ρ_a le rayon de convergence.

L'intérieur du disque de rayon ρ_a centré en z_0 est appelé disque de convergence.

2. Formule de Hadamard :

$$\rho_a = \frac{1}{\limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

Si $a_k \neq 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$ et $\lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ alors

$$\rho_a = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

Démonstration de la formule de Hadamard :

On montre que $\rho := \dfrac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$ est le rayon de convergence de $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$

On a

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k(z-z_0)^k|}$$

$$= |z-z_0| . \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

$$= \frac{|z-z_0|}{\rho}$$

Si $|z-z_0| < \rho$, $\dfrac{|z-z_0|}{\rho} < 1$ et $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ converge absolument par le critère de la racine.

Si $|z-z_0| > \rho$, $\dfrac{|z-z_0|}{\rho} > 1$ et $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ diverge.

Donc ρ est bien le rayon de convergence de $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$.

3.

(a) On a

$$\sqrt[k]{\left(\frac{7}{3}\right)^k} = \frac{7}{3} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{7}{3}$$

Par la formule de Hadamard, le rayon de convergence de $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{7}{3}\right)^k z^k$ est $\dfrac{1}{\frac{7}{3}} = \dfrac{3}{7}$.

(b) $$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\ln(k)+7^k}{3k^5+3^k}\right)(i-z)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{\ln(k)+7^k}{3k^5+3^k}\right)(z-i)^k$$

$$\left|\frac{\frac{\ln(k)+7^k}{3k^5+3^k}(-1)^k}{\frac{\ln(k+1)+7^{k+1}}{3(k+1)^5+3^{k+1}}(-1)^{k+1}}\right| = \left|\frac{(\ln(k)+7^k)(\cancel{3}(k+1)^5+3^{k\cancel{+1}})}{(\ln(k+1)+7^{k+1})(\cancel{3}k^5+3^{k-1})}\right|$$

$$= \frac{\left(\frac{\ln(k)}{7^{k+1}} + \frac{1}{7}\right)\left(\frac{(k+1)^5}{3^k} + 1\right)}{\left(\frac{\ln(k+1)}{7^{k+1}} + 1\right)\left(\frac{k^5}{3^k} + \frac{1}{3}\right)}$$

$$\xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{7}$$

par la proposition 2.10. :

- $n^p c^n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \forall p\in\mathbb{R}, |c|<1$

donc $\frac{(k+1)^5}{3^k} = 3\,\frac{(k+1)^5}{3^{k+1}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ $(p=5, c=\frac{1}{3})$

et $\frac{k^5}{3^k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ $(p=5, c=\frac{1}{3})$

- et $\forall k\in\mathbb{N}_0$

$$0\leq \frac{\ln(k)}{7^{k+1}} = \frac{1}{7}\cdot\frac{\ln(k)}{7^k} < \frac{1}{7}\,\frac{\sqrt{k}}{7^k} \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

$(p=\frac{1}{2}, c=\frac{1}{7})$

$$0\leq \frac{\ln(k+1)}{7^{k+1}} < \frac{\sqrt{k+1}}{7^{k+1}} \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

$(p=\frac{1}{2}, c=\frac{1}{7})$

(Pour voir que $\ln(k)<\sqrt{k}$ $\forall k\in\mathbb{N}_0$ on peut considérer la fonction

$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x} - \ln x$.

On a alors $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{\sqrt{x}-2}{2x}$

et $f'(x) < 0 \ \forall x \in (0, 4)$ et $f'(x) > 0 \ \forall (4, +\infty)$. Or $f(1) = 1$ et $f(4) = 2 - \ln 4 > 0$ (puisque $e^2 > 4$) donc $f(x) > 0 \ \forall x \geq 1$)

Donc le rayon de convergence de $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\dfrac{\ln(k) + 7^k}{3k^5 + 3^k} \right) (i - z)^k$ est $\dfrac{3}{7}$.

③

1. $x \in E \iff 1+x>0$ et $x \neq 0$

$\iff x>-1$ et $x \neq 0$

Donc $E =]-1,+\infty[\setminus \{0\}$.

Comme $\frac{1}{n} \in]0,1[\subseteq E \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

et $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $0 \in adh(E)$.

2. On montre que

$$h^{\underline{n}}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,(1+x)^{-n}$$

$\forall n \in \mathbb{N}_0$. où $h(x) := \ln(1+x)$

On a

$$h^{\underline{1}}(x) = h'(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$= \underbrace{(-1)^{1-1}(1-1)!}_{=1}\,(1+x)^{-1}$$

et si $h^{\underline{m}}(x) = (-1)^{m-1}(m-1)!\,(1+x)^{-m}$

pour $m \in \mathbb{N}_0$ alors

$$h^{\underline{m+1}}(x) = (-1)^{m-1}(m-1)!\overbrace{(-m)}^{=(-1).m}(1+x)^{-m-1}$$

$$= (-1)^{m}\, m!\, (1+x)^{-(m+1)}$$

Le résultat suit par récurrence.

Le développement de Taylor de g en 0 à l'ordre $k \geq 1$ est

$$P_k(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{h^{\underline{n}}(0)}{n!} x^n$$

$$= \underbrace{h^{\underline{0}}(0)}_{=0} + \sum_{n=1}^{k} \frac{h^{\underline{n}}(0)}{n!} x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!} x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

A l'ordre 0, on a $P_0(x) := \frac{h^{\underline{0}}(0)}{0!} x^0$

$$= 0$$

Par le théorème de Taylor,

$$\lim_{x\to0} \frac{h(x)-P_k(x)}{x^k} = 0 \quad \forall k\in\mathbb{N}. \quad \textcircled{\scriptsize\Delta}$$

En particulier, pour $k=1$, on a

$$\lim_{x\to0} \frac{h(x)-P_1(x)}{x} = 0$$ et donc

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to0} \frac{P_1(x)}{x}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{x}{x} = 1$$

4. $$\lim_{\substack{h\to0\\ \neq}} \frac{g(0+h)-g(0)}{h}$$

$$= \lim_{\substack{h\to0\\ \neq}} \frac{g(h)-1}{h}$$

$$= \lim_{\substack{h\to0\\ \neq}} \frac{f(h)-1}{h}$$

$$= \lim_{\substack{h\to0\\ \neq}} \frac{\ln(1+h)-h}{h^2} \underset{\textcircled{\scriptsize *}}{=} -\frac{1}{2}$$

⊛ Par ④ avec $k=2$, on a

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{h(x)-x}{x^2}-\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-(x-\frac{x^2}{2})}{x^2}=0$$

Donc $\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2}=-\frac{1}{2}$

Donc g est dérivable en 0 (puisque la limite existe) et $g'(0)=-\frac{1}{2}$ (puisque la limite vaut $-\frac{1}{2}$).

5. Pour $x \neq E$,

$$g'(x)=f'(x)=\frac{\frac{1}{1+x}\cdot x-\ln(1+x)}{x^2}$$

pour $x=0$, $g'(0)=-\frac{1}{2}$. Donc

$$g'(x)=\begin{cases}\dfrac{\frac{1}{1+x}\cdot x-\ln(1+x)}{x^2} & \text{si } x\in E\\ -\frac{1}{2} \text{ si } x=0\end{cases}$$

Comme $1+x > 0 \ \forall x \in E$, $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ et $x \mapsto \ln(1+x)$ sont continues sur E. Donc $x \mapsto x \cdot \frac{1}{1+x}$ est un produit de fonctions continues et donc continue sur E. Mais donc $x \mapsto x \cdot \frac{1}{1+x} - \ln(1+x)$ est continue sur E en tant que combinaison linéaire de fonctions continues.

Comme $x \mapsto x^2$ est continue et non-nulle sur E, le quotient $x \longmapsto \frac{x \cdot \frac{1}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}$ est continu sur E.

On a

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x} \cdot x - \ln(1+x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{(1+x)x} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} \right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{(1+x)\,x} - \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} - \frac{1}{x} \right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{\overset{-\cancel{x}}{\boxed{1-(1+x)}}}{(1+x)\cdot\cancel{x}}^{\,-1} - \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \right]$$

$$= \frac{-1}{1} - \left(-\frac{1}{2} \right) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} = g'(0)$$

Donc, oui, g' est continue sur D.

④ 1. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continûment dérivables. Alors

$$\int_a^b f(x) g'(x)\, dx = \left[f(x) g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x)\, dx$$

Démonstration :

Notons $h(x) = f(x) g(x)$. Par le règle de Leibniz, on a

$$h'(x) = f'(x) g(x) + f(x) g'(x).$$

Donc, par le théorème fondamental de l'analyse,

$$\int_a^b h'(x)\, dx = \left[h(x)\right]_a^b$$

c'est-à-dire

$$\int_a^b \left(f'(x) g(x) + f(x) g'(x)\right) dx = \left[f(x) g(x)\right]_a^b$$

Et donc

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b$$

de sorte que, en soustrayant $\int_a^b f'(x)g(x)\,dx$ des deux côtés, on obtient la formule requise.

2.

(a) $I_0 = \int_1^e (\ln(t))^0\,dt$

$$= \int_1^e dt$$

$$= e-1$$

$$I_1 = \int_1^e (\ln(t))^1\,dt$$

$$= \int_1^e \ln(t).\,1\,dt$$

$$= \int_1^e \ln(t).\,t'\,dt$$

$$\overset{\text{par parties}}{=} \left[t\ln(t)\right]_1^e - \int_1^e (\ln(t))'.\,t\,dt$$

$$= e\ln(e) - 1\ln(1) - \int_1^e \frac{1}{t} \cdot t\,dt$$

$$= e - \int_1^e dt$$

$$= e - (e-1) = 1$$

(b) Pour $n \geq 1$, on a

$$I_n = \int_1^e (\ln(t))^n dt$$

$$= \int_1^e (\ln(t))^n \cdot t'\,dt$$

$$\overset{\text{par parties}}{=} \Big[t \ln(t)\Big]_1^e - \int_1^e n \ln(t)^{n-1} \cdot \frac{1}{t} \cdot t\,dt$$

$$= e - n\int_1^e \ln(t)^{n-1}\,dt$$

$$= e - n I_{n-1}$$

(c) On montre que

$$I_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!}\, e + (-1)^{n+1} n!$$

Pour $n=0$, on a

$$\sum_{k=0}^{0}(-1)^k\frac{0!}{(0-k)!}e+(-1)^{0+1}0!$$

$$=(-1)^0\frac{0!}{(0-0)!}e-1$$

$= e-1$, ce qui est bien I_0.

Si $I_m = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{m!}{(m-k)!}e+(-1)^{m+1}m!$

pour $m\in\mathbb{N}$ alors

$$I_{m+1} = e-(m+1)I_m$$

$$= e-(m+1)\left[\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{m!}{(m-k)!}e+(-1)^{m+1}m!\right]$$

$$= e-\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{(m+1)!}{(m-k)!}e-(-1)^{m+1}(m+1)!$$

$$= e+\sum_{k=0}^{m}(-1)^{k+1}\frac{(m+1)!}{(m-k)!}e+(-1)^{m+2}(m+1)!$$

$$= e+\sum_{k=0}^{m}(-1)^{k+1}\frac{(m+1)!}{((m+1)-(k+1))!}e+(-1)^{m+2}(m+1)!$$

$$= e + \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^k \frac{(m+1)!}{((m+1)-k)!} e + (-1)^{m+2} (m+1)!$$

$$= \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^k \frac{(m+1)!}{((m+1)-k)!} e + (-1)^{(m+1)+1} (m+1)!$$

Le résultat suit par récurrence

La formule ci-dessus provient d'une itération :

$$I_n = e - n I_{n-1}$$

$$= e - n \left(e - (n-1) I_{n-2}\right)$$

$$= e - ne + n(n-1) I_{n-2}$$

$$= e - ne + n(n-1)\left(e - (n-2) I_{n-3}\right)$$

$$= e - ne + n(n-1) e - n(n-1)(n-2) I_{n-3}$$

$$= \cdots$$

$$= e - ne + n(n-1)e - \ldots + (-1)^n n! I_0$$

$$= e - ne + n(n-1)e - \ldots + (-1)^n n! (e-1)$$

$$= e - ne + n(n-1)e - \ldots + (-1)^n n! e + (-1)^{n+1} n!$$

MATH-F101 : Calcul différentiel et intégral I
Examen de 1ère session.

Le 2 juin 2022

Consignes

- L'examen dure 3 heures et comporte 4 questions; chacune vaut 20 points.

- **Il faut répondre à TROIS questions.**
  Votre note finale sera la moyenne de vos notes pour ces trois questions.

- Si vous rendez réponses aux 4 questions, nous prendrons la moyenne des trois meilleures notes.

- Aucun appareil électronique (calculatrices, GSM, ...) n'est autorisé.

- Commencez chaque question sur une nouvelle feuille.

- Écrivez CLAIREMENT votre nom et prénom EN MAJUSCULES sur chaque feuille rendue.

- Justifiez soigneusement toutes vos réponses.

1. (a) i. Soient $\lambda, \mu, A \in \mathbb{R}$ et $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Supposons que g est une solution à l'équation $g' - \mu g = Ae^{\lambda x}$. Démontrer que

$$g(x) = \begin{cases} \frac{A}{\lambda-\mu}e^{\lambda x} + Be^{\mu x} & \text{si } \lambda \neq \mu \\ (Ax+B)e^{\mu x} & \text{si } \lambda = \mu \end{cases}$$

pour une constante $B \in \mathbb{R}$.

8 points

ii. En déduire que si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est deux fois dérivable et est une solution à l'équation

$$f'' - (\lambda + \mu)f' + \lambda\mu f = 0$$

alors il existe des constantes $A, B \in \mathbb{R}$ telles que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{A}{\lambda-\mu}e^{\lambda x} + Be^{\mu x} & \text{si } \lambda \neq \mu \\ (Ax+B)e^{\mu x} & \text{si } \lambda = \mu \end{cases}$$

Conseil : soit $g = f' - \mu f$. L'équation d'ordre 2 pour f implique une équation d'ordre 1 pour g.

4 points

(b) Trouver la solution $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à l'equation $f'' - 10f' + 25f = 0$ avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

8 points

2. (a) Soient $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^n$ et $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

   i. Quand dit-on que f est dérivable en a dans la direction v?

   ii. Quand dit-on que f est différentiable en a?

   iii. Démontrer que si f est différentiable en a avec différentielle $\mathrm{d}f$ alors f est dérivable en a dans toute direction et les dérivées directionnelles sont déterminées par la différentielle via $\partial_v f(a) = \mathrm{d}f(v)$.

10 points

(b) Soient $p \in \mathbb{N}$ et $f_p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f_p(x,y) = \begin{cases} \frac{x^{p+2}y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   i. Démontrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, f_p est dérivable en $(0,0)$ dans toute direction $v = (v_1, v_2)$ et déterminer $\partial_v f(0,0)$ en fonction de p, v_1 et v_2

4 points

   ii. Démontrer que si $p = 0$ alors f_p n'est pas différentiable en $(0,0)$. Démontrer que si $p > 1$ alors f_p est différentiable en $(0,0)$.

4 points

   iii. Qu'est-ce qui se passe si $p = 1$?

2 points

3. (a) Soit $Q \subset \mathbb{R}^n$ un parallélépipède rectangle fermé et $f\colon Q \to \mathbb{R}$ une fonction bornée.

   i. Supposons que pour tout ϵ il existe une partition P_ϵ de Q telle que les sommes inférieure et supérieure satisfont

   $$U(f, P_\epsilon) - L(f, P_\epsilon) < \epsilon$$

   Démontrer que f est intégrable (au sens de Riemann).

   ii. Supposons que f est uniformément continue. Démontrer que f est intégrable (au sens de Riemann).

10 points

(b) Le but de cette question est de démontrer que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.
Vous pouvez utiliser le théorème de Fubini et la formule pour le changement de variables dans une intégrale double, *à condition que vous précisiez où vous les utilisez.*

   i. Soient $R \in (0, \infty)$ et $B_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Démontrer que

   $$\int_{B_R} e^{-(x^2+y^2)} \mathrm{d}(x, y) = (1 - e^{-R^2})\pi$$

   ii. Soit $a \in (0, \infty)$ et $C_a = [-a, a] \times [-a, a]$. Démontrer que

   $$\int_{B_a} e^{-(x^2+y^2)} \mathrm{d}(x, y) \leq \int_{C_a} e^{-(x^2+y^2)} \mathrm{d}(x, y) \leq \int_{B_{a\sqrt{2}}} e^{-(x^2+y^2)} \mathrm{d}(x, y)$$

   iii. En déduire que

   $$(1 - e^{-a^2})\pi \leq \left(\int_{-a}^{a} e^{-t^2} \mathrm{d}t \right)^2 \leq (1 - e^{-2a^2})\pi$$

   iv. En conclure que

   $$\lim_{a \to \infty} \int_{-a}^{a} e^{-t^2} \mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$$

10 points

4. (a) Enoncer le théorème de la divergence.

Donner la démonstration dans le cas où la région est un parallélépipède rectangle, c'est-à-dire de la forme $[a,b] \times [c,d] \times [e,f]$.

10 points

(b) i. Soit $F \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ le champ de vecteurs

$$F(x,y,z) = (x,y,z)$$

Soit S une surface fermée, C^1 par morceaux, qui est le bord d'une région bornée $R \subset \mathbb{R}^3$. Démontrer que le volume $V(R)$ de R est donné par le tiers du flux de F à travers S :

$$V(R) = \frac{1}{3} \int_S \langle F, \mathrm{d}n \rangle$$

où l'orientation de S est donnée par la normale extérieure.

2 points

ii. Soient $h \in (0, \infty)$ et $P = \{z = h\}$ un plan horizontal de hauteur h. Prenons $B \subset P$ un ouvert borné dont le bord est un lacet simple C^1 par morceaux. Nous écrivons $C \subset \mathbb{R}^3$ pour le cône avec sommet $(0,0,0)$ et base B, c'est à dire que

$$C = \{(tx, ty, th) : t \in [0,1],\ (x,y,h) \in B\}$$

Démontrer que le volume $V(C)$ du cône C est donné, en termes de l'aire $A(B)$ de sa base B et de sa hauteur h, par l'expression

$$V(C) = \frac{1}{3} h A(B)$$

Conseil : Quel est le flux de $F(x,y,z) = (x,y,z)$ à travers la base B ? Quel est le flux de F à travers le reste du bord de C ? Identifiez bien les points (x,y,z) où $F(x,y,z)$ est tangent au bord du cône.

8 points

① (a)(i) Montrons d'abord que si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une solution à l'équation $h' = \mu h$ alors $h(x)$ est un multiple scalaire de $e^{\mu x}$

En effet $x \mapsto h(x)e^{-\mu x}$ a pour dérivée

$$h'(x)e^{-\mu x} - \mu h(x)e^{-\mu x} = (h'(x) - \mu h(x))e^{-\mu x} = 0$$

et donc est une fonction constante.

Maintenant notons que la fonction $g_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{A}{\lambda - \mu} e^{\lambda x}$ est solution de $g' - \mu g \overset{(1)}{=} Ae^{\lambda x}$ lorsque $\lambda \neq \mu$:

On a $g_0' = \lambda . \frac{A}{\lambda-\mu} e^{\lambda x}$.

donc

$$g_0' - \mu g_0 = \lambda \frac{A}{\lambda-\mu} e^{\lambda x} - \mu . \frac{A}{\lambda-\mu} e^{\lambda x}$$

$$= (\lambda-\mu) . \frac{A}{\lambda-\mu} e^{\lambda x}$$

$$= Ae^{\lambda x}.$$

Constatons également que lorsque $\lambda = \mu$, c'est la fonction $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto Axe^{\mu x}$ qui est solution de (1) :

On a $g_1' = Ae^{\mu x} + A\mu x e^{\mu x}$

donc

$$g_1' - \mu g_1 = Ae^{\mu x} + A\mu x e^{\mu x} - \mu . Axe^{\mu x}$$

$$= Ae^{\mu x} \underset{(\lambda=\mu)}{=} Ae^{\lambda x}$$

Si g est une autre solution à (1), on a $h = g - g_i$ solution de $h' = \mu h$ puisque

$$h' = (g-g_i)' = g' - g_i'$$
$$= \mu g + Ae^{\lambda x} - (\mu g_i + Ae^{\lambda x})$$
$$= \mu g - \mu g_i$$
$$= \mu (g - g_i).$$

(avec $i = 0$ si $\lambda \neq \mu$ et $i = 1$ si $\lambda = \mu$).

Donc $g(x) = g_i(x) + h(x)$ où $h(x)$ est un multiple scalaire de $e^{\mu x}$, $Be^{\mu x}$ avec $B \in \mathbb{R}$ disons, c'est-à-dire que

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{A}{\lambda - \mu} e^{\lambda x} + Be^{\mu x} & \text{si } \lambda \neq \mu \\ Axe^{\lambda x} + Be^{\mu x} & \text{si } \lambda = \mu \end{cases}$$

comme requis.

(ii) Soit $g = f' - \mu f$. Alors

$$
\begin{aligned}
g' - \lambda g &= (f' - \mu f)' - \lambda (f' - \mu f) \\
&= f'' - \mu f' - \lambda f' + \lambda \mu f \\
&= f'' - (\lambda + \mu) f' + \lambda \mu f \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Par (i), il existe une constante A telle que $g(x) = Ae^{\lambda x}$

Donc $f' - \mu f = Ae^{\lambda x}$ et, par (i) à nouveau,

$$
f(x) = \begin{cases} \dfrac{A}{\lambda - \mu} e^{\lambda x} + Be^{\mu x} & \text{si } \lambda \neq \mu \\ (Ax + B) e^{\mu x} & \text{si } \lambda = \mu \end{cases}
$$

comme requis

(b) Appliquons la théorie établie au point (a) avec $\lambda = \mu = 5$.

Par (a), il existe des constantes A et B dans $\mathbb{R}$ telles que

$$f(x) = (Ax+B)e^{5x}.$$

On a alors

$$f'(x) = Ae^{5x} + 5(Ax+B)e^{5x}$$

et donc, comme $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$,

$$\begin{cases} B = 0 \\ A + 5B = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \end{cases}$$

de sorte que

$$f(x) = xe^{5x}.$$

② (a) (i)

f est dérivable en a dans la direction v lorsque la limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+hv)-f(a)}{h} \text{ existe.}$$

(ii)

f est différentiable en a lorsqu'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ telle que

$$\lim_{x \to a} \frac{\|f(x) - f(a) - L(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0$$

(iii)

On a

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{f(a+hv)-f(a)}{h} - df(v) \right\|$$

$$= \lim_{h\to 0} \left\| \frac{f(a+hv)-f(a)-h\,df(v)}{h} \right\|$$

$$= \lim_{n\to 0} \left\| \frac{f(a+hv)-f(a)-df(hv)}{h} \right\|$$

(par linéarité de df)

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\|f(a+hv)-f(a)-df(hv)\|}{\boxed{|h|\|v\|}} \right) . \|v\| \quad \|hv\|$$

$$= 0 . \|v\| = 0$$

(par différentiabilité de f en a)

Donc $\lim_{n\to 0} \left| \frac{f(a+hv)-f(a)}{h} - df(v) \right| = 0$

de sorte que

f est dérivable en a dans toutes les directions (la limite $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+hv)-f(a)}{h}$ existe $\forall v\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$)

et on a

$$\partial_v f(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+hv)-f(a)}{h} = df(v) .$$

(b) (i) Soit $(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. On a

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ \neq}} \frac{f((0,0)+h(v_1,v_2)) - f((0,0))}{h}$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ \neq}} \frac{f((hv_1,hv_2))}{h}$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ \neq}} \frac{(hv_1)^{p+2}\cdot hv_2}{h((hv_1)^4+(hv_2)^2)}$$

(puisque $h\neq 0$ et $(v_1,v_2)\neq(0,0)$ donc $(hv_1,hv_2)=h(v_1,v_2)\neq(0,0)$)

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ \neq}} \frac{h^{p+3} v_1^{p+2} v_2}{h^5 v_1^4 + h^3 v_2^2}$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ \neq}} \frac{h^{p} v_1^{p+2} v_2}{h^2 v_1^4 + v_2^2}$$

$$= \begin{array}{l} \xrightarrow{v_2=0,\ (v_1\neq 0)} 0 \\ \xrightarrow{v_2\neq 0} \begin{array}{l} \xrightarrow{p=0} \dfrac{v_1^2 v_2}{v_2^2} = \dfrac{v_1^2}{v_2} \\ \xrightarrow{p\geq 1} 0 \end{array} \end{array}$$

Donc f est dérivable en $(0,0)$ dans toutes les directions et

$$\partial_v f((0,0)) = \begin{cases} 0 & \text{si } v_2=0 \\ \dfrac{v_1^2}{v_2} & \text{si } v_2\neq 0 \end{cases} \quad \text{quand } p=0$$

$$\partial_v f((0,0)) = 0 \quad \text{quand } p\geq 1.$$

(ii) Si $p=0$, $v \mapsto \partial_v f((0,0))$ n'est pas linéaire puisque

$(1,0) \mapsto 0$

$(1,1) \mapsto 1$

$(1,0)+(1,1)=(2,1) \mapsto 4 \neq 0+1$

Donc f n'est pas diffé..iable en $(0,0)$ puisque si f est différentiable en $(0,0)$ alors $v \mapsto \partial_v f((0,0))$ est df et donc linéaire (par (a)(iii))

Supposons que $p>1$. On a $\partial_v f((0,0)) = 0 \; \forall v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Si elle existe, l'approximation linéaire de f autour de $(0,0)$ est unique et est l'application nulle.

et, si $(x,y) \neq (0,0)$,

$$0 \leq \frac{|f((x,y)) - f((0,0))|}{\|(x,y)-(0,0)\|} = \frac{\frac{|x^{p+2}\,y|}{x^4+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \frac{|x^p|\,|x^2y|}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}\,\frac{|x^p|\;2x^2|y|}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{|x^p|\,\cancel{(x^4+y^2)}}{\cancel{(x^4+y^2)}\sqrt{x^2+y^2}}$$

(car $(x^2-|y|)^2 \geq 0$ donc

$x^4-2x^2|y|+y^2 \geq 0$ donc

$x^4+y^2 \geq 2x^2|y|$)

$$= \frac{1}{2}\,\frac{|x^{p-1}|\,|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{1}{2}\,\frac{|x^{p-1}|\,\cancel{\sqrt{x^2+y^2}}}{\cancel{\sqrt{x^2+y^2}}}$$

(où $p-1 \geq 1$ puisque $p \geq 2$ / $|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$)

$$\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|f_p((x,y))-f_p(0,0))|}{\|(x,y)-(0,0)\|} = 0$ (par le théorème du Sandwich) de sorte que f_p est différentiable en $(0,0)$.

(iii) Lorsque $p=1$, la fonction f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

En effet,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{|f((x,y))-f((0,0))|}{\|(x,y)\|}}_{= \frac{|x^3y|}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}}$$

n'existe pas :

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} \frac{|x^3y|}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{|x^5|}{2x^4\sqrt{x^4+x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{|x^5|}{2|x^5|\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}$$

mais

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{|x^3y|}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{(x^4+x^2)\sqrt{2x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{x^4}{|x|(x^4+x^2)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{|x|}{x^2+1} = 0 \neq \frac{1}{2}$$

Alternative pour (b)(ii), cas $p=0$.

La fonction $f_0 : (x,y) \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \\ \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$

n'est pas continue en $(0,0)$ et donc pas différentiable en $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$ n'existe pas

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^4+x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2+1} = 0.$$

③ (a) (i) Supposons pour une contradiction que f n'est pas intégrable. Alors

$\mathcal{U}(f)-\mathcal{L}(f)>0$.

Soit $\varepsilon := \mathcal{U}(f)-\mathcal{L}(f)$.

Par hypothèse, il existe une partition P_ε de Q telle que

$$U(f,P_\varepsilon)-L(f,P_\varepsilon)<\varepsilon$$

Mais

$$\mathcal{U}(f)=\inf\{U(f,P) : P \text{ est une partition de } Q\}$$
$$\leq U(f,P_\varepsilon)$$

et

$$\mathcal{L}(f)=\sup\{L(f,P) : P \text{ est une partition de } Q\}$$
$$\geq L(f,P_\varepsilon)$$

de sorte que

$$\mathcal{U}(f)-\mathcal{L}(f)\leq U(f,P_\varepsilon)-L(f,P_\varepsilon)<\varepsilon,$$

une contradiction.

(ii) Soit $\varepsilon > 0$.

Comme f est uniformément continue, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que si $x, x' \in Q$ satisfont $\|x - x'\| < \delta_\varepsilon$ alors $|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{\text{Volume}(Q)}$. On peut construire une partition $P_\varepsilon = \{Q_1, \dots, Q_n\}$ telle que Q_j est entièrement contenu dans une boule ouverte de rayon $\frac{\delta}{2}$ $\forall j \in \{1, \dots, n\}$.

Par le théorème des bornes atteintes, f atteint ses bornes sur $\text{adh}(Q_j)$ $\forall j$ donc on peut définir

$$M_j(f) := \sup_{x \in Q_j} f(x), \; m_j(f) := \inf_{x \in Q_j} f(x) \in \mathbb{R}$$

et il existe $p_j, q_j \in \text{adh}(Q_j) \subseteq Q$ tels que

$f(p_j) = M_j(f)$ et $f(q_j) = m_j(f)$

Par le choix de δ,

$$M_j(f) - m_j(f) = f(p_j) - f(q_j) < \frac{\varepsilon}{\text{Volume}(Q)} \ \forall j$$

Alors

$$M(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) = \sum_{j=1}^{n} (M_j(f) - m_j(f)) \text{Volume}(Q_j)$$

$$< \sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon}{\text{Volume}(Q)} \text{Volume}(Q_j) = \frac{\varepsilon}{\text{Volume}(Q)} \sum_{j=1}^{n} \text{Volume}(Q_j)$$

$$= \varepsilon$$

Donc f est intégrable par le résultat démontré en (a)(i).

(b) Théorème de Fubini :

Pour $f : I \times J \to \mathbb{R}$ bornée et intégrable sur $R = I \times J$ telle que $f(\cdot, y)$ est intégrable sur I pour tout $y \in J$, on a

$$\iint_{I\times J} f(x,y)\, d(x,y) = \int_J \left(\int_I f(x,y) dx \right) dy$$

Si $f(x, \cdot)$ est intégrable sur J pour tout $x \in I$, on a

$$\iint_{I\times J} f(x,y)\, d(x,y) = \int_I \left(\int_J f(x,y) dy \right) dx$$

Formule du changement de variables :

Pour $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ un changement de variables tel que $J_f(a) \neq 0$ $\forall a \in \mathcal{U}$ (avec un ouvert $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$), si $g : V \to \mathbb{R}$ est une fonction intégrable et $V = f(\mathcal{U})$ alors $g \circ f \, |\det J_f| : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ est intégrable et

$$\int_V g(\bar{x}) \, d\bar{x} = \int_{\mathcal{U}} g(f(\bar{x})) \, |\det J_f(\bar{x})| \, d\bar{x}$$

(i)

$$\iint_{B_R} e^{-(x^2+y^2)} d(x,y)$$

$$= \iint_{]0,R[\times]0,2\pi[} \rho e^{-\rho^2} d(\rho,\theta)$$

(par la formule du changement de variables en coordonnées polaires)

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^R \rho e^{-\rho^2} d\rho\, d\theta \qquad -2\rho e^{-\rho^2}$$

(par le théorème de Fubini)

$$= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2} e^{-\rho^2} \right]_{\rho=0}^{R} d\theta$$

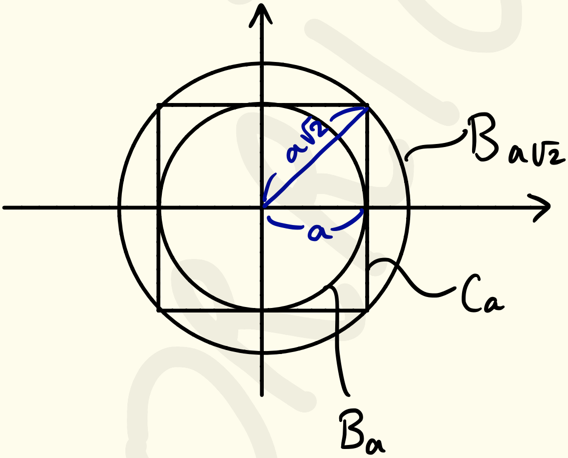
$$= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} e^{-R^2} - \left(-\frac{1}{2} \right) \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - e^{-R^2} \right) \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-e^{-R^2}\right)\cdot 2\pi$$

$$= \left(1-e^{-R^2}\right)\pi$$

(ii) On a $B_a \subseteq C_a \subseteq B_{a\sqrt{2}}$



et $e^{-(x^2+y^2)} \geqslant 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

donc

$$\iint_{B_a} e^{-(x^2+y^2)}\, d(x,y)$$

$$\leq \iint_{B_a} e^{-(x^2+y^2)}\, d(x,y) + \iint_{C_a \setminus B_a} e^{-(x^2+y^2)}\, d(x,y)$$

$$= \iint_{C_a} e^{-(x^2+y^2)}\, d(x,y)$$

$$\leq \iint_{B_{a\sqrt{2}}} e^{-(x^2+y^2)}\, d(x,y)$$

(de manière similaire).

(iii) On a

$$\left(\int_{-a}^{a} e^{-t^2} dt\right)^2 = \left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2} dx\right)\left(\int_{-a}^{a} e^{-y^2} dy\right)$$

$$= \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} e^{-x^2} \cdot e^{-y^2}\, dx\, dy$$

$$= \iint_{C_a} e^{-(x^2+y^2)} d(x,y)$$

(par le théorème de Fubini)

Donc

$$(1-e^{-a^2})\pi \overset{(b)(i)}{=} \iint_{B_a} e^{-(x^2+y^2)} d(x,y)$$

$$\underset{(b)(ii)}{\leq} \left(\int_{-a}^{a} e^{-t^2} dt\right)^2 \underset{(b)(ii)}{\leq} \iint_{B_{a\sqrt{2}}} e^{-(x^2+y^2)} d(x,y)$$

$$\underset{(b)(i)}{=} (1-e^{-(a\sqrt{2})^2})\pi$$

$$= (1-e^{-2a^2})\pi$$

(iv) Comme

$$\lim_{a\to\infty} (1-e^{-a^2})\pi = 1 . \pi = \pi$$

et $$\lim_{a\to\infty} (1-e^{-2a^2})\pi = 1 . \pi = \pi ,$$

on a

$$\lim_{a\to\infty} \left(\int_{-a}^{a} e^{-t^2} dt\right)^2 = \pi$$

par le théorème du Sandwich

et donc

$$\lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} .$$

④ (a) Théorème de la divergence :

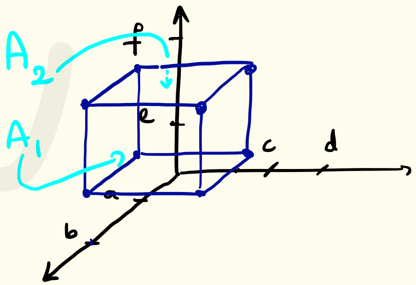
Pour tout $V \subseteq \mathbb{R}^3$ ouvert dont le bord ∂V est une surface compacte et C^1 par morceaux

et pour tout champ de vecteurs F de classe C^1 défini sur un ouvert contenant adh(V),

$$\iint_{\partial V} \langle F, dn \rangle = \iiint_V \langle \nabla, F \rangle \, d(x,y,z)$$

où ∂V est orientée de sorte que le vecteur normal soit extérieur.

Démonstration dans le cas où $V =]a,b[\times]c,d[\times]e,f[$:



(b) Considérons d'abord le flux de F à travers les deux faces orthogonales à l'axe Ox. Ce sont les faces A_1 et A_2 sur le schéma :

$$A_1 = \{(x,y,z) : x=b, (y,z) \in]c,d[\times]e,f[\}$$

$$A_2 = \{(x,y,z) : x=a, (y,z) \in]c,d[\times]e,f[\}$$

On a

$$\iint_{A_1} \langle F, dn \rangle = \iint_{]c,d[\times]e,f[} \langle F(b,y,z), (1,0,0) \rangle d(y,z)$$

$$= \int_e^f \int_c^d F_1(b,y,z)\, dy\, dz$$

(par le théorème de Fubini)

et, de manière similaire,

$$\iint_{A_2} \langle F, dn \rangle = -\int_e^f \int_c^d F_1(a,y,z) dy dz$$

Or, par le théorème fondamental de l'analyse,

$$F_1(b,y,z) - F_1(a,y,z) = \int_a^b \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z)\,dx$$

et donc

$$\iint_{A_1 \cup A_2} \langle F, dn \rangle = \iint_{A_1} \langle F, dn \rangle + \iint_{A_2} \langle F, dn \rangle$$

$$= \int_e^f \int_c^d \big(F_1(b,y,z) - F_1(a,y,z) \big)\,dy\,dz$$

$$= \int_e^f \int_c^d \int_a^b \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \iiint_{]a,b[\times]c,d[\times]e,f[} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z)\,d(x,y,z)$$

(par le théorème de Fubini)

$$= \iiint_V \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z)\,d(x,y,z)$$

De la même manière, on obtient

$$\iint_{A_3 \cup A_4} \langle F, dn \rangle = \iiint_V \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,z)\,d(x,y,z)$$

et $$\iint_{A_5 \cup A_6} \langle F, dn \rangle = \iiint_V \frac{\partial F_3}{\partial z}(x,y,z)\, d(x,y,z)$$

où A_3, A_4, A_5 et A_6 sont les faces de V qui correspondent à $y=d$, $y=c$, $z=f$ et $z=e$ respectivement.

En sommant les 3 résultats, on obtient

$$\iint_{\partial V} \langle F, dn \rangle = \iint_{A_1 \cup A_2} \langle F, dn \rangle + \iint_{A_3 \cup A_4} \langle F, dn \rangle + \iint_{A_5 \cup A_6} \langle F, dn \rangle$$

$$= \iiint_V \frac{\partial F_1}{\partial x}\, d(x,y,z) + \iiint_V \frac{\partial F_2}{\partial y}\, d(x,y,z) + \iiint_V \frac{\partial F_3}{\partial z}\, d(x,y,z)$$

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) d(x,y,z)$$

$$= \iiint_V \langle \nabla, F \rangle\, d(x,y,z)$$

(b) (i) On a $\langle \nabla, F \rangle = 1 + 1 + 1 = 3$ et

donc $V(R) = \iiint_R d(x,y,z)$

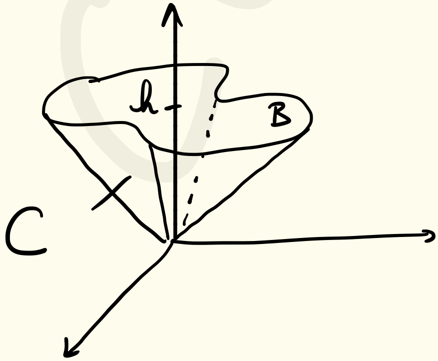
$$= \frac{1}{3} \iiint_R 3 \, d(x,y,z)$$

$$= \frac{1}{3} \iiint_R \langle \nabla, F \rangle \, d(x,y,z)$$

$$= \frac{1}{3} \iint_S \langle F, dn \rangle$$

où S est orientée de sorte à ce que la normale soit extérieure (par le théorème de la divergence).

(ii)



Par (b)(i), le volume de C est donné par

$$V(C) = \frac{1}{3}\iint_{\partial C} < F, dn >$$

$$= \frac{1}{3}\left[\iint_{B} < F, dn > + \iint_{L} < F, dn >\right]$$

(où L est la surface latérale de C $(L = \partial C \setminus B)$)

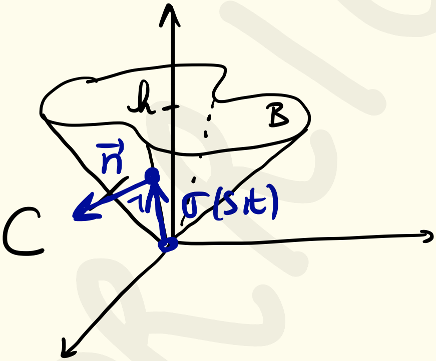
$$= \frac{1}{3}\left[\iint_{B} < \overbrace{F(x,y,h)}^{\overset{h}{\Vert}}, (0,0,1) > d(x,y)\right.$$

$$\left. + \iint_{D} < F(\sigma(s,t)), \vec{n} > d(x,y)\right]$$

(où $\sigma : D \to \mathbb{R}^3, (s,t) \mapsto \sigma(s,t)$ est une paramétrisation de L et $\vec{n} = \sigma_s \times \sigma_t$ est sa normale induite.)

$$= \frac{1}{3}\left[h\iint_B d(x,y) + 0\right]$$

(car $\forall (s,t) \in D$, $F(\sigma(s,t)) = \sigma(s,t)$ est un vecteur tangent à L de sorte que $< F(\sigma(s,t)), \vec{n} > = 0$)



$$= \frac{1}{3} h A(B)$$

(car $\iint_B d(x,y) = A(B)$.)

Math-f102

Voici probablement le cours le plus abstrait auquel tu auras affaire en BA1. Soudain, on te parle d’espaces vectoriels, d’applications linéaires et de groupes dans tous les sens, et c’est vrai qu’on se sent un peu perdu.e au début. Ne t’inquiète pas, c’est normal mais tu devras t’accrocher. Le fonctionnement du cours d’algèbre est un peu comme celui de CDI. Il y a la théorie d’une part, et les séances d’exercices d’autre part. Pour ce cours-ci, encore plus que pour tous les autres, il faut vraiment aller aux séances d’exercices. Les assistant.e.s pourront t’aider, et c’est uniquement en t’entraînant que ça marchera :) Comme l’indique le mot « algorithmique », pour résoudre les exercices d’algèbre linéaire, il y a souvent une marche à suivre. C’est important de bien comprendre pourquoi on suit telle ou telle démarche, donc ne néglige jamais la théorie. Fais les exercices à 100% et ne baisse pas les bras, c’est en essayant et en réessayant que ça fonctionne!

Cercle des Sciences

ALGEBRE LINEAIRE ET GEOMETRIE
Examen du 13 janvier 2015 — Test

NOM : Prénom : Note : /30

BA1 sc. math. ☐ BA1 sc. phys. ☐

POUR LES QUESTIONS 1 À 8, VOUS NE DEVEZ FOURNIR QUE LA RÉPONSE, DANS LES CASES PRÉVUES À CET EFFET. POUR LA QUESTION 9, VOTRE RÉPONSE DOIT ÊTRE JUSTIFIÉE SOIGNEUSEMENT.

---

1. (**2 points**) Soient V et W deux espaces vectoriels réels, $E = \{e_1, \ldots, e_d\}$ une base de V et $F = \{f_1, \ldots, f_k\}$ une base de W. Soit A une transformation linéaire de V dans W. Définir la matrice $m_{F,E}(A) = [A_{i,j}]$ de l'application A dans les bases E et F.

2. (**2 points**) Soient V un espace vectoriel et X un sous-ensemble de V. Définir X est une partie libre.

3. (**4 points**) Calculer le plus grand commun diviseur de 845 et de 2015. Trouver les entiers x et y tels que $845x + 2015y = GCD(845, 2015)$.

$GCD(845, 2015) =$

$x =$

$y =$

4. (**2 points**) Trouver un entier x tel que le reste de la division de $42x$ par 2015 donne 1.

$x =$

5. (**6 points**) Dans l'espace vectoriel réel des polynômes $\mathbb{R}[X]$, considérer les ensembles suivants

$$W_1 = \{1, 1 + 2X + X^3, 1 + 2X + 2X^3\},$$

$$W_2 = \{1, 1 + 2X + X^3\},$$

$$W_3 = \{1, 1 + 2X + X^3, 1 + 2X + 2X^3, 1 + 2X + 3X^3\}.$$

Donner les dimensions des sous-espaces vectoriels engendrés par W_1, W_2 et W_3.

$\dim_{\mathbb{R}}(< W_1 >) =$

$\dim_{\mathbb{R}}(< W_2 >) =$

$\dim_{\mathbb{R}}(< W_3 >) =$

6. (**4 points**) Soit a la matrice de $M_{4\times 8}(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Mettre a sous forme échelonnée réduite.

7. (**4 points**) Soit l'application linéaire A définie par

$$A : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^4 : (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) \mapsto (x_1 + x_2, 3x_1 + 2x_3, x_5, x_8 + 2x_7).$$

Que vaut $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Ker}(A))$? et $\mathrm{rang}(A)$?

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Ker}(A)) \quad = \qquad \qquad$$

$$\mathrm{rang}(A) \quad = \qquad \qquad$$

8. (**4 points**) Donner les solutions complexes sous formes polaire et cartésienne de l'équation $X^2 = i$.

9. (**2 points**) Donner un exemple d'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ non-dégénérée non-injective et non-surjective et justifier pourquoi cette application n'est ni dégénérée, ni injective, ni surjective.

ALGEBRE LINEAIRE ET GEOMETRIE

Examen du 13 janvier 2015 — Problèmes

NOM : Prénom :

Note : /70

BA1 sc. math. ☐ BA1 sc. phys. ☐

Veillez à justifier soigneusement toutes vos réponses. Notre appréciation de votre travail dépend de la qualité de votre rédaction.

---

1. (**12 points**) Dans $\mathbb{R}^3$, résoudre le système

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y - z = 2\alpha\beta \\ \alpha x - \beta y + z = 2\alpha\beta \\ -\alpha x + \beta y + z = 2\beta \end{cases}$$

en discutant d'après les valeurs des paramètres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (indiquer soigneusement à chaque étape les transformations utilisées pour passer d'un système à un autre équivalent).

2. (**10 points**) Donner des équations cartésienne et paramétriques du plan de $\mathbb{R}^3$ passant par la droite d'équations

$$D_1 \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + y - z - 1 = 0 \\ 2x - y + z + 3 = 0 \end{array} \right.$$

et parallèle à la droite d'équations

$$D_2 \equiv \left\{ \begin{array}{l} 4x + y - z - 1 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{array} \right.$$

3. (**12 points**) Dans l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites, est-ce que le sous-ensemble $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ des suites presque nulles est un sous-espace vectoriel? Nous rappelons que

$$\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} | \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \ x_n = 0\}.$$

En est-il de même pour l'ensemble E suivant

$$E = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} | \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \ x_n = 0 \text{ et } x_0 = 1\}?$$

De plus, donner une base de $< \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} >$.

4. (**12 points**) Soit A l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_3 + 5x_2, x_1 + 3x_2 + 3x_4, x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4).$$

Donner une base du noyau de A, $\mathrm{Ker}(A)$, et une base de l'image de A, $\mathrm{Im}(A)$.

5. (**12 points**) Dans l'espace vectoriel réel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, est-ce que les sous-espaces engendrés par les ensembles X_1 et X_2 des fonctions suivantes sont égaux, avec $X_1 = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ et $X_2 = \{f_5, f_6, f_7\}$ où

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 + 2x + 1$$

$$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3 + 1$$

$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto -x^3$$

$$f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 5$$

$$f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x^2 + 4x + 7$$

$$f_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 + 2x + 2$$

$$f_7 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3?$$

Dans tous les cas, quelles sont les dimensions de $< X_1 >$ et $< X_2 >$? Donner une base pour chacun de ces sous-espaces.

6. (**12 points**) Soit α un réel. Dans $\mathbb{R}^4$, considérer les sous-espaces vectoriels réels suivants

$$\begin{array}{rcl} W_1 & = & <\{(1,0,0,0),(1,1,0,0)\}>, \\ W_2 & = & <\{(0,0,1,0),(0,0,1,-1)\}>, \\ W_\alpha & = & <\{(1,0,\alpha,0),(-1,0,-1,0)\}>. \end{array}$$

Déterminer, en discutant du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, les sous-espaces W_α, $W_1 + W_\alpha$, $W_1 + W_2 + W_\alpha$ et $(W_1 + W_\alpha) \cap W_2$, en donnant une base de chacun de ceux-ci. Évaluer les nombres suivants

$$\dim_{\mathbb{R}}(W_\alpha), \dim_{\mathbb{R}}(W_1 + W_\alpha), \dim_{\mathbb{R}}(W_1 + W_2 + W_\alpha) \text{ et } \dim_{\mathbb{R}}((W_1 + W_\alpha) \cap W_2).$$

ALGEBRE LINEAIRE ET GEOMETRIE
Examen du 2 juin 2015 — Test

NOM : Prénom : Note : /30

BA1 sc. math. ☐ BA1 sc. phys. ☐

Pour les questions 1 à 5, vous ne devez fournir que la réponse, dans les cases prévues à cet effet. Pour les questions 6 et 7, votre réponse doit être justifiée soigneusement.

---

1. (**2 points**) Soient V un espace vectoriel réel de dimension finie n et $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de V. Définissez la base duale $E^* \subseteq V^*$ de la base E.

2. (**2 points**) Soit V un espace euclidien. Définissez une isométrie linéaire (ou centrée) de V.

3. (**4 points**) Que valent la trace et le déterminant de la matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ suivante?

$$a = \begin{bmatrix} [2]_7 & [1]_7 & [4]_7 \\ [1]_7 & [0]_7 & [3]_7 \\ [1]_7 & [1]_7 & [5]_7 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{tr}(a) =$ $\det(a) =$

4. (**6 points**) Listez tous les éléments de $\mathfrak{S}_3$ (donnez-en les décompositions en cycles disjoints).

Donnez deux permutations τ et σ de $\mathfrak{S}_3$ telles que $\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$.

$\sigma =$

$\tau =$

4. (**2 points**) Donnez une permutation σ de $\mathfrak{S}_{11}$ d'ordre 14.

$$\sigma \quad =$$

6. (**8 points**) Vrai ou faux? Justifiez ou donnez un contre-exemple.
Soit $a \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

1. Si a est symétrique, alors a est diagonalisable.
2. Si a est orthogonale, alors a est diagonalisable.
3. Si a est symétrique, alors a est inversible.
4. Si a est orthogonale, alors a est inversible.

7. (**6 points**) Soit $V = \mathbb{R}_3[x] := \{a + bx + cx^2 + dx^3 \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$.
Soit $A : V \to V : p \mapsto A(p) := 5p' - 2p$. Montrez que A est linéaire et donnez la matrice de A dans la base $E := \{1, x, x^2, x^3\}$.

ALGEBRE LINEAIRE ET GEOMETRIE

Examen du 2 juin 2015 — Problèmes

NOM : Prénom :

Note : /70

BA1 sc. math. ☐ BA1 sc. phys. ☐

VEILLEZ À JUSTIFIER SOIGNEUSEMENT TOUTES VOS RÉPONSES. NOTRE APPRÉCIATION DE VOTRE TRAVAIL DÉPEND DE LA QUALITÉ DE VOTRE RÉDACTION.

---

1. (**10 points**) Soit $q \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ la matrice symétrique donnée par

$$q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Trouvez une matrice orthogonale a telle que $a^T qa$ est diagonale.

2. (**10 points**) Dans l'espace affine $\mathcal{A}(\mathbb{R}^3)$, soit Q la quadrique d'équation

$$x^2 + 2y^2 + z^2 + 6xz + 4xy + 4yz - 4y + 2x - 4z + 1 = 0.$$

A l'aide d'isométries affines, réduisez l'équation de Q à une forme canonique. Quel est le type de cette quadrique ?

3. (**20 points**) Soit $a \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$ définie par

$$a = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & \alpha \end{bmatrix} \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Pour quelles valeurs de α, la matrice a est-elle diagonalisable?
Pour les valeurs de α pour lesquelles a n'est pas diagonalisable, déterminez la forme de Jordan de a et donnez une matrice c telle que $c^{-1}ac$ est sous forme de Jordan.

4. **(10 points)** Soient W_1 et W_2 deux sous-espaces d'un espace euclidien de dimension finie. Prouvez que

$$(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$$

et

$$(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp.$$

5. (**10 points**) Soit $V = \mathbb{C}^3$ l'espace vectoriel complexe. Munissons-le du produit suivant:

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = x_1\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2} + 4x_3\overline{y_3} + ix_1\overline{y_2} - ix_2\overline{y_1}.$$

a) (**5 points**) Vérifiez que V muni de ce produit est un espace hermitien.

b) (**5 points**) Soit W le sous-espace de V engendré par les vecteurs $\{(1, 0, 1), (0, i, 1), (2i, -1, 3i)\}$. Transformez cette partie génératrice en une base orthonormée de W.

6. (**10 points**) Soient p et q les formes quadratiques sur $\mathbb{R}^4$ définies pour tout $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ par

$$p(v) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2t^2 - 2xy - 2yz - 2zt + 2tx, \quad \text{et}$$

$$q(v) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 4xy + 6yz - 2xt + 4zt.$$

Déterminez si p et q sont définies positives, négatives, semi-définies positives, négatives ou indéfinies.

ALGEBRE LINEAIRE ET GEOMETRIE
Examen du 1 juin 2016 — Test

NOM : Prénom : Note : /30

BA1 sc. math. ☐ BA1 sc. phys. ☐

POUR LES QUESTIONS 1 À 8(i), VOUS DEVEZ FOURNIR LA RÉPONSE DANS LES CASES PRÉVUES À CET EFFET. POUR LA QUESTION 8(ii), JUSTIFIEZ SOIGNEUSEMENT.

---

1. (**2 points**) Soit V un espace vectoriel réel. Quelles sont les conditions pour qu'une application $\bullet : V \times V \to \mathbb{R}$ soit un produit scalaire ?

2. (**2 points**) Soit V un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps commutatif K et soit $A \in Hom(V, V)$. Définissez le polynôme minimal de A.

3. (**6 points**) Soit l'application $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto (x - y + 5z, 3x + 2y + z, 4x + y + z)$. Donnez la matrice de A dans la base:

- canonique E,
- $F = \{(1, 1, 0), (2, -3, 0), (1, 2, 1)\}$.

Donnez la matrice de changement de base b de la base E à la base F.

4. (**3 points**) Calculez la signature $\operatorname{sign}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3/2 \\ 0 & -3/2 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{}$

5. (**4 points**) Donnez un exemple d'une matrice A réelle avec $A \neq Id$:

- symétrique avec $det(A) = 1$,
- non diagonalisable.

6. (**4 points**) Calculez l'inverse de a dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec: (Indiquez $\nexists$ s'il n'y en a pas.)

	$n = 33$	$n = 35$
$a = 14$		
$a = 16$		

7. (**4 points**) Complétez la matrice A suivante à coefficients réels pour obtenir une matrice de rotation:

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & 1 & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \end{pmatrix}.$$

8. (**5 points**) Soient les permutations $\gamma = (1,9,7)(3,4)(5,8)(2,11,10)$, $\alpha = (1,3,4,5)(2,6)(7,8,9)(10,11)$ et $\beta = (1,6)(2,8)(3,7,5)(10)(9,11)$ de $\mathfrak{S}_{11}$.

(i) Calculez

$\alpha \circ \beta =$

$\alpha^{-1} =$

$\beta^{2020} =$

(ii) Existe-t-il une permutation ρ de $\mathfrak{S}_{11}$ telle que $\rho^{-1} \circ \alpha \circ \rho = \beta$? Si oui, donnez une telle permutation. Si non, justifiez.

ALGEBRE LINEAIRE ET GEOMETRIE
Examen du 1 juin 2016 — Problèmes

Note : /70

NOM :

Prénom :

BA1 sc. math. ☐ BA1 sc. phys. ☐

VEILLEZ À JUSTIFIER SOIGNEUSEMENT TOUTES VOS RÉPONSES. NOTRE APPRÉCIATION DE VOTRE TRAVAIL DÉPEND DE LA QUALITÉ DE VOTRE RÉDACTION.

---

1. (**10 points**) Soit V l'espace vectoriel réel des polynômes en x de degré $\leqslant 2$ à coefficients réels. Considérons les formes linéaires suivantes sur V :

$$f : V \to \mathbb{R} : p \mapsto p(0)$$
$$g : V \to \mathbb{R} : p \mapsto p(1)$$
$$h : V \to \mathbb{R} : p \mapsto p(2)$$

a) (**5 points**) Prouvez que $\{f, g, h\}$ est une base de V^*.

On a le bon nombre d'éléments donc montrons que c'est libre..

$\lambda f(p) + \mu g(p) + \gamma h(p) = 0 \quad \forall p \in V$

$\Leftrightarrow \lambda p(0) + \mu p(1) + \gamma p(2) = 0 \quad \forall p \in V$

Si $p = (x-1)(x-2) \longrightarrow \lambda . 2 + \mu . 0 + \gamma . 0 = 0 \leadsto \lambda = 0$

Si $p = (x-1)x \longrightarrow \lambda . 0 + \mu . 0 + \gamma . 2 = 0 \leadsto \gamma = 0$

Si $p = x(x-2) \longrightarrow \lambda . 0 + \mu . (-1) + \gamma . 0 = 0 \leadsto \mu = 0$

$\Rightarrow$ libre $\Rightarrow$ c'est une base.

b) (**5 points**) Donnez une base de V dont $\{f, g, h\}$ est la base duale.

Base de $V = \{p_1, p_2, p_3\}$ tq $f(p_1) = 1, f(p_2) = f(p_3) = 0$

$g(p_1) = g(p_3) = 0, \ g(p_2) = 1$

$h(p_1) = h(p_2) = 0, \ h(p_3) = 1$

$\leadsto$ p_1 a 1 et 2 pour racines

$\leadsto$ p_2 a 0 et 2 pour racines

$\leadsto$ p_3 a 0 et 1 pour racines

$\Rightarrow p_1 = (x-1)(x-2)$

$p_2 = x(x-2)$

$p_3 = x(x-1)$

2. (**20 points**) Soit $a \in Hom(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^3)$ définie par la matrice

$$a = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculez sa forme canonique de Jordan, une matrice b telle que $b^{-1}ab$ soit sous forme de Jordan, et le polynôme minimal de la transformation associée.

$$P_\lambda(a) = \det(a - \lambda \mathrm{Id}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left[(3-\lambda)(1-\lambda) - (-1)(1)\right] \quad \text{(selon la colonne 3)}$$

$$= (2-\lambda)(3-3\lambda-\lambda+\lambda^2+1) = (2-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+4)$$

$$= 2\lambda^2+8\lambda+8-\lambda^3+4\lambda^2-4\lambda$$

$$= -\lambda^3+6\lambda^2-12\lambda+8 = -(\lambda-2)^3$$

$\boxed{\lambda = 2}$: Calculons $\mathrm{Ker}(a - 2\mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(M)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow V_2 = \{x_2(-1,1,0) + x_3(0,0,1) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

- $\mathrm{Ker}(M) : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathrm{Dim}(\mathrm{Ker}(M)) = 2 \neq \mathrm{Dim}\, V = 3$

- $\mathrm{Ker}(M^2) : \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathrm{Dim}(\mathrm{Ker}(M^2)) = 3 = \mathrm{Dim}\, V$$

$\Rightarrow$ Le polymôme minimal $m_A(x)$ est égal à $(x-2)^{\overset{\cancel{2}}{2}}$

Pour trouver la base $B = \{(u, v_1, v_2)\}$

- $v_2 \in \mathrm{Ker}(M^2)/\mathrm{Ker}(M)$: $\mathrm{Ker}(M^2) = \langle (1,0,0), (0,1,0), \cancel{(0,0,1)} \rangle$ ↳ à rejeter car $\in \mathrm{Ker}(M)$
  $\rightsquigarrow v_2 = (1,0,0)$ $\qquad v_2 = \hookleftarrow$
- $v_1 = M \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$
- $u \in \mathrm{Ker}(M)/\mathrm{Vect}(v_1)$: soit $(-1,1,0)$, soit $(0,0,1)$

Prenons $u = (-1,1,0)$

$$\rightsquigarrow b = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ \underbrace{0}_{u} & \underbrace{-1}_{v_1} & \underbrace{0}_{v_2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow b^{-1} \cdot a \cdot b = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. **(10 points)** Soit $q \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice symétrique définie par

$$q = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Trouvez une matrice orthogonale a telle que $a^\intercal q a$ est diagonale.

$$P_\lambda(q) = \det(q - \lambda \mathrm{Id}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & -2 \\ 4 & 2-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)\left[(2-\lambda)(-1-\lambda) - 4\right] - 4\left[4(-1-\lambda) - 4\right] + (-2)\left[4\cdot(-2) - (-2)(2-\lambda)\right]$$

$$= (2-\lambda)(-2-2\lambda+\lambda+\lambda^2-4) - 4(-4-4\lambda-4) + (-2)(-8+4-2\lambda)$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2-\lambda-6) - 4(-4\lambda-8) - 2(-2\lambda-4)$$

$$= 2\lambda^2 - 2\lambda - 12 - \lambda^3 + \lambda^2 + 6\lambda + 16\lambda + 32 + 4\lambda + 8$$

$$= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 24\lambda + 28$$

Par Horner : $= -(\lambda+2)^2(\lambda-7)$

⇝ $\mathrm{Spec} = \{-2, 7\}$

$\boxed{\lambda = -2}$: $\mathrm{Ker}(q + 2\mathrm{Id})$: $\begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ⇝ $\begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 2x_1 + 2x_2 \end{cases}$

$\Rightarrow V_{-2} = \{x_1(1,0,2) + x_2(0,1,2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$

$\boxed{\lambda = 7}$: $\mathrm{Ker}(q - 7\mathrm{Id})$: $\begin{pmatrix} -5 & 4 & -2 \\ 4 & -5 & -2 \\ -2 & -2 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ⇝ $\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 = x_1 \\ x_3 = -\frac{1}{2} x_2 \end{cases}$

$\Rightarrow V_7 = \{x_2(1, 1, -\frac{1}{2}) \mid x_2 \in \mathbb{R}\}$

Diagonalisable car $\sum_{\lambda_i \in \mathrm{spec}} \mu_{\text{géo}}(\lambda_i) = \mathrm{Dim}\, V$

$2 + 1 = 3 = \mathrm{Dim}\, V$

⇝ La matrice a est composée des vecteurs propres mis en colonnes.

⚠ L'ordre a de l'importance ⚠

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

⇝ $a^\intercal . q . a = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

4. **(10 points)** Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, soit Q la quadrique d'équation

$$2x^2 + 2y^2 - z^2 + 8xy - 4xz - 4yz - 2x + y - 2 = 0.$$

A l'aide d'isométries, réduisez l'équation de Q à une forme canonique euclidienne. Quel est le type de cette quadrique ?

$$\rightsquigarrow Q \equiv (x,y,z)\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{matrice } q}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (-2,0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 2 = 0$$

1) Diagonaliser q et trouver la base orthonormée.

A l'exercice 3 on a diagonalisé q : $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ avec les vecteurs $(1, 1, -\frac{1}{2})$, $(1, 0, 2)$ et $(0, 1, 2)$

↝ Base orthonormée $= \{(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}); (\frac{1}{\sqrt{5}}; 0, \frac{2}{\sqrt{5}}); (0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$

(vecteurs divisés par leur norme).

$$\rightsquigarrow A = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{5} & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/\sqrt{5} \\ -1/3 & 2/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \quad ; \quad A^T q A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Posons $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}$

L'équation devient : $(X_1, Y_1, Z_1) \cdot A^T q A \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} + (-2, 0, 0) A \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} - 2 = 0$

$$\Rightarrow (X_1, Y_1, Z_1)\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} + (\underset{p_1}{\frac{-4}{3}}; \underset{p_2}{\frac{-2}{\sqrt{5}}}; \underset{p_3}{0})\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} - 2 = 0$$

$$\equiv 7X_1^2 - 2Y_1^2 - 2Z_1^2 - \frac{4}{3}X_1 - \frac{2}{\sqrt{5}}Y_1 - 2 = 0$$

2) Translatons pour enlever les termes en X_1 et Y_2.

Posons : $X_1 = X - (\frac{-4}{3}) \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2} = X + \frac{2}{21}$ ↝ Techique : Poser $X_1 = X - (p_i) \cdot \frac{1}{\lambda_i} \cdot \frac{1}{2}$

$Y_1 = Y - (\frac{-2}{\sqrt{5}}) \cdot \frac{1}{-2} \cdot \frac{1}{2} = Y - \frac{1}{2\sqrt{5}}$

$Z_1 = Z$ (car pas de Z_1 à éliminer dans l'équation)

$$\rightsquigarrow 7\left(X + \frac{2}{21}\right)^2 - 2\left(Y - \frac{1}{2\sqrt{5}}\right)^2 - 2Z^2 - \frac{4}{3}\left(X + \frac{2}{21}\right) - \frac{2}{\sqrt{5}}\left(Y - \frac{1}{2\sqrt{5}}\right) - 2 = 0$$

$$7\left(X^2 + \frac{4}{21}X + \frac{4}{441}\right) - 2\left(Y^2 - \frac{Y}{\sqrt{5}} + \frac{1}{10}\right) - 2Z^2 - \frac{4}{3}X - \frac{8}{63} - \frac{2}{\sqrt{5}}Y + \frac{1}{5} - 2 = 0$$

$$7X^2 - 2Y^2 - 2Z^2 = \frac{1237}{630}$$

↝ Hyperboloïde à 2 nappes.

5. **(10 points)** Soit $x = (1, 0, 6, 4, 1) \in \mathbb{R}^5$. Calculez la projection orthogonale de x sur le sous-espace de $\mathbb{R}^5$ engendré par les vecteurs $\vec{v_1} = (1, 0, 0, 0, 1), \vec{v_2} = (1, -1, 2, 1, 3)$ et $\vec{v_3} = (-1, 0, 2, 2, 1)$.

Tout d'abord, on doit au moins orthogonaliser la base $\{ v_1, v_2, v_3 \}$.

Utilisons le procédé d'orthonormalisation de Gram Schmidt.

Appelons V_1 le sous-espace engendré par $\vec{v}_1$.

$V_1 = \text{Vect}(\vec{v}_1) \quad : \cdot \; \|\vec{v}_1\| = \sqrt{1^2+0^2+0^2+0^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\leadsto V_1 = \text{Vect}(\vec{u}_1) \quad \cdot \; \vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \vec{v}_1 := \vec{v}_1$ normalisé

$$V_2 = \text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{v}_2) = \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{y}_2) :$$

$$\begin{aligned} \vec{y}_2 &= \vec{v}_2 - \text{Proj}_{V_1}(\vec{v}_2) \\ &= \vec{v}_2 - \langle \vec{v}_2, \vec{u}_1 \rangle . \vec{u}_1 \\ &= \vec{v}_2 - \langle \vec{v}_2, \tfrac{1}{\sqrt{2}} . \vec{v}_1 \rangle . \tfrac{1}{\sqrt{2}} \vec{v}_1 \\ &= \vec{v}_2 - \tfrac{1}{2} \cdot \langle \vec{v}_2, \vec{v}_1 \rangle . \vec{v}_1 \end{aligned}$$

$$\vec{y}_2 = \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} . (2) . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ ($\leadsto$ Vecteur ortogonalisé).

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{y}_2}{\|\vec{y}_2\|} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ ($\leadsto$ Vecteur normalisé).

$\leadsto V_2 = \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2) :$

$$\begin{aligned} \vec{y}_3 &= \vec{v}_3 - \text{Proj}_{V_2}(\vec{v}_3) = \vec{v}_3 - \left(\langle \vec{v}_3, \vec{u}_1 \rangle . \vec{u}_1 + \langle \vec{v}_3, \vec{u}_2 \rangle . \vec{u}_2 \right) \\ &= \vec{v}_3 - \left(\underbrace{\langle \vec{v}_3 ; \tfrac{1}{\sqrt{2}} \vec{v}_1 \rangle . \tfrac{1}{\sqrt{2}} \vec{v}_1}_{=0} + \langle \vec{v}_3 ; \tfrac{1}{2\sqrt{2}} . \vec{v}_2 \rangle . \tfrac{1}{2\sqrt{2}} . v_2 \right) \\ &= \vec{v}_3 - \left(0 + \tfrac{1}{2\sqrt{2}} . \tfrac{1}{2\sqrt{2}} . \langle \vec{v}_3 ; \vec{v}_2 \rangle . \vec{v}_2 \right) = \vec{v}_3 - \tfrac{1}{8} . (8) . \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\vec{y}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ ($\leadsto$ Vecteur orthogonalisé)

$$\vec{u}_3 = \frac{\vec{y}_3}{\|\vec{y}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} . \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ ($\leadsto$ Vecteur normalisé).

$\Rightarrow$ Base orthonormale $\mathcal{B} = \{ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \}$

On sait que si on a une base orthogonale $F = \{e_1, \dots, e_n\}$ de $W \subseteq V$, la proj orth de $v \in V$ sur W ~~un ss esp de V~~ est $\omega_0 := \sum_i^n \frac{\langle v, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle} \cdot e_i$

Ici la base est déjà normalisée donc $\omega_0 = \sum_i \langle v, e_i \rangle \cdot e_i$

6. **(10 points)** Soient p et q les formes quadratiques de $\mathbb{R}^4$ définies pour tout $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ par

$$p(v) = 2x^2 + y^2 + 2z^2 + t^2 + 2xy + 2yt + 2zt + 2tx,$$

$$q(v) = 5x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 2t^2 + 4xy - 2yz - 6xz - 2zt.$$

Déterminez si p et q sont définies positives, négatives, semi-définies positives, négatives ou indéfinies.

- Matrice associée à $p(v) = A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id) = \lambda^4 - 6\lambda^3 + 9\lambda^2 - \lambda - 1$

Après plusieurs essais pour factoriser, on réalise que l'on n'y arrive pas avec les méthodes habituelles. (racines pas entières)

⇝ On ne peut pas déterminer les valeurs propres.

En revanche, si on trouve une valeur propre positive et une autre négative, on peut dire que la forme quadratique est indéfinie.

① Prenons un intervalle $\subseteq \mathbb{R}^+$. Si ~~les~~ images dos bornes sont de signe opposés, on en déduit que la foncion $P_\lambda(A)$ s'annule car elle passe par $y = 0$ (voir CDI 1 : théorème de la valeur intermédiaire).

Donc on aurait une valeur propre $\in \mathbb{R}^+$ (positive)

Prenons à présent un intervalle $\subseteq \mathbb{R}^-$ et appliquons le même raisonnement pour trouver une valeur propre négative.

Soit $[0, 1]$; $P_A(0) = -1$
$P_A(1) = 2$ ⇝ Valeur propre $\in]0, 1[$ positive

Soit $[-1, 0]$; $P_A(0) = -1$
$P_A(-1) = 16$ ⇝ Valeur propre $\in]-1, 0[$ négative

$\Rightarrow$ $p(v)$ est indéfinie.

- Matrice associée à $q(v) = B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$P_B(\lambda) = \lambda^4 - 15\lambda^3 + 67\lambda^2 - 110\lambda + 54$

$q(v)$ est définie positive ssi les coefficients de son polynôme caractéristique associé alternent en signe.

$\Rightarrow$ $q(v)$ est définie positive.

CORRECTION DE L'EXAMEN D'ALGÈBRE 2017

1. Théorie

1.1. **Question 1.** Soit A une matrice à coefficients réels de taille $n \times n$. Donnez la définitions du déterminant de A.
Correction : $\mathrm{Det}(A) = \sum_{\sigma \in \sigma_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\,\sigma(i)}$. On pourrait aussi parler de l'unique forme multilinéaire alternée de $V^n \to \mathbb{R}$ telle que $f(e_1,\, e_2,\, ...,\, e_n) = 1$ avec les e_i la base canonique de l'espace V.

1.2. **Question 2.** Soit V un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps commutatif K. Donnez la définition de l'espace dual de V.
Correction : L'espace dual de V, noté V*, est l'ensemble des forme linéaire de V vers K : $V^* = \mathrm{Hom}(V,\, \mathbb{R})$.

1.3. **Question 3.** Soit A une matrice 4×4 dont toutes les lignes somment à la même constante C.

(1) Est-ce que C est une valeur propre de A
(2) Si oui donnez le vecteur propre associé à C

Correction : Oui, le vecteur (1, 1, 1, 1) est envoyé sur le vecteur $(C,\, C,\, C,\, C)$., ce qui répond aux deux questions.

1.4. **Question 4.** Dans le corps des quaternions $\mathbb{H}$, calculez l'inverse multiplicatif de $i + k$.

Correction : Il faut trouver des nombres réels a, b, c et d tels que : $(a+bi+cj+dk)*(i+k) = 1$. $(a+bi+cj+dk)*(i+k) = -(b+d)+i(a+c)+j(d-b)+k(a-c) = 1$. Il faut donc que la partie réelle vaille 1 et que la partie imaginaire vaille 0. Ainsi, $a + c = 0$ et $a - c = 0$ implique que a et c valent 0. D'autre part, $b + d = -1$ et $d - b = 0$ impliquent que $d = b = -1/2$. L'inverse multiplicatif de $i + k$ est donc $-(i + k) \cdot 1/2$. On peut vérifier que $-(i + k) \times (i + k)/2 = 1$

1.5. **Question 5.** Que valent la trace et le déterminant de la matrice à coefficient dans $\mathbb{Z}/(11\mathbb{Z})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} [1]_{11} & [2]_{11} & [3]_{11} \\ [0]_{11} & [6]_{11} & [7]_{11} \\ [10]_{11} & [7]_{11} & [5]_{11} \end{pmatrix}$$

Correction : La trace est la somme des éléments diagonaux. Donc $1 + 6 + 5 = 12$ ce qui donne modulo 11 : $[12]_{11} = [1]_{11} = Tr(A)$. Le déterminant peut être calculé dans les réels et on peut prendre par la suite le résultat obtenu modulo 11. En suivant la première colonne (via la méthode de Laplace, méthode des cofacteurs), $det(A) = 1 \cdot (6 \cdot 5 - 7 \cdot 7) + 10 \cdot (2 \cdot 7 - 6 \cdot 3) = -19 - 10 \cdot 4 = -59$ et $[-59]_{11} = [7]_{11} = Det(A)$

1.6. **Question 6.** Combien de permutations σ existent dans σ_6 telle que $\sigma(1) = 1$?
Correction : Si l'on fixe un élément (le 1 par exemple) dans σ_n, cela revient à regarder les permutations de $(n-1)$ éléments. Dans notre cas, il y a donc autant de permutations de σ_6 fixant 1 que de permutations de σ_5 soit $5! = 120$.

1.7. **Question 7.** Pour quelles valeurs de α la matrice suivante est orthogonale ?

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \alpha \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Correction : Il faut s'assurer que les colonnes et les lignes de cette matrice forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ pour que la matrice soit orthogonale. En utilisant que le produit scalaire des vecteurs formés par les deuxièmes et troisièmes colonnes doit égaler 0, on a : $\alpha \cdot \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = 0$. Cela implique que $\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

1.8. **Question 8.** Soient les permutations $\alpha = (1, 3, 4, 5)(2, 6)(7, 8, 9)$ et $\beta = (1, 6)(2, 8)(3, 7, 5)(9)$ de σ_9. Calculez : $\alpha \circ \beta$, α^{-1} et β^{2402}. **Correction :** $\alpha \circ \beta = (1, 2, 9, 7)(3, 8, 6)(4, 5)$, $\alpha^{-1} = (5, 4, 3, 1)(6, 2)(9, 8, 7)$. Pour calculer β^{2402}, soit vous êtes un supercalculateur et j'ai voyagé dans le futur dans ce cas prévenez-moi dès que possible, soit il va falloir être plus malin que tout faire à la main. L'idée est de remarquer que $\beta^6 = Id$ (car le PPCM de la longueur de ses cycles est 6), d'autre part $2402 = 400 * 6 + 2$. Ainsi, $\beta^{2402} = Id^{400}\beta^2 = (5, 7, 3)$.

1.9. **Question 9.** Soit $A \in M_{5\times5}(\mathbb{R})$ telle que sa forme canonique de Jordan est donnée par :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Quel est le polynôme caractéristique de A ? Quel est le polynôme minimal de A ? Quel est la dimension :

- $Ker(A - 2Id)$
- $Ker(A - 2Id)^2$
- $Ker(A - 2Id)^3$
- $Ker(A - 2Id)^{2341}$

Correction : Le polynôme caractéristique est le même que celui de sa forme de Jordan car la forme de Jordan n'est que la représentation d'une matrice dans une base non canonique et n'influe donc pas sur le polynôme caractéristique. $P_A(\lambda) = (2-\lambda)^5$. Le polynôme minimal de A est, par définition, le plus petit polynôme m_A tel que $m_A(A) = 0$. Ici A ne possède qu'une seule valeur propre, 2, son polynôme minimal sera donc de la forme $(\lambda - 2)^n$ où n est la taille de plus grand bloc de Jordan. Donc $m_A(\lambda) = (2-\lambda)^3$.

Dès lors, $(A - 2Id)^3 = 0$, donc $dim(Ker(A-2Id)^3) = dim(Ker(A-2Id)^{2341}) = dim(Ker(0)) = 5$. Et on peut vérifier rapidement que $dim(Ker(A - 2Id)) = 2$ et $dim(Ker(A - 2Id)^2) = 4$, en calculant les matrices en question si nécessaire.

2. Exercices

2.1. **Question 1.** Soit A la matrice 4×4 à coefficient dans $\mathbb{C}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donnez :

(1) La forme canonique de Jordan de A
(2) Le polynôme minimal de A
(3) Donnez la matrice B tq $B^{-1}AB$ est égale à la matrice trouvée au point (1)

Correction : On commence par chercher le polynôme caractéristique de A.

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda) \cdot det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2 det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)^4 \end{aligned}$$

Calculons

$$(A-1)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-1)^3 = 0$$

On obtient donc que le polynôme minimal A est $m_A(\lambda) = (\lambda - 1)^3$ et la forme de Jordan de A doit donc être :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Trouver la matrice de changement de base est long et calculatoire, je vous laisse donc appliquer la méthode proposée dans les notes de Mr D'adderio celle-ci pouvant se suivre comme un algorithme.

2.2. **Question 2.** Considérez la matrice symétrique :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Trouvez une matrice orthogonale O tq OAO^T est une matrice diagonale. (Conseil : ne laissez pas de $\surd$ au dénominateur.)

Correction : Il s'agit juste de diagonaliser la matrice comme habituellement. La différence est qu'il faudra choisir des vecteurs propres tels que la matrice de changement de base soit orthogonale, c-à-d des vecteurs de norme 1.

On cherche les valeurs propres de A. On calcule donc le polynôme caractéristique de A. Il faut manipuler quelque peut les lignes et les colonnes afin de simplifier le problème et obtenir un polynôme le plus factorisé possible.

$$
\begin{aligned}
p_A(\lambda) &= det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1-\lambda & -\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1-\lambda & 1-\lambda & \lambda \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 2-\lambda \\ 1-\lambda & 1-\lambda & \lambda \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (2-\lambda)\cdot\left(det\begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) \\
&= (2-\lambda)(\lambda^2-2) = (2-\lambda)(\lambda-\sqrt{2})(\lambda+\sqrt{2})
\end{aligned}
$$

Il faut maintenant trouver les vecteurs propres de norme 1. Nous faisons l'exemple pour le vecteur propre de valeur propre 2. On cherche a, b, c, la solution à :

$$
\begin{pmatrix} 1-2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0
$$

En résolvant on obtient $b = 0$ et $a = c$. Avec la condition $a^2 + b^2 + c^2 = 0$, on a $a = \pm\sqrt{2} = c$. On fait de même pour les autres valeurs propres. En plaçant ces vecteurs dans les lignes de notre matrice on obtient :

$$
O = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{2}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{2}/2 & -1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}
$$

On peut encore vérifier que OAO^T est bien diagonale.

2.3. **Question 3.** Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, soit Q la quadrique d'équations

$$
x^2 + z^2 + 2xy + 2xz - 2yz + x + \sqrt{2}y + z = 0
$$

A l'aide d'isométries réduisez l'équation de Q à une forme canonique euclidienne. Quel est le type de quadrique ?

Correction :

Afin de trouver le type de quadrique, il faut trouver la forme canonique de ladite quadrique. Pour se faire, on diagonalise la matrice :

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}
$$

Cela est la réponse à la question 2 et il suffit maintenant d'appliquer la transformation O de la matrice trouvée précédemment au vecteur (x, y, z).

Nous obtenons alors l'équation :

$$2x^2 + \sqrt{2}y^2 - \sqrt{2}z^2 + 2x - \sqrt{2}y + \sqrt{2}z = 0 \tag{2.1}$$

Maintenant, nous pouvons faire disparaitre les termes linéaires en effectuant les translations :

$$x \to x - 1/2 y \to y + 1/2 z \to z + 1/2$$

Ce qui donne l'équation cannonique :

$$2x^2 + \sqrt{2}y^2 - \sqrt{2}z^2 = 1/2 \tag{2.2}$$

Ce qui nous donne un hyperboloïde à une nappe.

2.4. **Question 4.** Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, considérez la droite $D =< (1, 1, 1) >$. Soit $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la rotation autour de D d'angle $\pi/3$ dans le sens antihoraire en regardant l'origine du point (1,1,1). Donnez la matrice de R dans la base canonique de $\mathbb{R}$. **Correction :**

Afin de résuoudre cette question, la manière la plus intuitive est de se placer dans la base orthonormale dextrogire où l'axe de rotation est un des vecteurs de la base. Cela peut être fait en choisissant les vecteurs suivant : $\{\vec{e_1} = (1, 1, 1)/\sqrt{3}, \vec{e_2} = (1, -1, 0)/\sqrt{2}, \vec{e_3} = \vec{e_1} \times \vec{e_2} = (1, 1, -2)/\sqrt{6}\}$. En notant $\vec{f_i}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. La matrice orthogonale de changement de base associée est :

$$O = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

Et nous avons bien que $\vec{e_i} = \sum_{j=1}^{3} O_{ij}\vec{f_j}$ et $OO^T = 1$. Dans la base des $\vec{e_i}$ nous pouvons facilement deviner la forme de la matrice de rotation qui est du type :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta) & -sin(\theta) \\ 0 & sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Les indications de l'énoncé nous informent que $\theta = \pi/3$ (d'où l'intérêt de garder une base dextrogyre pour ne pas faire d'erreurs entre $-\theta$ et θ) (Malgrés tout comme je suis un peu naze pour ce genre de vérification sur l'orientation d'une rotation, je vérifierais quand même le signe si j'étais vous ce qui ne change pas grand chose au raisonnement général).

La matrice recherchée est donc $M = OAO^T$. (Et je vous en laisse le calcul pénible mais pouvant être faite à la calculette graphique par exemple)

2.5. **Question 5.** Soit $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices 2 × 2 à coefficients réels. Soit

$$\begin{aligned} f &: V \times V \to \mathbb{R} \\ (A, B) &\to f(A, B) = tr(AB^T) \end{aligned}$$

(1) Vérifiez que f est un produit scalaire sur V

(2) Déterminez la projection orthogonale du vecteur :

$$v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in V$$

sur le sous espace

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \mid \alpha, \, \beta \in \mathbb{R} \right\} \subset V$$

Correction : Pour que f soit un produit scalaire il faut montrer :

(1) La bilinéarité : Ce qui est très rapide par les propriétés de linéarité de la trace sur l'espace des matrices.

$$f(\alpha A, B) = Tr(\alpha AB^T) = \alpha Tr(AB^T) = \alpha f(A, B)$$

$$f(A{+}C, B) = Tr((A{+}C)B^T) = \alpha Tr(AB^T{+}CB^T) = Tr(AB^T){+}Tr(CB^T) = f(A, B){+}f(C, B)$$

(2) La réflexivité :

$$f(A, B) = Tr(AB^T) = Tr((BA^T)^T) = Tr(BA^T) = f(B, A) \tag{2.3}$$

car $Tr(A) = Tr(A^T)$

(3) Défini positif : $f(A, A) = Tr(AA^T)$. En écrivant A comme :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On obtient que $Tr(AA^T) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ qui est positif est vaut 0 ssi $A = 0$

f est donc bien un produit scalaire.

Pour projeter v sur W il nous faut une base orthonormale de W. Une base possible est :

$$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

où les coefficients des matrices ont été choisis afin d'avoir des vecteurs de norme 1.

$$\begin{aligned} P_W(v) &= f(v, e_1)e_1 + f(v, e_2)e_2 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Est le vecteur recherché.

2.6. **Question 6.** Soient p la forme quadratique de $\mathbb{R}^3$ définie $\forall v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par $p(v) = x^2 + y^2 + z^2 + 2\alpha yz$ Déterminez, en fonction du paramètre α si p est définie positive, négative, semi-positive, semi-négative ou indéfinie.

Correction : La quadrique associée est :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

On regarde les valeur propre de la quadrique. On calcule donc $det(Q - \lambda Id) = (1-\lambda)(1-\lambda-\alpha)(1-\lambda+\alpha)$. Les valeurs propres de Q sont donc $\{1,\, 1-\alpha,\, 1+\alpha\}$. Donc la forme quadratique est soit définie positive si $1 > \alpha > -1$, semi-définie positive si $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$ et indéfinie si $\alpha > 1$ ou $\alpha < -1$.

ALGEBRE LINEAIRE ET GEOMETRIE
Examen du 5 juin 2019 — Test

NOM : Prénom : Note : /30

BA1 sc. math. ☐ BA1 sc. phys. ☐

VOUS DEVEZ FOURNIR LA RÉPONSE DANS LES CASES PRÉVUES À CET EFFET.

---

1. (**2 points**) Donnez la définition d'une isométrie.

2. (**2 points**) Soit V un espace vectoriel et $A : V \to V$ un opérateur linéaire. Donnez la définition d'un sous-espace propre de A.

3. (**3 points**) Déterminez tous les $x \in \mathbb{H}$ tels que $2ix + 2j - 3 = 0$.

4. (**3 points**) Soit $\sigma = (1, 5, 4)(2, 8)(3, 6, 9, 7) \in \mathfrak{S}_9$. Alors

$$|\{\sigma^k \mid k \in \mathbb{N}\}| = \boxed{}$$

$$|\{\sigma^{2k} \mid k \in \mathbb{N}\}| = \boxed{}$$

$$\sigma^{-1} = \boxed{}$$

5. (**2 points**) Soit $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ et $\vec{v} := (4, 1) \in \mathbb{R}^2$. Donnez la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D.

6. (**6 points**) Donnez la matrice dans la forme canonique de Jordan des applications linéaires suivantes

(a) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont le polynôme minimal est donné par $m_A(x) = (x-2)x^2$.

(b) $B : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dont le polynôme minimal est donné par $m_A(x) = (x-2)^2 x$ et $\dim_{\mathbb{R}} Ker(B) = 2$.

(c) $C : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ telle que $\dim_{\mathbb{R}} Ker(C) = 3$, $\dim_{\mathbb{R}} Ker(C - 2\,Id) = 1$ et $\dim_{\mathbb{R}} Ker(C - 3\,Id) = 1$.

7. (**3 points**) Soit

$$Q := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Donnez la signature de Q sous la forme (n_0, n_+, n_-)

8. (**2 points**) Inversez la matrice suivante dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$: $\begin{pmatrix} [0]_7 & [4]_7 \\ [2]_7 & [2]_7 \end{pmatrix}$

9. (**4 points**) Soit $A = (0,1), B = (2,0), A' = (0,-1), B' = (-2,0) \in \mathbb{R}^2$. Dénotons par AB la droite contenant A et B. Donnez, dans la base canonique, les matrices de toutes les isométries $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telles que

(a) $F(AB) = A'B'$

(b) $F(AB) = A'B$

10. (**3 points**) Soit $e_1 = (0,4)$ et $e_2 = (-2,5)$. Il suit que $\{e_1, e_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Donnez sa base duale

$e_1^* : (x,y) \quad \longmapsto$

$e_2^* : (x,y) \quad \longmapsto$

☐☐☐☐☐

ALGEBRE LINEAIRE ET GEOMETRIE

Examen du 5 juin 2019 — Problèmes

NOM : Prénom :

Note : /70

BA1 sc. math. ☐ BA1 sc. phys. ☐

VEILLEZ À JUSTIFIER SOIGNEUSEMENT TOUTES VOS RÉPONSES. NOTRE APPRÉCIATION DE VOTRE TRAVAIL DÉPEND DE LA QUALITÉ DE VOTRE RÉDACTION.

---

1. (**20 points**) Calculer la forme canonique de Jordan de la matrice A à coefficients **complexes**, et spécifier une matrice b telle que $b^{-1}Ab$ donne cette forme canonique de Jordan :

(a)

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. (**15 points**) Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, soit Q la quadrique d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + z - 3x = 2.$$

A l'aide d'isométries, réduire l'équation de Q à une forme canonique euclidienne. Quel est le type de cette quadrique ?

3. (**15 points**) Calculer la signature (n_0, n_+, n_-) de la matrice symétrique suivante en fonction du paramètre réel α:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha^2 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ \alpha^2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. (**10 points**) Soit σ une permutation de $\mathfrak{S}_n$ et A_σ la matrice dont les éléments sont définis par $(A_\sigma)_{ij} = \delta_{i\sigma(j)}$, où δ représente le delta de Kronecker.

   (a) Soit $\rho = (1,3,5)(2,4) \in S_5$. Ecrire la matrice A_ρ.

   (b) La matrice A_ρ est-elle inversible? Si oui, donner sa matrice inverse.

   (c) La matrice A_ρ est-elle orthogonale?

   (d) Soient σ et τ deux permutations de $\mathfrak{S}_n$. Montrer que $A_{\sigma\tau} = A_\sigma A_\tau$.

   (e) Soit σ une permutation de $\mathfrak{S}_n$. Montrer que $A_{\sigma^{-1}} = A_\sigma^T$.

   (f) Montrer que $\det(A_\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma)$.

5. **(10 points)** Soit $V = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices 2×2 à coefficients réels, muni du produit scalaire suivant:

$$\begin{aligned} f : V \times V &\to \mathbb{R} \\ (M, N) &\mapsto f(M, N) = M \cdot N := \mathrm{tr}(MN^T) \end{aligned}$$

Considérons W, le sous-espace de V des matrices symétriques.

(a) Sachant que f est une forme bilinéaire symétrique, montrer que c'est un produit scalaire.

(b) Donner une base orthogonale de W.

(c) Caculer la projection orthogonale de $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ sur W.

MATHF102 : Algèbre linéaire et géométrie

Examen du 12 Janvier 2021

Note : /80					

NOM : Prénom : Matricule : Section : MATH/PHYS

!!!! Consignes !!!!

!!! Lisez attentivement toutes les consignes avant de commencer l'examen !!!

- Écrivez immédiatement votre nom sur cette page et sur toutes les autres pages.
- L'examen dure **3h**.
- Examen à cours ouverts : il est permit d'utiliser le syllabus et/ou des notes personnelles.
- Les brouillons ne seront corrigés en aucun cas.
- Ne dégrafez pas les feuilles qui ont été agrafées ensemble.
- Justifiez soigneusement toutes vos réponses en explicitant clairement tous les calculs et raisonnements ! Sauf indication contraire explicite, la réponse ne sera pas corrigée sans justification !
- Notre appréciation de votre travail dépend de la qualité de votre rédaction.
- Si vous n'avez pas suffisamment de place pour votre réponse, vous pouvez continuer sur le dos de la page et sur la page suivante lorsqu'elle est vierge. Veuillez indiquer clairement où se trouve la suite de votre argument et ne PAS continuer sur une page dédiée à une autre question.
- Écrivez lisiblement et soignez la présentation de vos réponses.
- N'utilisez pas la couleur rouge dans vos réponses.
- Vous ne pouvez sortir de la salle sans remettre définitivement votre copie, ni sans autorisation.
- Les GSM, calculatrices et autres ordinateurs/objets connectés sont formellement interdits.
- Toute tentative de fraude ou de communication sera sévèrement sanctionnée.
- Si vous calculez la somme des maxima de chaque question, vous pouvez remarquer qu'il y a 85 points à gagner bien qu'il suffise de gagner 80 points pour obtenir une note maximale.
- Si vous avez lu attentivement toutes les consignes, veuillez dessiner un smiley ici.

1. (15 points) Expliquer les points indiqués de la démonstration suivante.

PROPOSITION 2.16 (Division euclidienne pour polynômes). *Soient* $f(X), g(X) \in \mathbb{R}[X]$ *deux polynômes réels tels que* $n = \deg f \geq m = \deg g$*. Alors, il existe des polynômes uniques* $q(X)$ *et* $r(X)$ *dans* $\mathbb{R}[X]$ *qui satisfont les propriétés suivantes :*

(1) $\deg q = \deg f - \deg g$ *;*
(2) $\deg r < \deg g$ *;*
(3) $f(X) = q(X)g(X) + r(X)$.

Nous appelons $q(X)$ *le* **quotient** *et* $r(X)$ *le* **reste** *de la division de* $f(X)$ *par* $g(X)$.

DÉMONSTRATION. Ecrivons

$$f(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$$
$$g(X) = \sum_{i=0}^{m} b_i X^i$$

(a) Expliquer cette notation, que signifie le sigma ?

Le sigma signifie une somme des termes du type a_iX^i (respectivement b_iX^i), où on a une terme pour tout $i = 0, \ldots, n$ (respectivement $i = 0, \ldots, m$). C'est-à-dire $\sum_{i=0}^{n} a_iX^i = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n$

Alors le polynôme $f(X) - \frac{a_n}{b_m}X^{n-m}g(X)$ est donné par

$$h(X) = \sum_{i=n-m}^{n-1} (a_i - \frac{a_n}{b_m} b_{i+m-n})X^i + \sum_{i=0}^{n-m-1} a_iX^i$$

(b) On divise par b_m. Pourquoi $b_m \neq 0$?

Comme il est donné que $\deg g = m$, il faut que le coéfficient b_m est différent à zéro (voir Définition 2.14)

Réponse fausse fréquente : $b_m \neq 0$ parce qu'il est interdit de diviser par zéro. Biensur, il est interdit par zéro, mais ceci n'explique pas pourquoi b_m n'est pas zéro, ceci explique pourquoi nous devons nous assurer que $b_m \neq 0$...

et a un degré strictement inférieur à n. Nous obtenons alors

$$f(X) = \frac{a_n}{b_m}X^{n-m}g(X) + h(X).$$

(c) Expliquer comment nous obtenons cette dernière formule.

Nous avons définit $h(X)$ par la formule

$$h(X) = f(X) - \frac{a_n}{b_m}X^{n-m}g(X)$$

Cette égalité est équivalente avec

$$f(X) = \frac{a_n}{b_m}X^{n-m}g(X) + h(X).$$

Si $\deg h(X) \geq m$, nous pouvons répéter la construction, en remplaçant f par h, et, après au plus $n-m+1$ étapes, nous arrivons à l'égalité

$$f(X) = q(X)g(X) + r(X)$$

où $\deg r(X) < \deg g(X)$.

(d) Pourquoi le degré de $r(X)$ est-il inférieur au degré de $g(X)$?

Dans la construction précédente, nous avons construit à partir du polynôme f de degrée n un polynôme $h(X)$ de degree $\deg h(X) \leq n-1$. Alors cette construction a réduit le degrée du polynôme initiale avec au moins 1. Si nous répétons cette procédure, le degrée va diminuer avec au moins un dans chaque étappe. Alors après au plus $n-m+1$ étapes, nous arrivons à un polynôme (que nous appelons $r(X)$) de degrée maximal $n-(n-m+1) = m-1$, ce qui est strictement inférieur à $m = \deg g(X)$.
Réponse fause fréquente : Parce que le reste après une division Euclidienne est inférieur au degrée du diviseur. Comme nous sommes en train de démonter que la division Euclidienne existe et satisfait cette propriété, nous ne pouvons pas encore utilisé cette propriété !

Montrons que q et f sont uniques avec ces propriétés. Effectivement, supposons qu'il existe d'autres polynômes $q'(X)$ et $r'(X)$ tels que $f(X) = q'(X)g(X) + r'(X)$ et $\deg r'(X) < \deg g(X)$. Alors nous trouvons

$$(q(X) - q'(X))g(X) = r'(X) - r(X).$$

(e) Expliquer comment nous obtenons cette dernière formule.
Nous avons

$$f(X) = q(X)g(X) + r(X) \quad \text{et} \quad f(X) = q'(X)g(X) + r'(X)$$

Donc $q(X)g(X) + r(X) = q'(X)g(X) + r'(X) \Leftrightarrow q(X)g(X) - q'(X)g(X) = r'(X) - r(X) \Leftrightarrow (q(X) - q'(X))g(X) = r'(X) - r(X)$

En outre, à la droite de l'égalité nous avons un polynôme de degré inférieur à $m = \deg g$,

(f) Pourquoi le degré du côté droit est-il inférieur à m ?

Nous savons que $\deg r(X) < \deg g(X) = m$ et $\deg r'(X) < \deg g(X) = m$. Donc grâce au Lemme 2.15, nous trouvons

$$\deg(r'(X) - r(X)) \leq \max\{\deg r'(X), \deg r(X)\} < m$$

et donc, à gauche de l'égalité, il faut aussi un polynôme de degré inférieur à $\deg g$. Comme le degré d'un produit de polynômes non-nuls est égal à la somme des degrés, il suit que $q(X) - q'(X) = 0$ et donc aussi que $r'(X) - r(X) = 0$. ☐

(g) Pourquoi ceci montre-t-il que r et q sont uniques ?

Si nous supposons qu'il existe autre r' et q' avec les même propriétés, nous trouvons

$$q(X) - q'(X) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad q(X) = q'(X)$$
$$r(X) - r'(X) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r(X) = r'(X)$$

donc r et q sont les seuls polynômes avec ces propriétés.

2. (20 points) Démontrer les assertions suivantes en quelques lignes. Toutes ces assertions sont des conséquences immédiates de certaines propriétés et définitions vues au cours. Vous pouvez utiliser tout résultat vu au cours théorique à condition de vous référer clairement au syllabus ou d'énoncer correctement et complètement le résultat en question.

(a) Soit V un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ et $\vec{u}, \vec{w} \in V$. Notons $U = \text{Vect}(\vec{u})$ et $W = \text{Vect}(\vec{w})$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $\{\vec{u}, \vec{w}\}$ est une base de V ;

(2) dim$V = 2$ et $V = U + W$;

(3) $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont non-nuls et $V = U \oplus W$.

(1)⇒(2) Par Définition 5.22, nous savons dim$V = \#\{\vec{u}, \vec{w}\} = 2$. Comme $\{\vec{u}, \vec{w}\}$ est une base, c'est en particulier génératrice. Donc pour tout $\vec{v} \in V$, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tel que $\vec{v} = \lambda u + \mu \vec{w}$. Comme $\lambda \vec{u} \in U$ et $\mu \vec{w} \in W$, nous trouvons $\vec{v} \in U + W$ et comme ceci est vrai pour tout $\vec{v} \in V$, nous arrivons à $V = U + W$.
(2)⇒ (3) Parce que U est engendré par un seul élément $\vec{u}$, il suit que dim$U = 1$ ssi $\vec{u} \neq \vec{0}$ et dim$U = 0$ ssi $\vec{u} = \vec{0}$. La même vaut pour W. Par proposition 6.29, nous savons que dim$V =$ dim$U +$ dim$W -$ dim$(U \cap W)$. Comme dim$V = 2$ et dim$U$, dim$W \leq 1$, il faut que dim$U = 1 =$ dim$W$ (donc $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont non-nuls) et dim$U \cap W = 0$ (donc $V = U \oplus W$ parce que nous savons déjà que $V = U + W$).
(3)⇒ (1) Par Proposition 4.18, $V = U \oplus W$ si et seulement si tout vecteur $\vec{v} \in V$ s'écrit de manière unique comme $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ avec $\vec{v}_1 \in U$ et $\vec{v}_2 \in W$. Par définition de U et W et comme $\vec{u}, \vec{w}$ sont non-nuls, il existe λ, μ uniques tel que $\vec{v}_1 = \lambda \vec{u}$ et $\vec{v}_2 = \mu \vec{w}$ et $\vec{v} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{w}$. Donc tout vecteur de V s'écrit de manière unique comme combili de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et donc $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est une base par Proposition 5.14.

Alternative :

(1)⇒ (3) Si $\{\vec{u}, \vec{w}\}$ est une base, c'est en particulier libre et donc $\vec{u}$ et $\vec{w}$ son nonnuls. Par Proposition 5.14 nous savons en outre que tout vecteur $\vec{v} \in V$ s'écrit de manière unique comme combili $\vec{v} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{w}$. Comme $\lambda \vec{u} \in U$ et $\mu \vec{w} \in W$ sont uniquement déterminé par λ et μ respectivement (si $a\vec{x} = b\vec{x}$ pour $\vec{x} \neq \vec{0}$, alors $a = b$), il suit par Proposition 4.18 que $V = U \oplus W$.
(3)⇒(2) Si $V = U \oplus W$, alors en particulier $V = U + W$. Comme $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont non-nuls, il forment une base de U et W respectivement, donc dim$U = 1 =$ dim$W$. Alors dim$V =$ dim$(U \oplus W) = 2$ par Corollaire 6.30
(2)⇒ (1) Comme $V = U + W$, tout vecteur $\vec{v} \in V$ s'écrit comme $\vec{v} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{w}$ pour certain $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors $\{\vec{u}, \vec{w}\}$ est génératrice et par Proposition 5.25 c'est une base.

Réponse fause fréquente : Bien qu'il est clairement indiqué qu'il faut montrer ici l'équivalence des assertions (1)-(2)-(3), beaucoup d'étudiants ont essayé de montrer que ces trois assertions sont toujours satisfaits, ce qui biensur pas le cas...

(b) Soit $f : V \to V'$ une application linéaire avec dim$V = n$ et dim$V' = m$. Soit $B = [f]_{E',E}$ la matrice de f par rapport à une base E de V et une base E' de V'. Alors f est injective si et seulement si rg$(B) = n$.

Par Proposition 7.8(2), nous savons que dim(Ker$f$) $= n -$ rg$([f]_{E',E})$.
Donc rg$([f]_{E',E}) = n \Leftrightarrow$ dim(Ker$f$) $= 0$.
Par proposition 6.17(i)-(iii) dim(Ker$f$) $= 0$ si et seulement si f est injective.

(c) Soient L_1 et L_2 deux variétés linéaires dans un espace vectoriel V. Si $L_1 \cap L_2$ est un sous-espace vectoriel de V, alors L_1 et L_2 sont eux-mêmes aussi des sous-espaces de V.

Notons $L_1 = \vec{a}_1 + W_1$ et $L_2 = \vec{a}_2 + W_2$ avec $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in V$ et W_1, W_2 des sous-espaces de V. Si $L_1 \cap L_2$ est un sous-espace vectoriel de V, alors $\vec{0} \in L_1 \cap L_2$. Donc $\vec{0} \in L_1$ et $\vec{0} \in L_1$. Alors par Corollaire 4.31, nous trouvons pour $i = 1, 2$ que :

$$L_i = \vec{0} + W_i = W_i$$

et donc $L_1 = W_1$ et $L_2 = W_2$ sont des sous-espaces vectoriels de V.

(d) Soient $f, g : V \to W$ des applications linéaires. Alors Ker$f \cap$ Ker$(f+g) =$ Ker$g \cap$ Ker$(f+g)$.

$\vec{v} \in$ Ker$f \cap$ Ker$(f+g)$ si et seulement si

$$\vec{0} = f(\vec{v}) \quad \text{et} \qquad \vec{0} = (f+g)(\vec{v}) = f(\vec{v}) + g(\vec{v})$$

si et seulement si

$$\vec{0} = f(\vec{v}) \quad \text{et} \qquad \vec{0} = g(\vec{v})$$

si et seulement si

$$\vec{0} = f(\vec{v}) + g(\vec{v}) = (f+g)(\vec{v}) \quad \text{et} \qquad \vec{0} = g(\vec{v})$$

si et seulement si $\vec{v} \in$ Ker$g \cap$ Ker$(f+g)$

3. (10 points)

(a) Résoudre l'équation suivante en $\mathbb{C}$. Donner l'ensemble S de ses solutions.

$$z^2 - (1+i)z + i = 0$$

Le discriminant de cette équation quadratique est

$$(1+i)^2 - 4i = -2i = 2e^{\frac{3\pi}{2}}$$

Les racines carrées du discriminant sont données par

$$\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}} = -1+i \quad \text{et} \quad \sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}} = 1-i.$$

Il suit que les deux solutions sont

$$\frac{1+i-1+i}{2} = i, \quad \text{et} \quad \frac{1+i+1-i}{2} = 1.$$

Alors

$$S = \{1, i\}.$$

Réponse fausse fréquente : Beaucoup d'étudiants utilisent la notation dangeruese $\sqrt{-2i}$ pour noter une racine carée du discriminant. La notation $\sqrt{r}$ peut seulement être utilisé avec r un nombre **réel positif**, sinon on risque de faire des erreurs de calcul, comme expliqué dans la remarque 2.12 du syllabus.

(b) Déterminer le rang de la matrice suivante. Est-ce qu'elle est inversible ? Donner son inverse s'il existe.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & -1 & -14 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Déterminons la forme echelonée de A afin de déduire le rang. En appliquant $L_2 \to L_2 - 2L_1, L_3 \to L_3 + L_1$ on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & -7 & -14 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Puis on fait $L_3 \to L_3 + \frac{1}{7}L_2, L4 \to L_4 + \frac{3}{7}L_2, L_2 \to -\frac{1}{7}L_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Et par $L_1 \to L_1 - L_2$ on trouve finalement

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ceci est la forme echelonée de A. Comme il y a 2 lignes non-nulles, on peut conclure que le rang de A est 2. Vu que son rang n'est pas maximal, il suit que A n'est pas inversible.

Réponse fausse fréquente : Beaucoup d'étudiants détermines d'abord le rang de A, et pour répondre à la deuxième partie du question (A est inversible ?) ils recommencent le travail avec la méthode de Gauss pour déterminer l'inverse de A (qui n'existe pas). Bien qu'il n'agit pas vraiment d'un erreur (si les calculs sont correctes), une fois qu'on connait le rang d'une matrice, on sais si la matrice est inversible ou pas, il faut pas refaire le même travail.

4. (15 points) Soit a un paramètre réel non-nul. Nous considérons 3 plans Π_1, Π_2 et Π_3 dans l'espace réel tridimensionnel $\mathbb{R}^3$:

- Π_1 est le plan perpendiculaire à la droite d'équations $x-1=\frac{y}{a}=\frac{z-1}{3}$ et contenant la droite d'équations
$$\begin{cases}\frac{1-x}{3}=z-1\\ y=0\end{cases}.$$
- Π_2 est le plan d'équation $\Pi_2 \equiv ax+y+3az=a+3$
- Π_3 est le plan passant par le point $(0,\frac{4}{3},0)$ avec $(2,-1,0)$ comme vecteur directeur et parallèle à la droite d'équations
$$\begin{cases}x=1+(a+1)\lambda\\ y=-2-(a+4)\lambda\\ z=4+3\lambda\end{cases}, \qquad (\lambda\in\mathbb{R})$$

Trouver, en fonction du paramètre a, l'intersection des trois plans ci-dessus et en spécifier la nature géométrique.

Déterminons une équation cartésienne du plan Π_1.
Comme ce plan est perpendiculaire à la droite d'équations $x-1=\frac{y}{a}=\frac{z-1}{3}$, le vecteur $(1,a,3)$ en est un vecteur normal. Son équation cartésienne est donc de la forme $x+ay+3z=d$ pour un $d\in\mathbb{R}$.
Comme il contient la droite d'équations $\begin{cases}\frac{1-x}{3}=z-1\\ y=0\end{cases}$, il contient tout point de cette droite. En particulier, il contient le point $(1,0,1)$ de telle sorte que $d=1+a.0+3.1=4$.
On a $\Pi_1\equiv x+ay+3z=4$
Déterminons maintenant une équation cartésienne du plan Π_2.
Comme ce plan est perpendiculaire à la droite d'équations $\begin{cases}x=1+a\lambda\\ y=-2+\lambda\\ z=4+3a\lambda\end{cases}$ $(\lambda\in\mathbb{R})$, le vecteur $(a,1,3a)$ en est un vecteur normal. Son équation cartésienne est donc de la forme $ax+y+3az=d'$ pour un $d'\in\mathbb{R}$.
Comme il passe par le point $(1,3,0)$, $d'=a.1+3+3a.0=a+3$ et on a $\Pi_2\equiv ax+y+3az=a+3$.
Finalement, déterminons une équation cartésienne du plan Π_3.
Comme les vecteurs $(a+1,-a-4,3)$ et $(2,-1,0)$ sont directeurs du plan, leur produit vectoriel $(3,6,a+7)$ est normal au plan. Son équation cartésienne est donc de la forme $3x+6y+(a+7)z=d''$ pour un $d''\in\mathbb{R}$.
Comme il passe par le point $(0,\frac{4}{3},0)$, on a $d''=3.0+6.\frac{4}{3}+(a+7).0=8$ et donc $\Pi_3\equiv 3x+6y+(a+7)z=8$.
Pour discuter de l'intersection $\Pi_1\cap\Pi_2\cap\Pi_3$ en fonction du paramètre a, nous devons résoudre le système

$$\begin{cases}x+ay+3z=4\\ ax+y+3az=a+3\\ 3x+6y+(a+7)z=8\end{cases}$$

Appliquons la méthode de Gauss à la matrice augmentée associée à ce système :

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&a&3&4\\ a&1&3a&a+3\\ 3&6&a+7&8\end{array}\right]\xrightarrow[L_3\to L_3-3L_1]{L_2\to L_2-aL_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&a&3&4\\ 0&1-a^2&0&-3a+3\\ 0&6-3a&a-2&-4\end{array}\right]$$

Si $a=1$, on a

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&3&4\\ 0&0&0&0\\ 0&3&-1&-4\end{array}\right]\xrightarrow{L_2\leftrightarrow L_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&3&4\\ 0&3&-1&-4\\ 0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{L_3\to\frac{1}{3}L_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&3&4\\ 0&1&-1/3&-4/3\\ 0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{L_1\to L_1-L_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&10/3&16/3\\ 0&1&-1/3&-4/3\\ 0&0&0&0\end{array}\right]$$

ce qui correspond au système

$$\begin{cases} x + \frac{10}{3}z = \frac{16}{3} \\ y - \frac{1}{3}z = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

donc l'ensemble des solutions est $\{(\frac{16}{3} - \frac{10}{3}z, -\frac{4}{3} + \frac{1}{3}z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.
Si $a = 1$, $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$ est la droite passant par le point $(\frac{16}{3}, -\frac{4}{3}, 0)$ de vecteur directeur $(-\frac{10}{3}, \frac{1}{3}, 1)$.

Si $a = -1$, on a un système dont la deuxième équation est $0x + 0y + 0z = 6$ et qui n'a donc aucune solution.
Si $a = -1$, $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3 = \emptyset$

Si $a \neq 1$ et $a \neq -1$ alors et $1 - a^2 \neq 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 3 & 4 \\ 0 & 1-a^2 & 0 & 3(a-1) \\ 0 & 6-3a & a-2 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to \frac{1}{1-a^2}L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{a+1} \\ 0 & 6-3a & a-2 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \to L_3 + (3a-6)L_2]{L_1 \to L_1 - aL_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & \frac{a+4}{a+1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{a+1} \\ 0 & 0 & a-2 & \frac{5a-22}{a+1} \end{array}\right]$$

Si $a = 2$, on a un système dont la troisième équation est $0x + 0y + 0z = -4$ et qui n'a donc aucune solution.
Si $a = 2$, $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3 = \emptyset$.

Si $a \neq 2$ (et toujours $a \neq 1$ et $a \neq -1$), $a - 2 \neq 0$ et on a

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & \frac{a+4}{a+1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{a+1} \\ 0 & 0 & a-2 & \frac{5a-22}{a+1} \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to \frac{1}{a-2}L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & \frac{a+4}{a+1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{a+1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5a-22}{(a+1)(a-2)} \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \to L_1 - 3L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{a^2-13a+58}{(a+1)(a-2)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{a+1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5a-22}{(a+1)(a-2)} \end{array}\right]$$

ce qui correspond au système $\begin{cases} x = \frac{a^2-13a+58}{(a+1)(a-2)} \\ y = \frac{3}{a+1} \\ z = \frac{5a-22}{(a+1)(a-2)} \end{cases}$.

dont l'ensemble des solutions est le singleton $\{(\frac{a^2-13a+58}{(a+1)(a-2)}, \frac{3}{a+1}, \frac{5a-22}{(a+1)(a-2)})\}$.
Si $a \neq 1, -1, 2$, $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$ est un point de coordonnées $(\frac{a^2-13a+58}{(a+1)(a-2)}, \frac{3}{a+1}, \frac{5a-22}{(a+1)(a-2)})$.

5. (15 points) Soit $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}_0^+}$, l'espace vectoriel de toutes les applications $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$. Rappelons que ceci est bien un espace vectoriel réel avec l'addition et multiplication scalaire usuelles pour les fonctions (voir Exemple 4.5(7)).

(a) Soit $W := \{f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} \mid f(a+b) = f(a) + f(b) \text{ pour tous } a, b \in \mathbb{R}_0^+\} \subseteq V$ le sous-ensemble des applications *additives* dans V. Montrer que W est un sous-espace vectoriel de V.

(b) Soient $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7 \in V$ définies par

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 2x & f_5(x) &= \ln(2x) \\ f_2(x) &= x^2 - 1 & f_6(x) &= \ln(x) \\ f_3(x) &= 1 + x & f_7(x) &= \ln(x^2) \\ f_4(x) &= 3 - x \end{aligned}$$

et posons

$$W_1 := \langle f_1, f_2, f_3, f_4 \rangle \qquad W_2 = \langle f_5, f_6, f_7 \rangle.$$

Donner une base de chacun des sous-espaces suivants : W_1, W_2 et $W_1 \cap W$ (ici, W est l'espace de la partie (a)).

(a) Il faut vérifier trois choses.

1. Soient $f, g \in W$ et $a, b \in \mathbb{R}_0^+$, alors

$$\begin{aligned} (f+g)(a+b) &= f(a+b) + g(a+b) && \text{par définition de + dans V} \\ &= f(a) + f(b) + g(a) + g(b) && \text{car } f, g \in W \\ &= f(a) + g(a) + f(b) + g(b) && \text{par la commutativité de l'addition dans } \mathbb{R} \\ &= (f+g)(a) + (f+g)(b) && \text{par définition de + dans V.} \end{aligned}$$

Il suit que $f + g \in W$.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in W$ et $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ alors

$$\begin{aligned} (\lambda \cdot f)(a+b) &= \lambda \cdot (f(a+b)) && \text{par définition de } \cdot \text{ dans } V \\ &= \lambda \cdot (f(a) + f(b)) && \text{car } f \in W \\ &= \lambda \cdot f(a) + \lambda \cdot f(b) && \text{par la distributivité dans } \mathbb{R} \\ &= (\lambda \cdot f)(a) + (\lambda \cdot f)(b) && \text{par définition de } \cdot \text{ dans } V. \end{aligned}$$

Il suit que $\lambda \cdot f \in W$.

3. W est non-vide. L'élément neutre pour l'addition dans V est la fonction $\mathcal{O} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto 0$. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ nous avons

$$\mathcal{O}(a+b) = 0 = 0 + 0 = \mathcal{O}(a) + \mathcal{O}(b)$$

et donc $\mathcal{O} \in W$

(b) $\mathbf{W_1}$ Nous avons pour tout $x \in \mathbb{R}_0^+$

$$1 = \frac{1}{4}(f_3(x) + f_4(x)) \qquad x = \frac{1}{2}f_1(x) \qquad x^2 = f_3(x) + \frac{1}{4}(f_3(x) + f_4(x)),$$

donc $\langle 1, x, x^2 \rangle \subseteq W_1$. De plus, on a clairement que $f_1, f_2, f_3, f_4 \in \langle 1, x, x^2 \rangle$. Il suit que $W = \langle 1, x, x^2 \rangle$. Il est facile de vérifier que $\{1, x, x^2\}$ est une partie libre donc $\{1, x, x^2\}$ est une base de W_1.

$\mathbf{W_2}$ Pour tout $x \in \mathbb{R}_0^+$ nous avons que

$$\ln(2x) = \ln(2) + \ln(x) \Rightarrow 1 = \frac{1}{\ln(2)}(f_5(x) - f_6(x))$$

donc $\langle 1, \ln(x)\rangle \subseteq W_2$. De plus

$$f_5(x) = \ln(2)\cdot 1 + \ln(x) \qquad f_6(x) = \ln(x) \qquad f_7(x) = \ln(x^2) = 2\ln(x).$$

Il suit que $\langle 1, \ln(x)\rangle = W$. Nous avons également que $\{1, \ln(x)\}$ est une partie libre car si $a, b \in \mathbb{R}$ est tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_0^+$

$$a \cdot 1 + b \cdot \ln(x) = 0,$$

alors pour $x = 1$ et $x = 2$ on obtient

$$\begin{cases} a = 0 \\ a + b\ln(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0$$

Il suit que $\{1, \ln(x)\}$ est une base de W_2.

$\mathbf{W_1} \cap \mathbf{W}$ Un élément quelconque $w \in W_1$ est de la forme $\alpha + \beta x + \gamma x^2$. On a que $w \in W$ si et seulement si pour tout $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ on a

$$\alpha + \beta(a+b) + \gamma(a+b)^2 = \alpha + \beta a + \gamma a^2 + \alpha + \beta b + \gamma b^2 \Leftrightarrow \alpha + \gamma 2ab = 0$$

Ceci est vrai pour tout $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ si et seulement si $\alpha = \gamma = 0$. Il suit qu'une base de $W_1 \cup W$ est donnée par $\{x\}$.

6. (10 points) Considérons l'espace vectoriel $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ des matrices réelles de 2 lignes et 2 colonnes et l'espace vectoriel $V' = \mathbb{R}^3$. Soient

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

la base canonique de V et

$$B' = \{(2,1,1),(0,1,0),(1,-1,0)\}$$

une base de V'. Considérons l'application

$$f : V \to V' : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (b+2c, a, a+d).$$

(a) Déterminer la matrice de f par rapport aux bases B et B'.

(b) Considérer la base

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

de V. Donner la matrice de f par rapport aux bases D et B'.

(a) Ecrivons $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ et $B' = \{f_1, f_2, f_3\}$. Pour trouver les colonnes de la matrice $[f_{B',B}]$, il faut exprimer $f(e_i)$ dans la base B' pour $i = 1,2,3,4$. Pour la première colonne on trouve

$$f(e_1) = (0,1,1) = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = (2\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3, \lambda_1)$$

où $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ satisfait le système linéaire

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 = 1 \end{cases}$$

dont l'unique solution est $(1,-2,-2)$.

En faisant un raisonnement analogue pour $f(e_2)$, $f(e_3)$ et $f(e_4)$, on trouve que

$$\begin{aligned} f(e_1) &= (0,1,1) = f_1 - 2f_2 - 2f_3 \\ f(e_2) &= (1,0,0) = f_2 + f_3 \\ f(e_3) &= (2,0,0) = 2f_2 + 2f_3 \\ f(e_4) &= (0,0,1) = f_1 - 3f_2 - 2f_3 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} [f(e_1)]_{B'} &= [1,-2,-2] \\ [f(e_2)]_{B'} &= [0,1,1]_{B'} \\ [f(e_3)]_{B'} &= [0,2,2]_{B'} \\ [f(e_4)]_{B'} &= [1,-3,-2]_{B'} \end{aligned}$$

alors

$$[f_{B',B}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

(b) Par changement de base, on peut écrire que

$$[f]_{B',D} = [f]_{B',B}[\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{2\times 2}}]_{B,D}.$$

Pour déterminer les colonnes $[\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{2\times 2}}]_{B,D}$, il faut exprimer les éléments de D dans la base canonique de $\mathbb{R}^{2\times 2}$, ce qui est facile à faire. Les coordonnées des éléments de D par rapport à la base canonique auront quatre composantes ; en effet $[\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{2\times 2}}]_{B,D}$ est une matrice de quatre lignes et quatre colonnes. Par exemple, pour la première colonne on trouve

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = b_1 + b_4$$

alors

$$\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]_B = [1, 0, 0, 1].$$

Pour la matrice de changement de base, on trouve

$$[\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{2\times 2}}]_{B,D} = \begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

et

$$[f]_{B',D} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 2 & -3\\ -2 & 1 & 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 0\\ -5 & 1 & 3 & 0\\ -4 & 2 & 3 & 0\end{pmatrix}.$$

MATHF102: Algèbre linéaire et géométrie

Note : / 70

Examen du 2 juin 2021: **Partie Problèmes**

NOM : Prénom : Section: MATH / PHYS

VEILLEZ À JUSTIFIER SOIGNEUSEMENT TOUTES VOS RÉPONSES.
NOTRE APPRÉCIATION DE VOTRE TRAVAIL DÉPEND DE LA QUALITÉ
DE VOTRE RÉDACTION.

---

1. (20 points) Soit A l'opérateur linéaire de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} a & b & b & a \\ b & a & a & b \\ b & a & a & b \\ a & b & b & a \end{pmatrix} \qquad \text{où} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

a) Le vecteur $(1, 1, 1, 1)$ est-il un vecteur propre de A ? Si oui, quelle est la valeur propre correspondante ?

b) 0 est-il valeur propre de A ? Si oui, déterminer la dimension et une base du sous-espace propre associé (discuter en fonction des valeurs de a et b).

c) Donner le spectre de A (discuter en fonction des valeurs de a et b).

Hint : distinguer les cas suivants : (i) $a = b = 0$, (ii) $a = b \neq 0$, (iii) $a = -b \neq 0$, (iv) $a \neq \pm b$.

EXERCICE 1)

a) oui, c'est un vecteur propre de valeur propre $2(a+b)$ car :

$$\begin{pmatrix} a & b & b & a \\ b & a & a & b \\ b & a & a & b \\ a & b & b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(a+b) \\ 2(a+b) \\ 2(a+b) \\ 2(a+b) \end{pmatrix} = 2(a+b)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Calculons le déterminant de ~~A~~ $(A-\lambda Id)$:
(on calcule donc $P_A(\lambda)$) :

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b & b & a \\ b & a-\lambda & a & b \\ b & a & a-\lambda & b \\ a & b & b & a-\lambda \end{vmatrix} \underset{L_4 \to L_4 - L_1}{\overset{L_3 \to L_3 - L_2}{=}} \begin{vmatrix} a-\lambda & b & b & a \\ b & a-\lambda & a & b \\ 0 & \lambda & -\lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

Laplace sur la 4e ligne

$$= -\lambda \begin{vmatrix} b & b & a \\ a-\lambda & a & b \\ \lambda & -\lambda & 0 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} a-\lambda & b & b \\ b & a-\lambda & a \\ 0 & \lambda & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda\left[\lambda(b^2-a^2)+\lambda(b^2-a(a-\lambda)) \cancel{+} -\lambda(a(a-\lambda)-b^2)-\lambda((a-\lambda)^2-b^2)\right]$$

Laplace sur la 3e ligne

$$= -\lambda^2\left[b^2-a^2+b^2-a^2+a\lambda-a^2+a\lambda+b^2-a^2+2a\lambda-\lambda^2+b^2\right]$$

$$= -\lambda^2(-\lambda^2+4a\lambda+4b^2-4a^2)$$

$$= \lambda^2(\lambda^2-\cancel{2}4a\lambda+4(a^2-b^2))$$

$$\hookrightarrow \Delta = 16a-16(a^2-b^2) = 16b^2$$

$$\Rightarrow \lambda_{\frac{1}{2}} = \frac{4a \pm \sqrt{16b^2}}{2}$$

$$\cancel{=} = \boxed{\lambda^2(\lambda-2(a+b))(\lambda-2(a-b))}$$

Ainsi, 0 est une valeur propre de A étant donné
~~i) Si $a=b=0$~~
que $P_A(0)=0$.

Calculons V_0 :

$V_0 = \text{Ker}(A)$

~~→ Méthode de Gauss~~

~~trouvons~~ résolvons le système

$$\begin{pmatrix} a & b & b & a \\ b & a & a & b \\ b & a & a & b \\ a & b & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

→ Méthode de Gauss

$$\begin{pmatrix} a & b & b & a \\ b & a & a & b \\ b & a & a & b \\ a & b & b & a \end{pmatrix}$$

- Si $a = 0$:

la matrice devient (en faisant $L_1 \leftrightarrow L_2$)

$$\begin{pmatrix} b & 0 & 0 & b \\ 0 & b & b & 0 \\ b & 0 & 0 & b \\ 0 & b & b & 0 \end{pmatrix}$$

-- Si $a = b = 0$:

~~Alors~~ la matrice devient la matrice nulle

et $V_0 = \mathbb{R}^4$;

$b \neq 0 = a$

-- Si

on divise toute les lignes et on fait $L_3 \to L_3 - L_1$,

$L_4 \to L_4 - L_2$ et la matrice devient

$$b\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ce qui nous donne

le système $\begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$

$$\Rightarrow V_0 = \left\{ \begin{pmatrix} -x_4 \\ 0 \\ 0 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

• **Si $a \neq 0$:**

on effectue $L_1 \to \frac{L_1}{a}$ et la matrice devient

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{b}{a} & 1 \\ b & a & a & \cancel{b}\, b \\ b & a & a & b \\ a & b & b & a \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - bL_1]{\substack{L_4 \to L_4 - aL_1 \\ L_2 \to L_2 - bL_1}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{b}{a} & 1 \\ 0 & a-\frac{b^2}{a} & a-\frac{b^2}{a} & 0 \\ 0 & a-\frac{b^2}{a} & a-\frac{b^2}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

•• **Si $a = b \neq 0$**

la matrice devient

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui nous donne le système d'équation

$$x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 ,$$

Ainsi, $V_0 = \left\{ \begin{pmatrix} -x_2-x_3-x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$

$$= \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

•• **Si $a = -b \neq 0$**

La matrice devient

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui nous donne le système :

$$x_1 = x_2 + x_3 - x_4 \text{ , Ainsi,}$$

$$V_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x_2+x_3-x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ +x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

•• **Si $a \neq \pm b$**

on effectue $L_2 \to L_2/(a - \frac{b^2}{a})$, ainsi que $L_3 \to L_3/(a-\frac{b^2}{a})$

la matrice devient

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{b}{a} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_1]{L_1 \to L_1 - \frac{b}{a} L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui nous donne le système

$$\begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

Ainsi, $V_0 = \left\{ \begin{pmatrix} -x_4 \\ -x_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$

$$= \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

c) sachant que $P_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 2(a+b))(\lambda - 2(a-b)) =$

- Si $a = b = 0$: $\mathrm{Spec}(A) = \{0\}$
- Si $a = b \neq 0$: $\mathrm{Spec}(A) = \{0, \overset{\cancel{2a}\ 4a}{\cancel{2(a+b)}}\}$
- Si $a = -b \neq 0$: $\mathrm{Spec}(A) = \{0, \overset{4a}{\cancel{2(a-b)}}\}$
- Si $a \neq \pm b$: $\mathrm{Spec}(A) = \{0, 2(a+b), 2(a-b)\}$.

MATHF102: Algèbre linéaire et géométrie

Examen du 2 juin 2021: **Partie Problèmes**

NOM : Prénom : Section: MATH / PHYS

VEILLEZ À JUSTIFIER SOIGNEUSEMENT TOUTES VOS RÉPONSES.
NOTRE APPRÉCIATION DE VOTRE TRAVAIL DÉPEND DE LA QUALITÉ
DE VOTRE RÉDACTION.

---

2. (25 points) Soit $C \in \mathrm{Mat}_{4,4}(\mathbb{C})$ la matrice définie par

$$C := \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & i \\ 0 & i & 1 & i \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} .$$

Donner une matrice inversible $D \in \mathrm{Mat}_{4,4}(\mathbb{C})$ telle que $D^{-1}CD$ est sous forme normale de Jordan.

EXERCICE 2

Soit $C \in M_{4\times 4}(\mathbb{C})$ la matrice définie par

$$C = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & i \\ 0 & i & 1 & i \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

On calcule le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$:

$$P_C(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & i & 1 & i \\ 0 & i-\lambda & 1 & i \\ 0 & 0 & 1-\lambda & i \\ 0 & 0 & 0 & i-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(i-\lambda)^2$$

Ainsi, $\mathrm{spec}(C) = \{1, i\}$.

Calculons V_1 :

$$V_1 = \mathrm{Ker}(C - \mathrm{Id})$$

Cherchons donc $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{pmatrix} 0 & i & 1 & i \\ 0 & i-1 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & i-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Utilisons la méthode de Gauss : on effectue $L_1 \to -iL_1$ et la matrice devient

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -i & 1 \\ 0 & i-1 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & i-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2-(i-1)L_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -i & 1 \\ 0 & 0 & -i & -1 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & i-1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow L_2 \to iL_2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & i-1 \end{pmatrix} \xleftarrow{L_1 \to L_1+iL_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & i-1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow L_3 \to -iL_3$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & i-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \to L_4-(i-1)L_3]{L_1 \to L_1-2L_3,\ L_2 \to L_2+iL_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne le ~~sytème~~ système

~~$x_1 = 0$ $x_1 = x_2 =$~~

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Ainsi, Ker $V_1 = <\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\}>$.

Calculons le sous-espace propre généralisé de 1.

- <u>Ker $((C - I_d)^2)$</u>

Calulons la matrice $(C - I_d)^2$.

$$\begin{pmatrix} 0 & i & 1 & i \\ 0 & i-1 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & i-1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1-i & i & -2 \\ 0 & -2i & i-1 & -2-i \\ 0 & 0 & 0 & -1-i \\ 0 & 0 & 0 & -2i \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_4]{L_2 \leftrightarrow L_1}$$

Utilisons la méthode de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2}(-1-i) & \frac{1}{2}(1-2i) \\ 0 & -1-i & i & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & (-1-i) \end{pmatrix} \xleftarrow[L_3 \to \frac{L_3}{-2i}]{L_2 \to \frac{L_1}{-2i}} \begin{pmatrix} 0 & -2i & i-1 & -2-i \\ 0 & -1-i & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2i \\ 0 & 0 & 0 & -1-i \end{pmatrix}$$

$L_4 \to L_4 - (-1-i)L_3$

$L_2 \to L_2 - (-1-i)L_1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2}(-1-i) & \frac{1}{2}(1-2i) \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}(1+i) \ \cancel{(5+3i)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \to L_2 + \frac{1}{2}(1+i)L_3]{L_1 \to L_1 - \frac{1}{2}(1-2i)L_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2}(1+i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne le système

$$\begin{cases} x_2 = \frac{1}{2}(1+i)x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Et donc Ker $((C - I_d)^2) = <\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ \frac{1+i}{2}\\ 0\end{pmatrix}\}>$

Puisque dim Ker $((C - I_d)^2) = 2$ ~~qui~~ est ~~la~~ égale à la multiplicité algebrique de la valeure propre 1, On a Ker $((C - I_d)^2) = V(1)$

Nous allons donc choisir un vecteur propre $v_1 \in V_1$ et et un vecteur $v_2 \in V(1) \setminus V_1$.

$\rightarrow$ - $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+i \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Calculons le sous espace propre de la valeur propre i :

$V_i = \mathrm{Ker}(C - i\,\mathrm{Id})$

$$C - i\,\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 1-i & i & i & i \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 1-i & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \to \frac{L_1}{1-i} = \frac{1}{2}(1+i)L_1}$$

Utilisons la méthode de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(i-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xleftarrow[L_3 \to L_3 - (1-i)L_2]{L_1 \to L_1 - \frac{1}{2}(1+i)L_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(i-1) & \frac{1}{2}(1+i) & \frac{1}{2}(i-1) \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 1-i & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow L_3 = -L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(i-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - iL_3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(i-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne le système

$$\begin{cases} x_1 = \mp\frac{1}{2}(1-i)x_2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Ainsi, $V_i = \mathrm{Ker}(C - i\,\mathrm{Id}) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1-i \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

On posera $v_3 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Calculons le sous-espace propre généralisé de i.

- ~~[illegible]~~ $\mathrm{Ker}((C-i\,Id)^2)$

calculons $(C-i\,Id)^2$

$$\begin{pmatrix} 1-i & i & 1 & i \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 1-i & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -2i & i+1 & 2-i & 2i \\ 0 & 0 & 1-i & i \\ 0 & 0 & -2i & 1+i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Utilisons la méthode de Gauss:

$L_1 \to \frac{L_1}{-2i}$

~~E_3~~ $L_3 \to L_3/(1-i)$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(-1+i) & 0 & \frac{1}{4}(-1+i) \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}(-1+i) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$L_1 \to L_1 - \frac{1}{2}(1+2i)L_2$

$L_3 \to L_3 + 2iL_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(-1+i) & \frac{1}{2}(1+2i) & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}(-1+i) \\ 0 & 0 & -2i & 1+i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne le système

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(-1+i)\,x_2 + \frac{1}{4}(1-i)\,x_4 \\ x_3 = \frac{1}{2}(1-i)\,x_4 \end{cases}$$

Ainsi,

$$V(i) = \mathrm{Ker}((C-Id)^2) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1-i \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-i \\ 0 \\ 2-2i \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

car la multiplicité algébrique est égale à $\dim \mathrm{Ker}((C-Id)^2)$

On cherche $v_4 \in V(i) \setminus V_i$

$\to$ posons $v_4 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 0 \\ 2-2i \\ 4 \end{pmatrix}$.

Ainsi, l'ensemble $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ forment une base de $\mathbb{R}^4$. Calculons la matrice de changement de base D.

On a

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-i & 1-i \\ 0 & 1+i & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2-2i \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Ainsi, D est inversible et

$$D^{-1}CD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

est sous forme canonique de Jordan.

MATHF102: Algèbre linéaire et géométrie

Examen du 2 juin 2021: **Partie Problèmes**

NOM : Prénom : Section: MATH / PHYS

VEILLEZ À JUSTIFIER SOIGNEUSEMENT TOUTES VOS RÉPONSES.
NOTRE APPRÉCIATION DE VOTRE TRAVAIL DÉPEND DE LA QUALITÉ
DE VOTRE RÉDACTION.

---

3. (15 points) Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$q(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 + 2\alpha xy + 2\alpha yz\,.$$

Déterminez la signature de q en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 3

Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$q(x,y,z) := x^2+y^2+z^2+2\alpha xy+2\alpha yz.$$

La matrice associée à q est

$$Q := \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

Étant donné que la signature de q est indépendante de la base (par le théorème de Sylvester), trouvons une base de $\mathbb{R}^3$ pour laquelle la matrice Q est diagonale.

On calcule $P_Q(\lambda)$ (le polynôme caractéristique de Q) :

$$P_Q(\lambda) = \det(Q-\lambda Id) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \alpha & 0 \\ \alpha & 1-\lambda & \alpha \\ 0 & \alpha & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & \alpha \\ \alpha & 1-\lambda \end{vmatrix} - \alpha \begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ \alpha & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2-\alpha^2\right) - \alpha\left(\alpha(1-\lambda)\right)$$

$$= (1-\lambda)^3 - \alpha^2(1-\lambda) - \alpha^2(1-\lambda)$$

$$= (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2-\alpha^2-\alpha^2\right)$$

$$= (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2-2\alpha^2\right)$$

$$= (1-\lambda)\left((1-\lambda)-\sqrt{2}\alpha\right)\left((1-\lambda)+\sqrt{2}\alpha\right)$$

$$= (1-\lambda)\left(1-\sqrt{2}\alpha-\lambda\right)\left(1+\sqrt{2}\alpha-\lambda\right)$$

Ainsi, $\mathrm{Spec}(Q) = \{1, 1-\sqrt{2}\alpha, 1+\sqrt{2}\alpha\}$.

~~Ainsi la multiplicité de chaque~~

• Si $\alpha = 0$, Alors $Q = Id$ et $\boxed{\mathrm{sgn}(q) = (0,3,0)}$

Si $\alpha \neq 0$

Alors la multiplicité de chaque valeur propre est 1 ce qui assure que Q peut être mise sous forme diagonale.

Soit $v_1 \in V_1$
$v_2 \in V_{1+\sqrt{2}\alpha}$
$v_3 \in V_{1-\sqrt{2}\alpha}$

Alors $\{v_1, v_2, v_3\}$ forme une base de vecteur propre de $\mathbb{R}^3$ (de Q)

Ainsi il existe D tel que

$$D^{-1} Q D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{2}\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\sqrt{2}\alpha \end{pmatrix}$$

- si $\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$: $D^{-1} Q D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

et donc $\boxed{sgn(Q) = sgn(D^{-1}QD) = (1, 2, 0)}$.

- si $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$: $D^{-1} Q D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et donc $\boxed{sgn(Q) = (1, 2, 0)}$

- si $|\alpha| < \frac{1}{\sqrt{2}}$: Alors $1+\sqrt{2}\alpha > 0$ et $1-\sqrt{2}\alpha > 0$

Ainsi $\boxed{sgn(Q) = (0, 3, 0)}$

- si $\alpha > \frac{1}{\sqrt{2}}$: Alors $1+\sqrt{2}\alpha > 0$ et $1-\sqrt{2}\alpha < 0$

Ainsi $\boxed{sgn(q) = (0, 2, 1)}$

- si $\alpha < \frac{1}{\sqrt{2}}$: Alors $1+\sqrt{2}\alpha < 0$ et $1-\sqrt{2}\alpha > 0$

ainsi $\boxed{sgn(q) = (0, 2, 1)}$.

MATHF102: Algèbre linéaire et géométrie

Examen du 2 juin 2021: **Partie Problèmes**

NOM : Prénom : Section: MATH / PHYS

VEILLEZ À JUSTIFIER SOIGNEUSEMENT TOUTES VOS RÉPONSES.
NOTRE APPRÉCIATION DE VOTRE TRAVAIL DÉPEND DE LA QUALITÉ
DE VOTRE RÉDACTION.

---

4. (10 points) Soit $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un opérateur linéaire dont la matrice dans la base canonique est *symétrique*. Supposons que $A^k = \mathrm{Id}$ pour un naturel $k \geqslant 1$. Montrer que $A^2 = \mathrm{Id}$.

EXERCICE 4

Soit $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un opérateur linéaire dont la matrice dans la base canonique est symétrique. Supposons que $A^k = Id$ pour un naturel $k \geq 1$. Notons B la matrice ~~canonique~~ associée à A dans la base canonique. Par hypothèse, B est symétrique. Ainsi, il existe une base de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de A. Ceci signifie qu'il existe une matrice $C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ diagonale et une matrice inversible $b \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ tels que

$$C = b^{-1} B b.$$

C est donc ~~la~~ une matrice associée à A dans une base de vecteurs propres. C est diagonale, donc $C_{ij} = \delta_{ij} C_{ii}$. Ainsi, on calcule

$$C^2_{ij} = \sum_{p=1}^{n} C_{ip} C_{pj}$$

$$= \sum_{p=1}^{n} \delta_{ip} C_{ii} \delta_{pj} C_{jj}$$

$$= \delta_{ij} C_{ii}^2.$$

En raisonnant par récurrence, on a que

$$C^k_{ij} = \delta_{ij} C^k_{ii}$$

Or $A^k = Id$, donc $C^k_{ij} = \delta_{ij}$, donc $C^k_{ii} = 1$. Ainsi, $C_{ii} \in \{1, -1\}$, et donc $C^2_{ii} = 1$. Ceci implique que $C^2_{ij} = \delta_{ij} C^2_{ii} = \delta_{ij}$. Donc $C^2 = Id$, et donc $A^2 = Id$. ∎

MATHF102: Algèbre linéaire et géométrie

Examen du 18 Janvier 2022

Note : /80

NOM: Prénom: Matricule: Section: MATH/PHYS

!!!! CONSIGNES !!!!

!!! LISEZ ATTENTIVEMENT TOUTES LES CONSIGNES AVANT DE COMMENCER L'EXAMEN !!!

— Écrivez immédiatement votre nom sur cette page et sur toutes les autres pages.

— L'examen dure **3h**.

— Examen à cours ouverts: il est permit d'utiliser le syllabus et/ou des notes personnelles (seulement de la théorie, pas d'exercices/TP).

— Les brouillons ne seront corrigés en aucun cas.

— Ne dégrafez pas les feuilles qui ont été agrafées ensemble.

— Justifiez soigneusement toutes vos réponses en explicitant clairement tous les calculs et raisonnements ! Sauf indication contraire explicite, la réponse ne sera pas corrigée sans justification !

— Notre appréciation de votre travail dépend de la qualité de votre rédaction.

— Si vous n'avez pas suffisamment de place pour votre réponse, vous pouvez continuer sur le dos de la page et sur la page suivante lorsqu'elle est vierge. Veuillez indiquer clairement où se trouve la suite de votre argument et ne PAS continuer sur une page dédiée à une autre question.

— Écrivez lisiblement et soignez la présentation de vos réponses.

— N'utilisez pas la couleur rouge dans vos réponses.

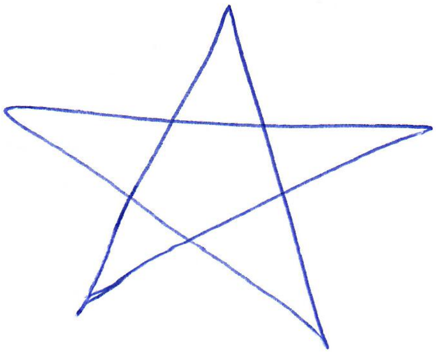
— Vous ne pouvez sortir de la salle sans remettre définitivement votre copie, ni sans autorisation.

— Les GSM, calculatrices et autres ordinateurs/objets connectés sont formellement interdits.

— Toute tentative de fraude ou de communication sera sévèrement sanctionnée.

— Si vous calculez la somme des maxima de chaque question, vous pouvez remarquer qu'il y a 90 points à gagner bien qu'il suffise de gagner 80 points pour obtenir une note maximale.

— Si vous avez lu attentivement toutes les consignes, veuillez dessiner une étoile ici.



1. (15 points) Expliquer les points indiqués de la démonstration suivante.

PROPOSITION 2.14 Soient a et b deux points (différent à l'origine o) du plan de coordonnées (a_1, a_2) et (b_1, b_2). Alors l'angle entre $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ est l'unique réel $\alpha \in [0, \pi]$ qui satisfait

$$\cos \alpha = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{||\overrightarrow{a}|| \cdot ||\overrightarrow{b}||}.$$

Démonstration. Notons $\overrightarrow{c}$ la projection orthogonale de $\overrightarrow{a}$ sur la droite ob. Alors par construction $\overrightarrow{c} = t\,\overrightarrow{b}$ pour un certain nombre $t \in \mathbb{R}$.

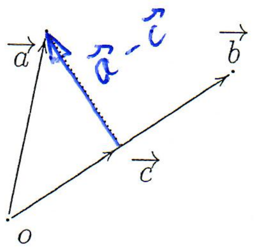
a) Pourquoi $\overrightarrow{c} = t\,\overrightarrow{b}$? Quelle est l'interpretation géométrique de t ?

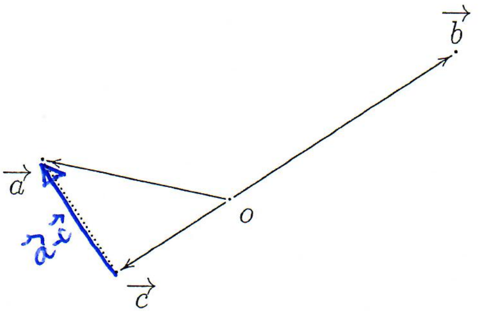
- Comme le point c appartient à la droite ob, le vecteur $\vec{c} = \vec{oc}$ est un multiple scalaire du vecteur $\vec{ob} = \vec{b}$. (prop. 2.1)
- Interpretation de t :

  $|t| = \frac{||\vec{c}||}{||\vec{b}||}$ ($|t|$ est le rapport entre la distance de o à c et la distance de o à b)

  t est positive ssi $\vec{c}$ et $\vec{b}$ ont le même sens
  t est négative ssi $\vec{c}$ et $\vec{b}$ n'ont pas le même sens
  (ssi o se trouve entre b et c)

De plus, $t > 0$ si et seulement si $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $t = 0$ si et seulement si $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et $t < 0$ si et seulement si $\alpha \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$.





Le cas $t = 0$ découle directement de la Proposition 2.9.

b) Pourquoi la formulle de l'énoncé devient celle de la Proposition 2.9 dans ce cas ? Quelle est l'interpretation géométrique ?

$t = 0 \iff \vec{c} = \vec{0} \iff c = 0 \iff \vec{a}$ est orthogonale à $\vec{b}$

$\iff \alpha = \frac{\pi}{2}$. Alors $\cos \alpha = \cos \frac{\pi}{2} = 0$

et l'énoncé devient : $0 = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}||}$

$\iff \underline{0 = a_1 b_1 + a_2 b_2}$

ceci est exactement la charactérisation de $\vec{a} \perp \vec{b}$ de la prop. 2.9

Supposons que $t > 0$. Le cas $t < 0$ suit d'une manière similaire, nous laissons les détails au lecteur.

Voir question (g) ci-desous

Comme a, o et c forment un triangle rectangle, nous savons que

$$\textcircled{*} \qquad ||\overrightarrow{a}||^2 = ||\overrightarrow{c}||^2 + ||\overrightarrow{a} - \overrightarrow{c}||^2$$

c) On applique quel théorème pour obtenir la formule ci-desus ? Indiquer le vecteur $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{c}$ dans les images sur la page précédente. ↳ théorème de Pythagore.

↓ voir image

En applicant la formule pour la norme d'un vecteur, il suit après un petit calcul que

$$||\overrightarrow{c}||^2 = a_1c_1 + a_2c_2 = a_1tb_1 + a_2tb_2 = t(a_1b_1 + a_2b_2).$$

d) Donner le calcul qui permet obtenir la première identité de la formule ci-desus.

$$\begin{aligned} \textcircled{*} \Rightarrow ||\vec{c}||^2 &= ||\vec{a}||^2 - ||\vec{a} - \vec{c}||^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2) - ((a_1 - c_1)^2 + (a_2 - c_2)^2) \\ &= \cancel{a_1^2} + \cancel{a_2^2} - \cancel{a_1^2} + 2a_1c_1 - c_1^2 - \cancel{a_2^2} + 2a_2c_2 - c_2^2 \\ &= 2(a_1c_1 + a_2c_2) - \underbrace{(c_1^2 + c_2^2)}_{||\vec{c}||} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\,||\vec{c}||^2 = 2(a_1c_1 + a_2c_2)$$

$$\Leftrightarrow \quad ||\vec{c}||^2 = a_1c_1 + a_2c_2$$

Comme le triangle aoc est rectangle, nous savons aussi que

$$\cos\alpha = \frac{||\overrightarrow{c}||}{||\overrightarrow{a}||}$$

Si nous multiplions le numérateur et dénominateur avec $||\overrightarrow{c}||$ (nous savons que $||\overrightarrow{c}|| \neq 0$!),

e) Pourquoi on est sur que $||\overrightarrow{c}|| \neq 0$? Pourquoi c'est important de le savoir ?

on a supposé que $t > 0$. En particulier, $t \neq 0 \Leftrightarrow \vec{c} \neq \vec{0}$
$\Leftrightarrow ||\vec{c}|| \neq 0$.

C'est important parce qu'on veut diviser par $||\vec{c}||$.

nous trouvons alors

$$\cos\alpha = \frac{||\overrightarrow{c}||^2}{||\overrightarrow{a}||\cdot||\overrightarrow{c}||} = \frac{t(a_1b_1+a_2b_2)}{t||\overrightarrow{a}||\cdot||\overrightarrow{b}||}$$

f) Expliquer la dernière égalité.

On a montré (voir (d)) $||\vec{c}||^2 = t(a_1b_1+a_2b_2)$

comme $\vec{c} = t\vec{b} \Rightarrow ||\vec{c}|| = |t|\,||\vec{b}||$

$= t\,||\vec{b}||$ comme $t>0$.

et comme $t \neq 0$, nous pouvons simplifier pour obtenir la formule de l'énoncé. ☐

g) Comment il faut adapter la dernière partie de la démonstration pour le cas $t<0$?

Si $t<0$, alors $\vec{c}$ et $\vec{b}$ ont une sens opposée.

Donc $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2},\pi\right]$ et $\cos\alpha = -\frac{||\vec{c}||}{||\vec{a}||} = -\frac{||\vec{c}||^2}{||\vec{a}||\,||\vec{c}||}$.

on utilise de nouveau la formule $||\vec{c}||^2 = t(a_1b_1+a_2b_2)$

Mais maintenant : $||\vec{c}|| = |t|\,||\vec{b}|| = -t||\vec{b}||$ (comme $t<0$)

et on trouve :

$$\cos\alpha = -\frac{t(a_1b_1+a_2b_2)}{-t||\vec{a}||\,||\vec{b}||} = \frac{a_1b_1+a_2b_2}{||\vec{a}||\,||\vec{b}||}$$

2. (18 points) Pour les questions suivantes, vous pouvez utiliser tous les résultats du syllabus, mais il faut faire proprement référence à tout résultat que tu utilises (soit énoncer le résultat, soit donner le numéro du théorème, lemme, etc).

a) Vrai ou faux ? Démontrer ou donner un contre-exemple
Soient U et U' deux sous-espaces de l'espace vectoriel V sur le corps $\mathbb{K}$. Soient B une base de U et B' une base de U'. Alors $B \cap B'$ est une base de $U \cap U'$. (5 points)

Faux. exemple : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{K} = U = U'$

$B = \{1\}$, $B' = \{2\}$.

Alors $U \cap U' = \mathbb{R}$, $B \cap B' = \emptyset$.

Mais $\emptyset$ n'est pas une base de $\mathbb{R}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

b) Soient V et V' des espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$, $S = \{\vec{v}_i \mid i \in I\} \subset V$ une partie libre et $f : V \to V'$ une application linéaire. Suppose que Vect$(S) \cap$ Ker$f = 0$. Montrer que $\{f(\vec{v}_i) \mid i \in I\}$ est une partie libre de V'. (5 points)

Soit $\lambda_1 f(\vec{v}_{i_1}) + \dots + \lambda_n f(\vec{v}_{i_n}) = \vec{0}$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, $i_1, \dots, i_n \in I$.

$$\underset{(f \text{ linéaire})}{=} f(\lambda_1 \vec{v}_{i_1} + \dots + \lambda_n \vec{v}_{i_n}) = \vec{0}$$

$\Rightarrow \lambda_1 \vec{v}_{i_1} + \dots + \lambda_n \vec{v}_{i_n} \in \operatorname{Ker} f$ et aussi $\lambda_1 \vec{v}_{i_1} + \dots + \lambda_n \vec{v}_{i_n} \in \operatorname{Vect}(S)$

Donc : $\lambda_1 \vec{v}_{i_1} + \dots + \lambda_n \vec{v}_{i_n} = \vec{0}$

$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ comme S est libre.

c) Soient V et V' des espaces vectoriels fini-dimensionnels sur un corps $\mathbb{K}$ tel que $V = U \oplus W$. Montrer que l'application

$$\alpha : \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V') \to \text{Hom}_{\mathbb{K}}(U, V') \times \text{Hom}_{\mathbb{K}}(W, V'), \quad \alpha(f) = (f_{|U}, f_{|W})$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. (8 points)

1) α est linéaire :

$$\alpha(\lambda f + \mu g) = ((\lambda f + \mu g)_{|U}, (\lambda f + \mu g)_{|W})$$
$$= (\lambda f_{|U} + \mu g_{|U}, \lambda f_{|W} + \mu g_{|W})$$
$$= \lambda(f_{|U}, f_{|W}) + \mu(g_{|U}, g_{|W})$$
$$= \lambda \alpha(f) + \mu \alpha(g).$$

2) α injectif $\Leftrightarrow$ Ker $\alpha = 0$.

Soit $f \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V')$ t.q. $\alpha(f) = (f_{|U}, f_{|W}) = (0, 0)$.

~~alors~~ $\Leftrightarrow$ $f(\vec{u}) = \vec{0} \ \forall \vec{u} \in U$ et $f(\vec{w}) = \vec{0} \ \forall \vec{w} \in W$.

Comme $V = U \oplus W$, $\forall \vec{v} \in V$, $\exists! \vec{u} \in U$, $\exists! \vec{w} \in W$

t.q. $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$

alors $f(\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{w}) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$

Donc $f(\vec{v}) = \vec{0} \ \forall \vec{v} \in V$, donc $f = 0$.

3) $\dim \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V') = \dim_{\mathbb{K}} V \cdot \dim_{\mathbb{K}} V'$

$$\dim(\text{Hom}_{\mathbb{K}}(U, V') \times \text{Hom}_{\mathbb{K}}(W, V')) = \dim \text{Hom}_{\mathbb{K}}(U, V') + \dim_{\mathbb{K}}(W, V')$$
$$= \dim U \cdot \dim V' + \dim W \cdot \dim V'$$
$$= (\dim U + \dim W) \cdot \dim V'$$

comme $V = U \oplus W$ $\longrightarrow$ $= \dim V \cdot \dim V'$

Par Cor. 7.22 : f est un isomorphisme.

3. (10 points)

On considère l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$, et on définit une relation R sur $\mathbb{Q}$ par (pour $a, b \in \mathbb{Q}$)

$$a\,R\,b \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{N}\colon 10^k(a-b) \in \mathbb{Z}.$$

(a) Montrer que R est réflexive est symétrique.

- Réflexivité : soit $a \in \mathbb{Q}$ quelconque. Vu que $0 = 10^0(a-a) \in \mathbb{Z}$, on a que $a R a$. Donc $\forall a \in \mathbb{Q}$, $a R a$; c'est-à-dire R est réflexive.

- Symétrie : soit $a, b \in \mathbb{Q}$ quelconques et supposons que $a R b$. Il faut montrer que $b R a$. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $10^k(a-b) \in \mathbb{Z}$ parce que $a R b$. Il suit que $10^k(b-a) = -10^k(a-b) \in \mathbb{Z}$ aussi, d'où $b R a$. Alors on conclut que R est symétrique.

(b) Compléter la preuve suivante pour la transitivité de R.

Démonstration. Soit $a, b, c \in \mathbb{Q}$ et supposons que $a\,R\,b$ et $b\,R\,c$. Il faut montrer que

$a R c$, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $10^k(a-c) \in \mathbb{Z}$.

Vu que $a\,R\,b$, il existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tel que $10^{k_1}(a-b) \in \mathbb{Z}$.
Vu que $b\,R\,c$, il existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tel que $10^{k_2}(b-c) \in \mathbb{Z}$.
Ecrivons $k_3 = \max(k_1, k_2)$. Alors

$$10^{k_3}(a-c) = 10^{k_3}(a-b+b-c) = 10^{k_3}(a-b) + 10^{k_3}(b-c)$$

Vu que $k_3 \geqslant k_1$, 10^{k_3} est un multiple entier de 10^{k_1}. On sait que $10^{k_1}(a-b) \in \mathbb{Z}$, alors aussi $10^{k_3}(a-b) \in \mathbb{Z}$. Un raisonnement analogue montre que $10^{k_3}(b-c) \in \mathbb{Z}$, d'où

$$10^{k_3}(a-c) = 10^{k_3}(a-b) + 10^{k_3}(b-c) \in \mathbb{Z}.$$

☐

4. (7 points)
Considérer l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a+c, 0, b-c, a+b)$$

Décrire Ker(f) (à justifier) et donner sa dimension (à expliquer brièvement).

On a que $\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \,\middle|\, f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (0,0,0,0) \right\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \,\middle|\, (a+c, 0, b-c, a+b) \right\}$

Alors ~~pour~~ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \ker f$ (où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$) si et seulement si

$$\begin{cases} a+c=0 \\ b-c=0 \\ a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-c \\ b=c \end{cases}$$

d'où $\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} -c & c \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ (autres paramétrisations sont possibles !)

$\dim \ker f = 2$ car la description ci-dessus nécessite deux paramètres indépendants.

(En effet une base pour $\ker f$ est $\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \ker f$.

car cet ensemble est libre : si pour $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, il suit directement que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et

génératrice : chaque élément de $\ker f$ est de forme $c \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.)

Nicolas Zadeh

Exercice 5. On se place dans $\mathbb{R}^3$.

1. On considère les deux ensembles $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/2x + 2y + 2z = 1\}$, et $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/x - y + z = \frac{3}{2}\}$. Quels objets géométriques représentent E_1 et E_2 ? Déterminer un vecteur normal à E_1, ainsi qu'un vecteur normal à E_2.
2. Montrer que $E_1 \cap E_2$ est non-vide. En notant F $= E_1 \cap E_2$, quel objet géométrique représente F ? Déterminer une équation paramétrique de F.
3. On note $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/3x + z = 0\}$. Déterminer l'intersection $F \cap G$. *Ecrire un système avec les équations cartésiennes de E_1,E_2 et G, puis le résoudre en utilisant la méthode du Pivot de Gauss.*
4. Est-ce que le ou les éléments de $F \cap G$ appartiennent à la sphère de centre O et de rayon 1 ?

Solution de l'exercice

1. On reconnaît des équations de la forme $ax + by + cz + d = 0$, avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Ainsi E_1 et E_2 représentent des plans. Par théorème, pour un plan de la forme précédemment évoquée, un vecteur normal est le vecteur (a, b, c). Ici, un vecteur normal à E_1 est donc $\overrightarrow{n_1} = (1, 1, 1)$ et un vecteur normal à E_2 est $\overrightarrow{n_2} = (1, -1, 1)$.
2. On remarque que les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont non-colinéaires. Dès lors, l'intersection F entre E_1 et E_2 est nécessairement non-vide ; on peut même aller plus loin : F est une droite de $\mathbb{R}^3$.

   Tout point (x, y, z) de F obéit au système :

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z & = 1 \\ x - y + z & = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z & = \frac{1}{2} \\ x - y + z & = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & = \frac{-1}{2} \\ x & = 1 - z \end{cases}$$

   d'où $F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x & = 1 - \lambda \\ y & = \frac{-1}{2} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}^3) \\ z & = \lambda \end{cases} \right\}.$

3. Pour déterminer l'intersection $F \cap G$, on passe par la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z & = 1 \\ x - y + z & = \frac{3}{2} \\ 3x + z & = 0 \end{cases}$$

   via l'opération

$$L_1 \leftrightarrow L_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z & = \frac{3}{2} \\ 2x + 2y + 2z & = 1 \\ 3x + z & = 0 \end{cases}$$

   en effectuant les opérations $L_2 \leftrightarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftrightarrow L_3 - 3L_1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z & = \frac{3}{2} \\ 4y & = -2 \\ 3y - 2z & = -9/2 \end{cases}$$

en effectuant l'opération $L_2 \leftrightarrow L_2/4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z & = \frac{3}{2} \\ y & = -1/2 \\ 3y - 2z & = -9/2 \end{cases}$$

en effectuant les opérations $L_1 \leftrightarrow L_1 + L_2$ et $L_3 \leftrightarrow L_3 - 3L_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z & = 1 \\ y & = -1/2 \\ -2z & = -3 \end{cases}$$

et finalement

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & = -1/2 \\ y & = -1/2 \\ z & = 3/2 \end{cases}$$

d'où

$$F = \left\{ \left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{3}{2} \right) \right\}.$$

Géométriquement, on remarque qu'il n'y a pas de problème : on a l'intersection d'une droite ($F \cap G$) avec un plan ; le résultat était forcément une droite (si la droite "repose" sur le plan) ou un point (si la droite transperce le plan). Des considérations sur les vecteurs normaux permettraient de démontrer qu'on obtient uniquement un point sans avoir besoin de calculer les coordonnées.

4. La sphère de centre O et de rayon 1 ayant pour équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, on vérifie pour l'unique point de F : $(\frac{-1}{2})^2 + (\frac{-1}{2})^2 + (\frac{3}{2})^2 = \frac{11}{4} \neq 1$ ainsi F n'est pas contenu dans la sphère de centre O et de rayon 1.

6. (10 points)

Soit $V = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, on donne $n+1$ points distincts $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

(1) Montrer que pour $i \in \{0, \dots, n\}$, les polynômes

$$P_i(X) = \frac{\prod_{j \neq i}(X - a_j)}{\prod_{j \neq i}(a_i - a_j)}$$

sont linéairement indépendants. Nous précisons la notation

$$\prod_{j \neq i} b_j = \prod_{j \in \{0, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}} b_j = b_0 \cdot \dots \cdot b_{i-1} \cdot b_{i+1} \cdot \dots \cdot b_n.$$

(Indice: calculer $P_i(a_i)$ et $P_i(a_j)$ où $j \neq i$.)

(2) Montrer que le sous-espace vectoriel de V engendré par les polynômes P_i est $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$.

(3) Prouver le théorème d'interpolation de Lagrange: soient $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{R}$, il existe un unique polynôme P de degré au plus n tel que pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, $P(a_i) = y_i$.

Vous avez le droit d'utiliser le résultat de la sous-question 1 pour répondre aux sous-questions 2 et 3, même si vous ne répondez pas à la sous-question 1. De même, vous pouvez utiliser le résultat de la sous-question 2 pour répondre à la sous-question 3, même si vous ne répondez pas à la sous-question 2.

(1) On calcule : $P_i(a_i) = \frac{\prod_{j \neq i}(a_i - a_j)}{\prod_{j \neq i}(a_i - a_j)} = 1$

$P_i(a_j) = \frac{\prod_{k \neq i}(a_j - a_k)}{\prod_{k \neq i}(a_i - a_k)} = 0$ car le facteur $k = j$ est $(a_k - a_k)$

Soit $\lambda_0 P_0 + \dots + \lambda_n P_n =: P$ une combinaison linéaire. Montrons que si $P = 0$ alors $\forall i \in \{0, \dots, n\}$, $\lambda_i = 0$. On calcule $P(a_i)$:

$P(a_i) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j P_j(a_i) = \lambda_i P_i(a_i) = \lambda_i$. Or on a supposé $P = 0$, donc $\lambda_i = 0$ pour tout i, ce qui prouve que les polynômes P_i sont linéairement indépendants.

2. On a $\dim(\mathbb{R}[X]_{\leq n}) = n+1$. Puisque chaque P_i est le produit de n polynômes ~~de~~ degré 1, $\deg(P_i) = n$, donc $P_i \in \mathbb{R}[X]_{\leq n}$.

On a $n+1$ polynômes P_i qui sont linéairements indépendants dans un espace de dimension $n+1$, donc c'est une famille libre maximale, donc une base. Il suit donc que l'espace engendré par les polynômes P_i est $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$.

3. Pour l'existence, il suit des calculs au point (1) que $P := \sum_{i=0}^{n} y_i P_i$ satisfait la propriété souhaitée.

Pour l'unicité, soit P' un polynôme satisfaisant $P'(a_i) = y_i$ pour tout i et $\deg P' \leq n$. Alors il existe une unique combinaison linéaire $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i = P'$. En évaluant en a_i, on trouve: $y_i = P'(a_i) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j P_j(a_i) = \lambda_i$, donc $\lambda_i = y_i$ et donc $P' = P$.

7. (15 points)

Considérons l'espace vectoriel complexe $\mathbb{C}^3$. Soient $B = \{\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3\}$ la base canonique de $\mathbb{C}^3$ et $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ l'endomorphisme défini par

$$f(\overrightarrow{e}_1) = \overrightarrow{e}_1, \qquad f(\overrightarrow{e}_2) = (i, 0, i), \qquad f(\overrightarrow{e}_3) = (-1, i, 0)$$

(a) Écrire la matrice $[f]_{B,B}$.

(b) Soient $\overrightarrow{u}_1 = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{u}_2 = (1, 1, 1)$ et $\overrightarrow{u}_3 = (1, -1, 1)$. Montrer que

$$f(\overrightarrow{u}_2) = i\overrightarrow{u}_2 \text{ et } f(\overrightarrow{u}_3) = -i\overrightarrow{u}_3.$$

(c) Vérifier que $F = \{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3\}$ est libre.

(d) Trouver une matrice A telle que

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} A^{-1} = [f]_{B,B}$$

(e) Compléter la preuve par récurrence suivante :

Démonstration. Montrons que

$$[f]^n_{B,B} = A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i^n & 0 \\ 0 & 0 & (-i)^n \end{pmatrix} A^{-1}$$

pour tout naturel $n \geq 1$.

L'initialisation en $n = 1$ découle immédiatement du point (d).

Supposons que $[f]^n_{B,B} = A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i^n & 0 \\ 0 & 0 & (-i)^n \end{pmatrix} A^{-1}$, pour un certain naturel n.

$$[f]^{n+1}_{B,B} = [f]^n_{B,B}[f]_{B,B} = A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i^n & 0 \\ 0 & 0 & (-i)^n \end{pmatrix} A^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & (-i) \end{pmatrix} A^{-1}$$

$$= A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i^n & 0 \\ 0 & 0 & (-i)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & (-i) \end{pmatrix} A^{-1}$$

$$= A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & (-i)^{n+1} \end{pmatrix} A^{-1}$$

☐

(f) En utilisant (e), calculer rapidement $[f]^{12}_{B,B}$.

(g) En déduire que f est un isomorphisme.

a) $[f]_{B,B} = \begin{pmatrix} 1 & i & -1 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$

b) $f(\vec{u}_2) = f(\vec{e}_1) + f(\vec{e}_2) + f(\vec{e}_3)$

$= \begin{pmatrix} i \\ i \\ i \end{pmatrix}$

$= i \cdot \vec{u}_2$

$f(\vec{u}_3) = f(\vec{e}_1) - f(\vec{e}_2) + f(\vec{e}_3)$

$= \begin{pmatrix} -i \\ i \\ -i \end{pmatrix}$

$= -i \cdot \vec{u}_3$

c) Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \lambda_3 \vec{u}_3 = 0$

Alors,

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Les deux équations du bas impliquent que $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ et on déduit de la première que $\lambda_1 = 0$.

Donc F est libre.

d) La matrice A est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

f) $[f]_{B,B}^{12} = A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i^{12} & 0 \\ 0 & 0 & (-i)^{12} \end{pmatrix} A^{-1}$

$= A \, Id \, A^{-1}$

$= A \, A^{-1}$

$= Id$

g) $[f]_{B,B}^{12} = Id \Rightarrow [f]_{B,B}^{11} = [f]_{B,B}^{-1}$

Donc $[f]_{B,B}$ est inversible.

On en déduit que f est inversible et donc un isomorphisme

Math-f105

Ce cours n'est pas le plus dur de l'année à mon sens. Il est intéressant et ressemble de temps en temps à CDI mais n'est pas aussi dur que celui-ci. Il faut aller aux tps absolument! Ceux-ci t'aideront énormément à appliqué les résultats du cours. Le cours en lui même est plutôt fun à regarder (entre-autre dû au légendaire Yvik Swan) donc vas-y et amuse toi!

Phys-f110

Le cours de physique en BA1 est composé de deux parties: mécanique au Q1 et électromagnétisme au Q2. Mais le fonctionnement est globalement le même: il y a le cours théorique (auquel je te conseille vraiment d'aller), les séances d'exercices (auxquelles je te conseille très très vraiment d'aller) et des labos (auxquels t'es obligé.e d'aller). Les notions que tu verras sont à peu près les mêmes que celles vues en secondaire, mais tu les verras plus en profondeur et plus rigoureusement. Ne néglige pas l'importance de la théorie: de toute façon, il y a une partie théorique à l'examen, mais une bonne compréhension du cours aide sérieusement à résoudre les exercices. Après, il n'y a pas de miracle: pour savoir faire les exercices, il faut faire les exercices, et se casser la tête pour les réussir. Je te conseille d'essayer de tous les faire (même ceux de niveau III qui ont l'air un peu méchants) et de rendre tes exercices supplémentaires: un point bonus, c'est parfois très très précieux ;) Et surtout, n'hésite jamais à poser des questions. Les profs et les assistant.e.s sont là pour ça et ils peuvent vraiment t'aider!

Cercle des Sciences

Ex. 1 (10 points) :	Ex. 2 (10+1 points) :	Total (sur 20) :

Nom :

Section :

INTERROGATION DE NOVEMBRE

Durée : 1 heure 15

Aucun document ou appareil électronique n'est autorisé.
La clarté et la rigueur de vos justifications ont une importance capitale.

Exercice 1

1) Rappeler la définition du centre de masse G d'un système $\mathscr{S}$ de N points matériels de masses m_i placés aux points A_i, $1 \leq i \leq N$.
2) Soit $\mathcal{R}$ un référentiel inertiel. Rappeler la définition du référentiel du centre de masse $\mathcal{R}^*$ pour le système $\mathscr{S}$.
3) Si $\vec{v}_A$ et $\vec{v}_G$ sont les vitesses d'un point matériel A et du centre de masse G dans le référentiel $\mathcal{R}$, $\vec{v}_A^*$ la vitesse du point A dans $\mathcal{R}^*$, trouver la relation entre $\vec{v}_A$, $\vec{v}_A^*$ et $\vec{v}_G$.
4) Montrer que l'impulsion totale $\vec{P}^*$ du système $\mathscr{S}$ dans $\mathcal{R}^*$ est nulle.
5) Énoncer et démontrer le théorème de Koenig pour l'énergie cinétique (c'est-à-dire le deuxième théorème de Koenig) pour le système $\mathscr{S}$.

Exercice 2 On considère un bloc rectangulaire de masse m reposant sur une table horizontale. Les coefficients de frottement statique et dynamique associés au contact entre le bloc et la table sont notés μ_{s} et μ_{d} respectivement. Un opérateur extérieur pousse sur le bloc en lui appliquant une force $\vec{F}$ dont les caractéristiques sont indiquées sur la figure. On suppose que $0 < \theta < \pi/2$. On notera $F = ||\vec{F}||$ la norme (ou l'intensité) de la force. On pourra utiliser un système de coordonnées cartésiennes dont les axes (Ox) et (Oz) sont représentés sur la figure.

1) Donner la liste de toutes les forces qui s'exercent sur le bloc. Représenter ces forces sur un schéma.

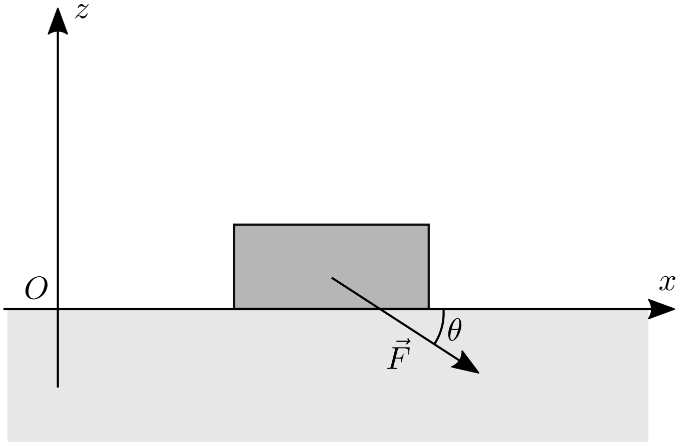


FIGURE 1 – Le bloc de masse m (rectangle grisé) posé sur une table horizontale, voir exercice 2. La force $\vec{F}$ fait un angle θ par rapport à l'horizontal.

2) On suppose que le bloc est immobile lorsque la force $\vec{F}$ lui est appliquée. Montrer qu'il existe un angle θ_0, que l'on calculera, tel que si $\theta > \theta_0$ alors le bloc ne se met jamais en mouvement, quelle que soit l'intensité de la force appliquée.
3) On suppose que $\theta < \theta_0$.
   a) Calculer l'intensité minimale F_{min} de la force à appliquer pour que le bloc se mette en mouvement.
   b) On suppose que $F > F_{\text{min}}$. Calculer l'accélération $\vec{a}$ du bloc.
   c) (Question bonus +1) Vérifier que le sens de $\vec{a}$ est bien en accord avec l'intuition physique.

Interrogation de novembre 2017
Correction

Exercice 1

1) Si O est un point quelconque, $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$

$$\vec{OG} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{OA_i}$$

2) R^* est le référentiel de centre G, en translation par rapport à R.

3) Soit O un point fixe dans R.

$$\vec{v}_A = \frac{d\vec{OA}}{dt} \; ; \; \vec{v}_G = \frac{d\vec{OG}}{dt} \; ; \; \vec{v}_A^{\,*} = \frac{d\vec{GA}}{dt}$$

$$\vec{OA} = \vec{OG} + \vec{GA} \underset{\uparrow}{\Longrightarrow} \vec{v}_A = \vec{v}_A^{\,*} + \vec{v}_G$$

en dérivant par rapport à t.

4) $\vec{P}^* = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_{A_i}^{\,*}$

On obtient $\vec{P}^* = \vec{0}$ en dérivant par rapport à t

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{GA_i} = \vec{0}$$

qui est un cas particulier de l'identité de la question 1) pour O = G.

5) 2e th. de Koenig :

$$E_c = E_c^* + \frac{1}{2} M \vec{v}_G^{\,2}$$

énergie cinétique propre = énergie cinétique totale dans R^*

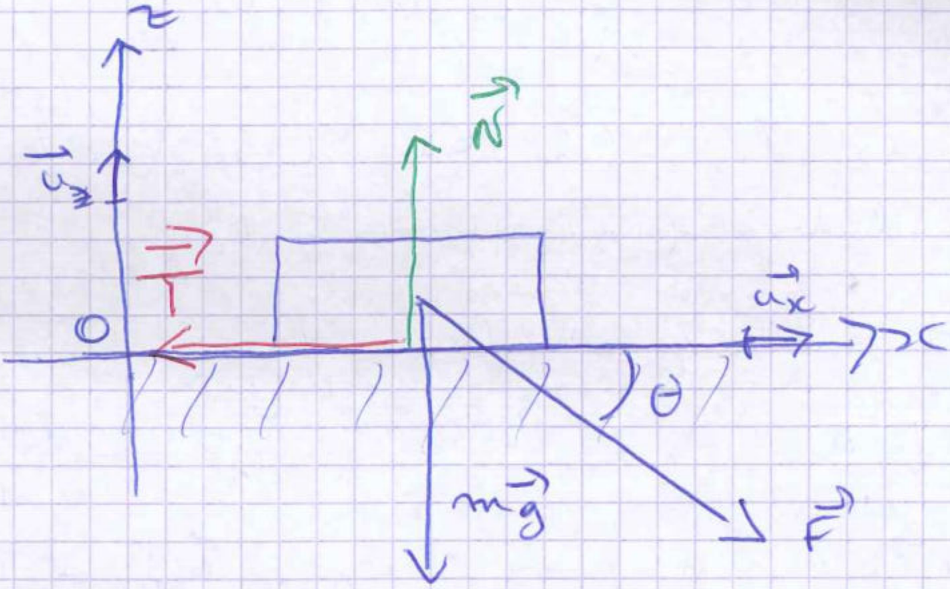
énergie cinétique totale dans R inertiel

Dém : $E_c \underset{\overset{\uparrow}{\text{définition}}}{=} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_{A_i}^{\,2} \underset{\overset{\uparrow}{\text{question 3)}}}{=} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\vec{v}^{\,*}_{A_i} + \vec{v}_G\right)^2$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}^{\,*2}_{A_i}}_{=E_c^*} + \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i}_{=M} \vec{v}_G^{\,2} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}^{\,*}_{A_i}}_{=\vec{P}^* = \vec{0}} \cdot \vec{v}_G$$

Exercice 2

1)



$\vec{F}$ = force appliquée ; $m\vec{g}$ = poids

$\vec{N}$ = réaction normale de la table

$\vec{T}$ = réaction tangentielle de la table.

On notera $F = \|\vec{F}\|$, $N = \|\vec{N}\|$, $T = \|\vec{T}\|$, $g = \|\vec{g}\|$

2) Bloc immobile $\Rightarrow \vec{T} + \vec{N} + m\vec{g} + \vec{F} = \vec{0}$,

soit, en décomposant sur les axes (Ox) et (Oz),

$$\begin{cases} F\cos\theta - T = 0 \\ N - mg - F\sin\theta = 0 \end{cases}$$

Donc $T = F\cos\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}(N - mg) = \frac{N - mg}{\tan\theta}$

Le bloc reste immobile tant que $T \le \mu_s N$, ce qui donne $\left(\frac{1}{\tan\theta} - \mu_s\right) N \le \frac{mg}{\tan\theta}$

ou $(1 - \mu_s \tan\theta)(mg + F\sin\theta) \le mg$

$\Leftrightarrow F\sin\theta\,(1-\mu_s\tan\theta) \le mg\mu_s\tan\theta$. (Eq.)

Comme $F > 0$, $\sin\theta > 0$, $\tan\theta > 0$, cette inégalité sera toujours satisfaite, $\forall F$, ssi $1 - \mu_s\tan\theta < 0$,

i.e. $\tan\theta > \frac{1}{\mu_s} \Leftrightarrow \theta > \theta_0$

où $\boxed{\tan\theta_0 = \frac{1}{\mu_s}}$

3) a) si $\theta < \theta_0$, l'éq. (Eq.) de la question précédente montre que $F_{min} = \frac{mg\mu_s\tan\theta}{\sin\theta(1-\mu_s\tan\theta)} = \frac{m\mu_s g}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta}$

b) Si $F > F_{min}$, le bloc se met en mouvement et donc $T = \mu_d N$.

Le th. de l'impulsion projeté sur les axes (Ox) et (Oy) donne donc, pour $\vec{a} = a\vec{u}_x$,

$$\begin{cases} F\cos\theta - \mu_d N = ma \\ N - mg - F\sin\theta = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow ma = F\cos\theta - mg\mu_d - F\mu_d\sin\theta$

$$\boxed{a = \frac{F}{m}(\cos\theta - \mu_d\sin\theta) - g\mu_d}$$

c) Question bonus :

Comme $\mu_d < \mu_s$, $\cos\theta - \mu_d \sin\theta > \cos\theta - \mu_s \sin\theta$

> 0

Donc $a > 0 \Leftrightarrow F > \dfrac{g m \mu_d}{\cos\theta - \mu_d \sin\theta}$

Or on sait que

$F > F_{min} = \dfrac{g m \mu_s}{\cos\theta - \mu_s \sin\theta} > \dfrac{g m \mu_d}{\cos\theta - \mu_d \sin\theta}$

car $\mu_s > \mu_d$

$\Rightarrow$ ça marche.

Question 1 (10 points) 10/10

TOUTES SECTIONS

Culture générale en physique.

La notation scientifique pour 15 km est $1{,}5\cdot10^4$ m.
Le préfixe correspondant à 10^3 est kilo.

1 1) Écrire en notation scientifique 175 milligrammes :

$175\,mg = 1{,}75\cdot10^{2}\,mg$

$175\,mg\cdot\frac{1\,g}{1000\,mg} = 0{,}175\,g = 1{,}75\cdot10^{-1}\,g \;;\; 0{,}175\,g\cdot\frac{1\,kg}{1000\,g} = 0{,}000175\,kg = 1{,}75\cdot10^{-4}\,kg$

1 2) Écrire en notation scientifique 85 décamètres :

$85\,dam\ \frac{10\,m}{1\,dam} = 850\,m = 8{,}5\cdot10^{2}\,m$

1 3) Écrire le préfixe correspondant à 10^6 :

10^6 = méga (M)

1 4) Écrire le préfixe correspondant à 10^{-9} :

10^{-9} = nano (n)

1 5) Quel est le nom de la lettre grecque θ (indiquer si c'est une minuscule ou une majuscule) ?

theta minuscule

1 6) Quel est le nom de la lettre grecque λ (indiquer si c'est une minuscule ou une majuscule) ?

lambda minuscule

1 7) Écrire la lettre grecque sigma minuscule :

σ

1 8) Quelle est la charge d'un électron (utiliser la notation scientifique) ?

$q_{e^-} = -1{,}6\cdot10^{-19}\,C$

1 9) Quel est la taille d'un proton (une erreur d'un facteur de 10 est admise pour cette question) ?

$10^{-15}\,m$

1 10) Donner le nom de 5 planètes du système solaire.

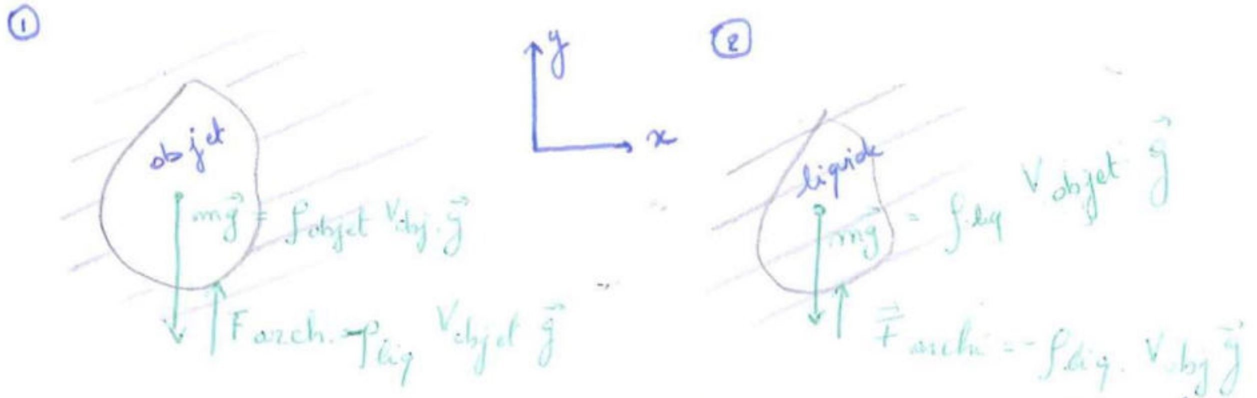
Mercure Vénus, Terre, Mars, Jupiter

Question 2 (10 points)
TOUTES SECTIONS SAUF MATH-BIO

Définition.

Enoncez le principe d'Archimède. Faites un schéma pour illustrer votre définition.

Lorsqu'un corps (ou une fraction de celui-ci) est immergé dans un liquide, la variation de pression entre les extrémités du dessus et du dessous engendre une force dirigée vers le haut (car comme le gradient de pression est donné par $\vec{\nabla} P = -\rho \vec{g}$, la pression va augmenter si on s'enfonce dans le liquide, la pression en dessous est plus grande qu'au dessus). ✓



Si on considère (en ②) que le masse du liquide occupé dans le même volume que l'objet est immobile, alors il y a une force égale et opposée à son poids qui s'applique sur lui et qu'on appelle la Force d'Archimède, donnée par

$$\vec{F}_{archi} = -\rho_{liq.} V_{obj} \vec{g}$$

10/10

Question 3. (10 points)

TOUTES SECTIONS

10

Analyse dimensionnelle.

Les vagues de grande longueur d'onde à la surface d'un liquide de grande profondeur sont caractérisées par leur longueur d'onde λ (la distance entre les crêtes des vagues), leur vitesse v, et leur amplitude A. Le liquide est caractérisé par sa masse volumique ρ et est soumis à la pesanteur g.

La vitesse de propagation des crêtes des vagues $v = v(\lambda, \rho, g)$ peut dépendre des caractéristiques du liquide (ρ, g) et de la longueur d'onde des vagues (λ), mais on observe qu'elle est indépendante de l'amplitude A (tout du moins si l'amplitude est faible).

Utilisez l'analyse dimensionnelle pour trouver la dépendance de v en λ, ρ, g.

$[\lambda] = L$ ✓

$[\rho] = M L^{-3}$ ✓

$[g] = T^{-2} L$ ✓

$[v] = L T^{-1}$ ✓ $= [\lambda]^{\alpha} [\rho]^{\beta} [g]^{\gamma} = L^{\alpha} M^{\beta} L^{-3\beta} L^{\gamma} T^{-2\gamma}$

$= L^{\alpha - 3\beta + \gamma} M^{\beta} T^{-2\gamma}$

$$\begin{cases} \alpha - 3\beta + \gamma = 1 \checkmark \quad \Rightarrow \quad \alpha + \frac{1}{2} = 1 \iff \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = 0 \\ -2\gamma = -1 \checkmark \quad \iff \quad \gamma = 1/2 \end{cases}$$

$v = k\sqrt{\lambda g}$ ✓ m/s où k est une constante.

10

Question 4 (10 points)

TOUTES SECTIONS

Démontrer, à partir des lois de Newton, le théorème ~~du centre~~ du moment cinétique pour un système de points matériels. Enoncez les principes ou lois auxquels vous faites appel dans votre argumentation et définissez les variables que vous utilisez.

On définit le moment cinétique comme étant

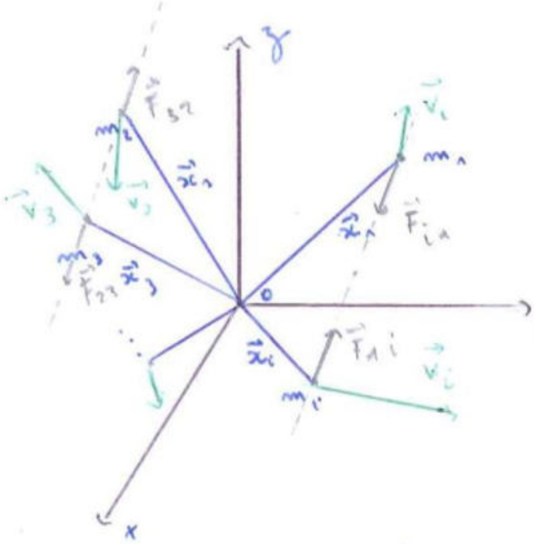
$$\vec{J}_0 := \sum_{i=0}^{n} \vec{x}_i \times \vec{p}_i \quad V$$

où $\vec{x}_i$ est le vecteur position de la particule i.

$\vec{p}_i$ est le vecteur quantité de mouvement donné par $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$. Et $\vec{J}_0$ est naturellement le vecteur moment angulaire par rapport à l'origine O.

Le moment de force V par rapport à l'origine O est donné par

$$\vec{M}_0 = \frac{d\vec{J}_0}{dt} = \sum_i^n \underbrace{\frac{d\vec{x}_i}{dt} \times \vec{p}_i}_{=\vec{0} \text{ car } \frac{d\vec{x}_i}{dt} = \vec{v}_i \parallel \vec{p}_i} + \sum_i^n \vec{x}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_i^n \vec{x}_i \times \vec{F}_i$$



Montrons que le moment de force n'est dépendant que des forces extérieurs

$$\vec{M}_0 = \sum_i^n \vec{x}_i \times \left(\vec{F}_i^{ext} + \sum_{j\neq i}^n \vec{F}_{ij}\right)$$

$$= \sum_i^n \vec{x}_i \times \vec{F}_i^{ext} + \sum_i^n \left(\vec{x}_i \times \sum_{j\neq i} \frac{1}{2}\left(\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}\right)\right.$$

$$= \sum_i^n \vec{x}_i \times \vec{F}_i^{ext} + \frac{1}{2}\sum_i^n \sum_{j\neq i}^n \left(\vec{x}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{x}_j \times \vec{F}_{ji}\right) \quad V$$

On sait que les forces $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ en vertue du principe des forces réciproques, de plus $\vec{x}_i - \vec{x}_j \parallel \vec{F}_{ij}$.

$$\Rightarrow \vec{M}_0 = \sum_i^n \vec{x}_i \times \vec{F}_i^{ext} + \frac{1}{2}\sum_i \sum_{j\neq i} \underbrace{(\vec{x}_i - \vec{x}_j) \times \vec{F}_{ij}}_{=\vec{0} \text{ car } \parallel} \quad V$$

Donc $\vec{M}_0^{ext} = \sum_i^n \vec{x}_i \times \vec{F}_i^{ext}$ V

Il s'ensuit que si

$$\vec{M}_0^{ext} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{J}_0 = cste$$

Donc le moment cinétique est conservé en l'absence de moment de force extérieur.

Question 5 (10 points)

UNIQUEMENT PHYSICIENS ET MATHS-PHYSIQUE

Le déplacement vertical $y(x,t)$ d'une corde vibrante soumise à une tension T et de masse linéique μ obéit l'équation d'onde

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

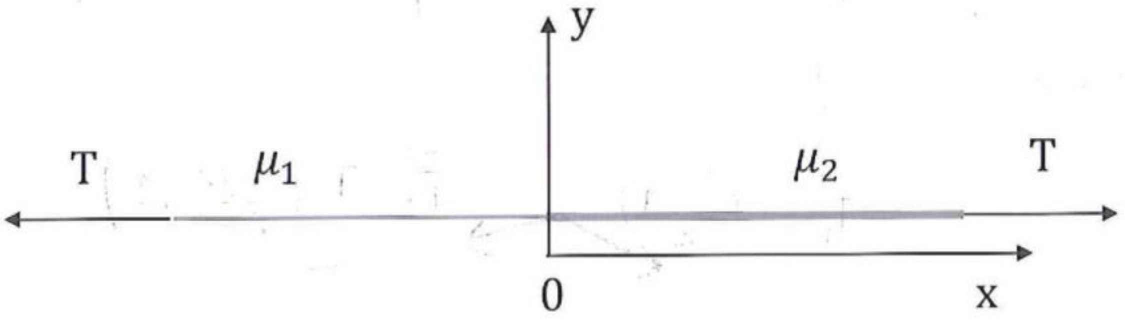
où $v^2 = T/\mu$.

La solution générale de cette équation d'onde est

$$y(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

où f et g sont deux fonctions arbitraires.

Considérons une corde constituée de deux parties. Pour les x négatifs elle a une masse linéique μ_1 , tandis que pour les x positifs elle a une masse μ_2 (voir figure).



La solution générale donnée ci-dessus fournit la solution pour les x négatifs et pour les x positifs séparément. Afin de connecter ces deux solutions il faut donner des conditions de raccord en x=0.

Quelles sont ces conditions de raccord, et quelle est leur origine physique ?

Soit $y_1(x,t)$ la solution de l'équation d'onde dans la région $x<0$

et soit $y_2(x,t)$,, ,, ,, ,, $x>0$.

Les conditions de raccord sont $y_1(x=0,t) = y_2(x=0,t)$ $\forall t$ ①

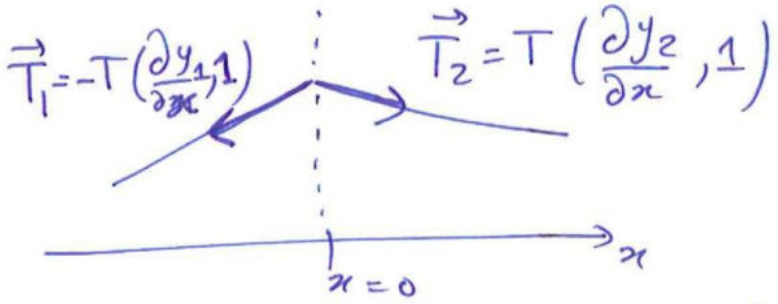
et $\frac{\partial y_1(x=0,t)}{\partial x} = \frac{\partial y_2(x=0,t)}{\partial x}$ $\forall t$ ②

- Origine physique de la condition ①: la corde est <u>continue</u> en $x=0$.

- Origine physique de la condition ②: le point $x=0$ ne peut pas subir une accélération infinie.

En effet, le vecteur tension (dans la corde) $\vec{T}(x,t)$ au point x à l'instant t est donné par $\vec{T}(x,t)=T\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x},1\right)$

(lorsque $\left|\frac{\partial y}{\partial x}\right| \ll 1$, ce qui est nécessaire pour dériver l'équation d'onde de la corde).

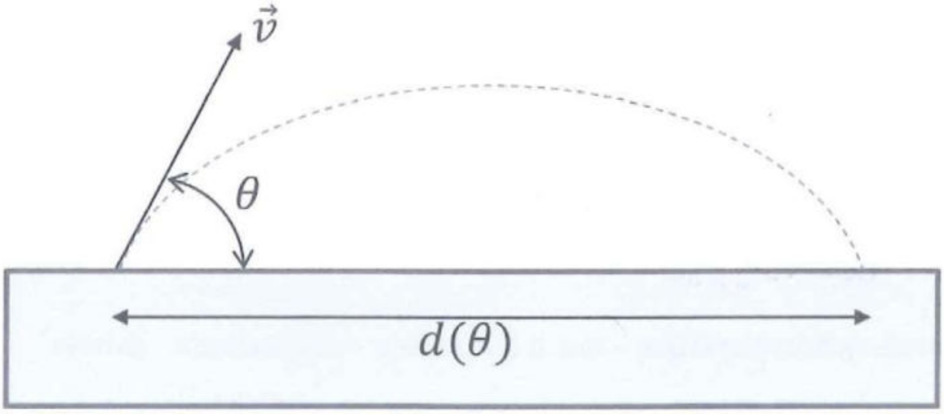


Si ② n'est pas obéit, alors le point $x=0$ subit une force finie (égale à $T\left(\frac{\partial y_2}{\partial x}-\frac{\partial y_1}{\partial x},0\right)$, voir dessin), or comme il s'agit d'un point, sa masse est nulle, et donc son accélération sera infinie (car $a=\frac{F}{m}$), ce qui n'est pas possible.

Question 1 (10 points)
TOUTES SECTIONS

11/10

Tir Balistique.



A l'instant $t = 0$ canon tire un boulet de masse m avec une vitesse $v = |\vec{v}|$ à un angle θ de l'horizontale, à partir du sol supposé horizontal. On néglige les frottements.

2

1) Donner les composantes horizontale et verticale du vecteur vitesse $\vec{v}$ à l'instant du tir $t = 0$ (en fonction de θ et de v).

$$\vec{V} = (|\vec{v}|.\cos\theta, |\vec{v}|.\sin\theta)$$ ✓

2

2) Pendant combien de temps l'objet est-il en l'air ?

$$\Delta t = \frac{\text{distance } d(\theta)}{\text{vitesse horizontale}}$$

car V_x est constante ✓

Posons t_1 = temps de montée
t_2 = temps de descente

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{d(\theta)}{|\vec{V}|.\cos\theta} = t_1 + t_2 = \frac{2|\vec{V}|.\sin\theta}{g}$$ ✓

... et on ne t'en demande pas +

MRUA $\rightarrow$ $V_y = V_{0_y} + at$. pour la montée : $0 = |\vec{V}|.\sin\theta - gt_1$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{|\vec{V}|.\sin\theta}{g}$$

montée : $y = y_0 + V_{0y} t + \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow y = 0 + |\vec{V}|.\sin\theta . t_1 - \frac{g}{2} t_1^2$

$$= \frac{|\vec{V}|^2 \sin^2\theta}{g} - \frac{1}{2}\frac{|\vec{V}|^2 \sin^2\theta}{g} = \frac{1}{2g}|\vec{V}|^2 \sin^2\theta$$

descente : $0 = \frac{1}{2g}|\vec{V}|^2 \sin^2\theta + 0.t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 \Rightarrow t_2^2 = \frac{|\vec{V}|^2 \sin^2\theta}{g^2} \Rightarrow t_2 = \frac{|\vec{V}|.\sin\theta}{g}$

3

3) Quelle est la distance horizontale parcourue $d(\theta, v)$?

~~$d = V_x . t_{tot} = V_x (t_1 + t_2)$ avec t_1 : temps pour monter~~

~~t_2 : temps pour descendre~~

~~MRUA pour la verticale ⇒ montée : $V_y = V_{oy} + a t_1$ $0 = |\vec{v}| . \sin\theta - g t_1$~~

~~$\Rightarrow t_1 = \frac{|\vec{v}| \sin\theta}{g}$~~

$$\frac{d(\theta, v)}{|\vec{v}| . \cos\theta} = \frac{2 |\vec{v}| \sin\theta}{g} \Rightarrow d(\theta, v) = \frac{2 |\vec{v}|^2 \sin\theta \cos\theta}{g} = \frac{|\vec{v}|^2 \sin 2\theta}{g}$$

✓

3

+1

4) Quel angle θ faut-il choisir pour que la distance d soit maximale, $v = |\vec{v}|$ étant fixé?

$d = \frac{|\vec{v}|^2 \sin 2\theta}{g}$ est maximale pour $\sin 2\theta$ maximal

$\Rightarrow \sin 2\theta = 1$

$\Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2}$

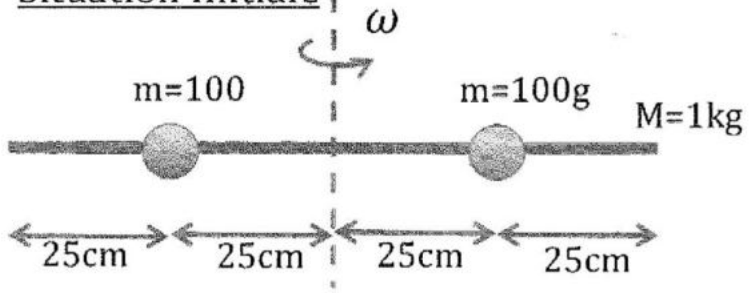
$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} = 45°$

✓

Question 2 (10 points).
TOUTES SECTIONS

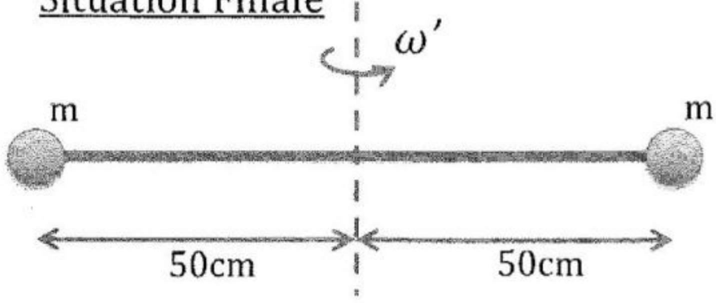
Une barre homogène de faible section de longueur L=1m et de masse M=1kg tourne sans frottement autour d'un axe passant par son centre.
Deux masses de 100g sont attachées à 25cm de l'axe (voir figure « Situation Initiale »).
La barre effectue un tour complet autour de son axe de rotation toutes les 2 secondes.

Situation Initiale



Situation Intermédiaire

Situation Finale



1) Quelle est la vitesse angulaire de rotation ω de l'ensemble (barre plus les deux masses) dans la situation initiale ?

$$\left(\cancel{\omega = \frac{L_0}{I}} \quad \cancel{\vec{L_0} = \vec{L_0^{tige}} + \vec{L_0^{masses}}} \quad \cancel{I = I_{barre} + I_{masses} = \frac{1}{12} ML^2 + 2 . m . (25 cm)^2 = \frac{1}{12} . 1 . 1^2 + 2 . 0,1 . (0,25)^2 = 0,096 \ Kg . m^2} \quad \cancel{= \int dx . \frac{M}{L} . x^2} \right)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \ rad/s$$

1/1

2) Quel est le moment d'inertie de l'ensemble (barre plus les deux masses) par rapport à son axe de rotation dans la situation initiale? (Le moment d'inertie de la barre par rapport à son axe de rotation est de 1/12 kg m²).

$$I = I_{barre} + I_{masses} = \frac{1}{12} + 2 . m (25 cm)^2$$
$$= \frac{1}{12} + 2 . 0,1 . (0,25)^2 = 0,096 \ Kg \ m^2$$

2/2

3) Quelle est le moment angulaire et l'énergie cinétique de l'ensemble barre plus les deux masses dans la situation initiale ?

$$L_0 = \omega . I = \pi . 0,096 = \frac{23}{240} \pi \simeq 0,30 \ Kg m^2 s^{-1}$$

$$E_c = E_{c \, rotation} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} . 0,096 . \pi^2 = 0,47 \ J$$

3/3

Les deux masses sont comme des perles : elles ont un trou en leur centre qui leur permet de glisser le long de la barre. A l'instant t=0 on libère les deux masses qui peuvent glisser librement le long de la barre (voir figures « situation intermédiaire » et « situation finale »).

4) Quel est la fréquence angulaire de rotation ω' de l'ensemble barre plus les deux masses lorsque les deux masses atteignent l'extrémité de la barre (voir figure « Situation Finale »).

en l'absence de forces extérieures : $\vec{L_0}$ est constant.

$$\Rightarrow L_0 = I_1 . \omega_1 = I_2 . \omega_2$$

$$\Rightarrow \omega_2 = \frac{I_1}{I_2} . \omega_1$$

$I_2 = I_2^{barre} + I_2^{masses}$ car I de la barre est inchangé.

$$I_2^{masse} = 2 . m . (50 \text{ cm})^2 = 2 . 0{,}1 . (0{,}5)^2 = 0{,}05 \text{ kgm}^2$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{1}{12} + 0{,}05 = 0{,}13 \text{ kgm}^2$$

$$\Rightarrow \omega_2 = \frac{0{,}096}{0{,}13} . \pi = 2{,}3 \text{ rad/s}$$

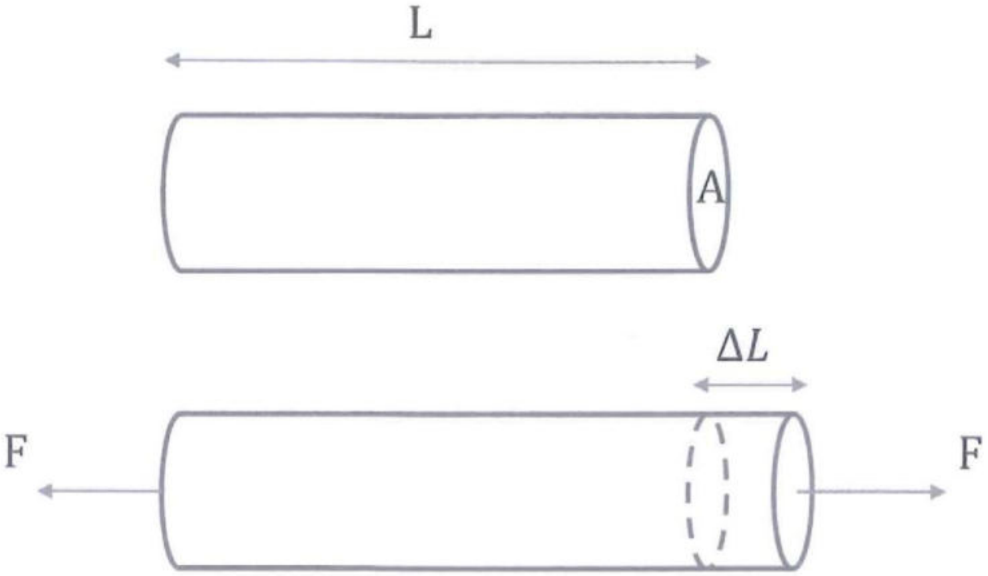
4/4

Question 3 (10 points)

TOUTES SECTIONS SAUF MATH-BIO

Considérons un barreau de longueur L, de section A, de module de Young Y.
Si on exerce une force F(t) sur le barreau, il va s'allonger (voir schéma).

Note : si F(t) varie rapidement, on va exciter des ondes acoustiques dans le barreau. On supposera dans la suite que F(t) varie suffisamment lentement pour que les ondes acoustiques ne soient pas excitées, et que le barreau ait toujours sa longueur d'équilibre.



1) Quel est le travail qu'il faut effectuer pour allonger le barreau de ΔL ?

$\|\vec{F}\| = A \cdot Y \cdot \frac{\Delta L}{L}$ 1/1

Le travail de F pour allonger le barreau :

$$W = \int_0^{\Delta L} \vec{F} \cdot \vec{dl}$$

$$= \int_0^{\Delta L} A Y \frac{x}{L} dx$$

$$= A \frac{Y}{L} \int_0^{\Delta L} x \, dx$$

$$= A \frac{Y}{L} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^{\Delta L}$$

5/5

$$= A \frac{Y}{2L} \Delta L^2$$

2) Application numérique. Considérons un barreau d'acier (Module de Young de l'Acier Y=200GPa) de section 1cm², de longueur 1m.

Quelle est la force à appliquer pour allonger la barre de 1mm ?
Quel est le travail nécessaire pour allonger la barre de 1mm ?

$\|\vec{F}\| = A \cdot Y \cdot \frac{\Delta L}{L}$ avec $A = 1 cm^2 = 1 \cdot 10^{-4}\ m^2$

$Y = 200\ GPa = 200 \cdot 10^9\ Pa$

$L = 1m \quad \Delta L = 1 \cdot 10^{-3}\ m$

$= 1 \cdot 10^{-4}\ m^2 \cdot 200 \cdot 10^9\ Pa \cdot 1m \cdot 1 \cdot 10^{-3}\ m = 20'000\ N = 2 \cdot 10^4\ N$ 4/4

$W = A \frac{Y}{2L} \cdot \Delta L^2 = 10^{-4} m^2 \frac{200 \cdot 10^9\ Pa}{2 \cdot 1m} \cdot (10^{-3}\ m)^2 = 10\ J$

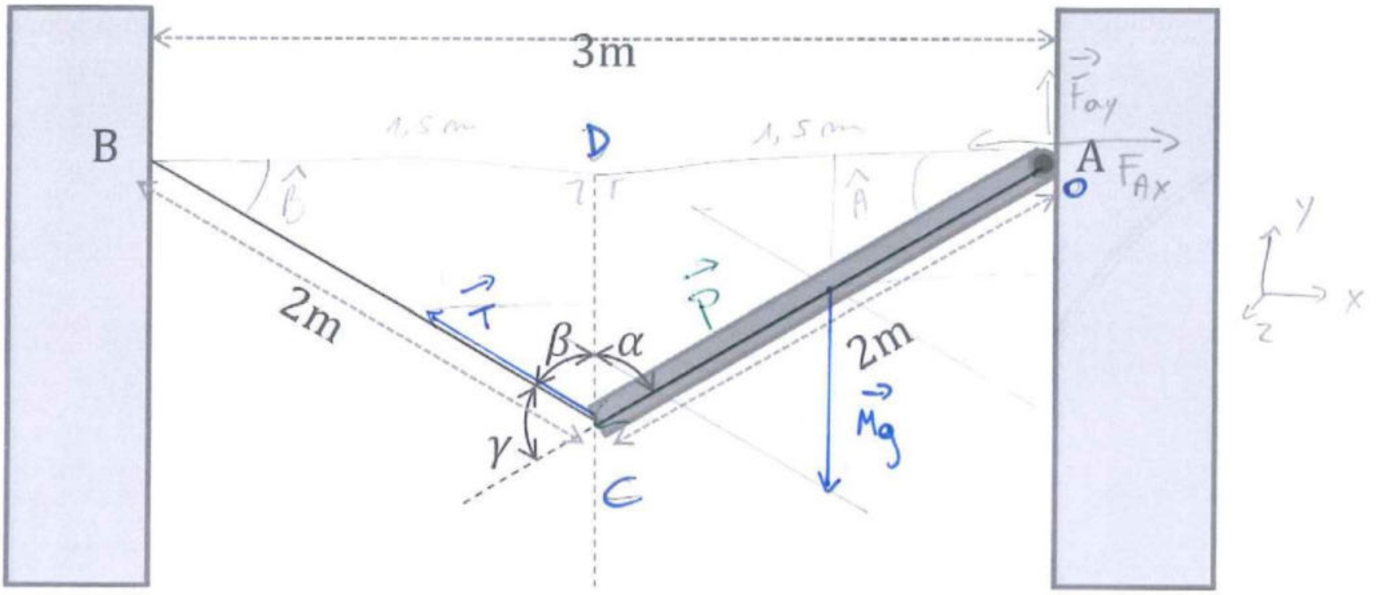
Question 4. (10 points)

TOUTES SECTIONS

Une poutre de longueur 2m et de masse 50kg est attachée à un mur au point A. La poutre est homogène : son centre de masse est donc en son centre.

A l'autre extrémité de la poutre est attaché un câble de longueur 2m et de masse négligeable. Le câble est attaché à un autre mur au point B.

Les deux murs sont séparés de 3m. Les points A et B sont à la même hauteur.



1) Quels sont les angles α, β, γ entre la poutre et la verticale, la verticale et le câble, le câble et la prolongation de la poutre (voir dessin) ? (Attention, le dessin est schématique, et les angles représentés dans le dessin ne correspondent pas exactement à la réponse attendue).

3

loi des sinus : $\frac{\sin \hat{A}}{|BC|} = \frac{\sin \hat{B}}{|AC|}$ or $|AC| = |BC| \Rightarrow \hat{A} = \hat{B}$

en posant C le sommet du triangle, et D l'intersection entre la verticale et |AB|. A et B sont à même hauteur → |AB| horizont.

⇒ |DC| est perpendiculaire à AB ⇒ BCD et ACD sont des triangles semblables, et $\beta = \alpha$ ✓, $\gamma = 180° - 2\alpha$

$\sin \alpha = \frac{1,5}{2} = 0,75 \Rightarrow \alpha = 48,6° = \beta$ ✓ $\Rightarrow \gamma = 180° - 2.48,6°$
$= 82,8°$ ✓

2) Les forces agissant sur la poutre sont son poids, la tension T dans le câble, et la force au point d'attache A. Utilisez les conditions d'équilibre de la poutre pour déterminer la norme de la tension T dans le câble et la norme de la force agissant sur la poutre au point A.

$\vec{T}$ va dans la direct° du câble (direction : poutre → mur)

$\Rightarrow \vec{T} = (-T.\sin\beta, T\cos\beta)$

$\vec{Mg} = (0, -Mg)$

$\vec{F_A} = (F_{Ax}, F_{Ay})$

la poutre est à l'équilibre statique $\Rightarrow \Sigma\vec{F} = \vec{0}$ et $\vec{M}_0 = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{T} + \vec{Mg} + \vec{F_A} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \vec{F_A} = -\vec{Mg} - \vec{T}$

$\Rightarrow F_{Ax} = T.\sin\beta \qquad F_{Ay} = Mg - T\cos\beta$

En mettant l'origine sur A :

$\vec{M_0} = \vec{0}$

$= \vec{0} + \vec{0} + \frac{\vec{P}}{2} \times \vec{Mg} + \vec{P} \times \vec{T}$ (avec $\vec{P}$: vecteur qui lie A à l'autre extrémité de la poutre)

$= \frac{P}{2}.\sin\alpha.Mg.\vec{1_z} + P.T.\sin\gamma.(-\vec{1_z})$

$\Rightarrow T = \frac{\frac{P}{2}.\sin\alpha.Mg}{P.\sin\gamma} = \frac{1}{2}.\frac{\sin 48{,}6°}{\sin 82{,}8°}.50.9{,}81 = 185$ N ✓

$\Rightarrow F_{Ax} = 185.\sin 48{,}6 = 139$ N

$F_{Ay} = 50.9{,}81 - 185.\cos 48{,}6 = 368$ N

$\Rightarrow |\vec{F_A}| = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = \sqrt{139^2 + 368^2} = 393$ N ✓

/10	/10	/10	/10

EXAMEN PHYS-F-110 THEORIE

16 Juin 2017

Nom : **Prénom :**

N° de carte d'étudiant :

Section : chimie / math-physique / math-bio / physique / polyvalente *

Règles de l'examen :

1. Les **GSM et autres moyens de communication électronique (tablette, smartwatch) doivent êtres éteints et laissés** dans les serviettes le long du mur. En aucun cas vous ne pouvez avoir un GSM (ou autre moyen de communication) à portée de main, même éteint.
2. Les notes et/ou livres ne peuvent être utilisés.
3. Pour la partie théorie, **les calculatrices sont interdites.**
4. Utilisez de l'encre **noire** ou **bleue**, ou un crayon. Le **rouge** est interdit, étant réservé pour la correction.
5. Lisez attentivement les questions **jusqu'au bout**. Si vous ne savez pas répondre à une sous-question, essayez **toutes** les suivantes ; il se peut que vous n'ayez pas besoin d'avoir résolu la question manquée pour y répondre.
6. **Les réponses doivent toutes être justifiées**. Un espace est prévu à cet effet après chaque question. De plus, des feuilles vierges sont disponibles sur demande. Les **unités** doivent être indiquées pour les résultats numériques.
7. L'énoncé comporte **10 pages. La première chose à faire est de vérifier que votre énoncé est complet et d'indiquer votre nom et prénom.** Certaines pages sont laissées intentionnellement pratiquement vierges, pour vous laisser la place de répondre.

Bon courage !

---

* Barrer les mentions inutiles.

Question 1 (Toutes Sections)

Exemples :

La notation scientifique pour 15 km est $1,5 \cdot 10^4$ m.
Le préfixe correspondant à 10^3 est kilo.

1) Écrire en notation scientifique 14 milligrammes :

$1,4 . 10^{-5}$ kg

2) Écrire en notation scientifique 777 kilomètres :

$7,77 . 10^5$ m

3) Écrire le préfixe correspondant à 10^6 :

Mega (M)

4) Écrire le préfixe correspondant à 10^{-6} :

micro (μ)

5) Quel est le nom de la lettre grecque δ (indiquer si c'est une minuscule ou une majuscule) ?

delta (minuscule)

6) Quel est le nom de la lettre grecque Γ (indiquer si c'est une minuscule ou une majuscule) ?

gamma (majuscule)

7) Écrire la lettre grecque theta minuscule :

θ

8) Écrire la lettre grecque beta minuscule :

β

9) Quel est la taille approximative d'un proton (une erreur d'un facteur 10 est admise)?

10^{-15} m

10) Quelle est la vitesse de la lumière dans le vide ? (Précision attendue : 10%)

299 792 458 m/s

Question 2

(Toutes Sections)

Analyse dimensionnelle.

La fréquence de vibration d'une corde de piano f dépend de la longueur L de la corde, de sa tension T, et de sa masse par unité de longueur λ. Utilisez l'analyse dimensionnelle pour déterminer la dépendance de f en ces grandeurs.

$[\blacktriangle] :=$ unités de $\blacktriangle$

On a que

$$[f] = [L]^{\alpha} [T]^{\beta} [\lambda]^{\gamma}$$

$$\Leftrightarrow [s]^{-1} = [m]^{\alpha} \left([kg].[m].[s]^{-2}\right)^{\beta} \left([kg][m]^{-1}\right)^{\gamma}$$

Les unités doivent être les mêmes des 2 côtés de l'égalité :

- $[s]$: $-1 = -2.\beta \rightarrow \boxed{\beta = 1/2}$
- $[m]$: $0 = 1.\alpha + 1.\beta - 1.\gamma \rightarrow 0 = \alpha + \frac{1}{2} - \gamma \rightarrow \boxed{\alpha = -1}$
- $[kg]$: $0 = \beta + 1.\gamma \rightarrow 0 = \frac{1}{2} + \gamma \rightarrow \boxed{\gamma = -\frac{1}{2}}$

On a donc que :

$$f = \underset{\text{sans unité}}{\text{Constante}} . L^{-1} . T^{1/2} . \lambda^{-1/2}$$

Question 3

(Toutes Sections sauf Math Bio)

Expliquer pourquoi la pression atmosphérique diminue lorsque l'altitude augmente. (Pour information : sur terre à 5500m d'altitude la pression atmosphérique vaut approximativement la moitié de sa valeur au niveau de la mer).

Note : La réponse attendue comprend quelques phrases de texte ; une (ou plusieurs) équation(s) qui résument la situation physique, avec explication des symboles utilisés – vous ne devez pas nécessairement dériver cette/ces équation(s)- ; et éventuellement un schéma.

L'équation d'équilibre hydrostatique :

$\vec{\nabla} P(x;y;z) = \vec{f}_{ext}$ ($\vec{f}_{ext}$ sont les forces extérieures qui s'exercent sur le fluide par unité de volume)

$\Leftrightarrow \vec{\nabla} P(x;y;z) = -\rho g \cdot \vec{u}_z$

La Pression ne dépends que de la hauteur : ↳ $\frac{dP}{dx} = 0 \Rightarrow P(\cancel{x};y;z)$; $\frac{dP}{dy} = 0 \Rightarrow P(\cancel{y};z)$

- $\frac{dP}{dz} = -\rho g$

⚠ ρ, la masse volumique dépends de la pression :

Loi des gaz parfaits: $PV = nRT \Leftrightarrow P = \frac{m}{M} \frac{1}{V} RT \Leftrightarrow P = \frac{\rho}{M} RT$

masse molaire de l'air ($\simeq 30 . 10^{-3} \frac{kg}{mol}$)

$\Leftrightarrow \rho = \frac{P . M}{RT}$

- $\frac{dP}{dz} = -\frac{PM}{RT} \cdot g \Leftrightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{M}{RT} g\, dz$

- On suppose que la température est constante dans la basse atmosphère.

$\Rightarrow \ln\left(\frac{P}{P(z=0)}\right) = -\frac{M}{RT} \cdot g \cdot z$

$$\frac{P(z)}{P(z=0)} = e^{-\frac{M}{RT}\cdot g z}$$. : La pression décroit exponentiellement avec l'altitude.

Pour diminuer la pression d'un facteur 2 ($P(z) = \frac{1}{2} P(z=0)$):

$$\frac{P(z)}{P(z=0)} = \frac{1}{2} = e^{-\frac{M}{RT} g \cdot z}$$

$$\Leftrightarrow -\ln\frac{1}{2} \cdot \frac{RT}{Mg} = z$$

$$\Leftrightarrow \frac{0,69 \cdot 8,314 \cdot 273,15}{30 \cdot 10^{-3} \cdot 9,81} = 5,349 \text{ km}$$

Il faut monter de 5,349 km (cette estimation est très proche de la réalité.

Question 4. Rotation du corps solide. (Toutes Sections)

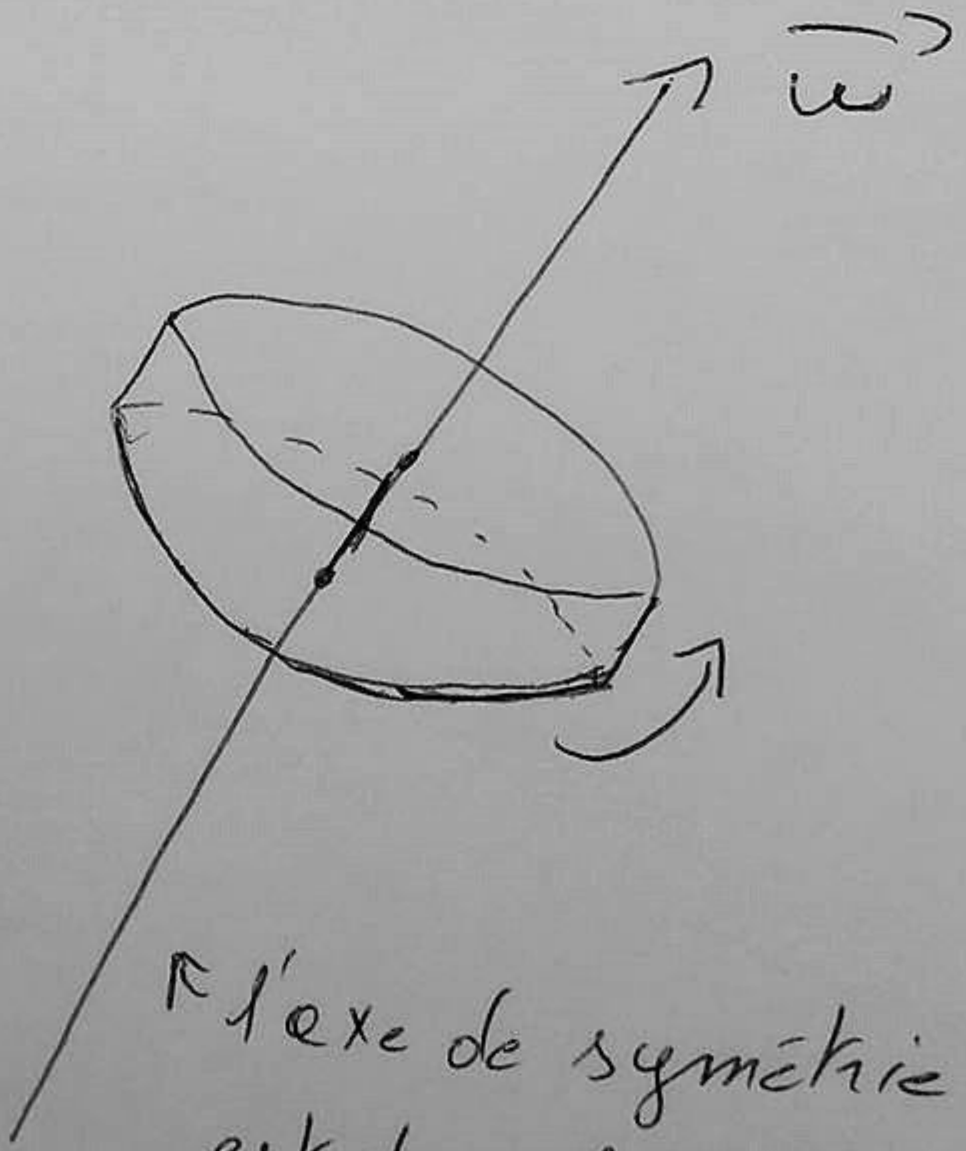
Note : plusieurs des sous-questions ci-dessous ont besoin d'un schéma pour illustrer. Vous pouvez faire un seul schéma –voir question 4.2- sur lequel vous mettrez toutes les informations, ou bien plusieurs schémas).

N'oubliez pas de définir tous les symboles utilisés.

4.1 Enoncez le théorème du moment cinétique.

Voir cours

4.2 Soit un corps solide en rotation autour d'un axe de symétrie. Faites un schéma dans lequel vous dessinerez le solide, son axe de symétrie, son vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$.



↑ l'axe de symétrie
est dans le même direction que $\vec{\omega}$

4.3 Définissez le moment d'inertie I par rapport à son axe de symétrie du solide considéré à la question 4.2.

Voir cours

4.4 Démontrez que pour le cas du solide en rotation autour d'un axe de symétrie, $I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}$ ou $\vec{M}$ est le moment des forces externes par rapport à un point situé sur l'axe de rotation (vous utiliserez comme point de départ de votre raisonnement le théorème du moment cinétique énoncé à la question 4.1 et la définition du moment d'inertie donnée à la question 4.3).

Voir cours.

/20	/20	/20	/20

EXAMEN PHYS-F-110 PROBLEMES

16 Juin 2017

Nom : **Prénom :**

N° de carte d'étudiant :

Section : chimie / math-physique / math-bio / physique / polyvalente *

Règles de l'examen :

1. Les **GSM doivent êtres éteints et laissés** dans les serviettes le long du mur. En aucun cas vous ne pouvez avoir un GSM (ou autre moyen de communication) à portée de main, même éteint.

2. Les notes et/ou livres ne peuvent être utilisés. Vous pouvez disposer d'un aide mémoire consistant en une page A4 recto verso.

3. Vous pouvez utiliser n'importe quel type de calculette; celles-ci ne peuvent être prêtées.

4. Utilisez de l'encre **noire** ou **bleue**, ou un crayon. Le **rouge** est interdit, étant réservé pour la correction.

5. Lisez attentivement les questions **jusqu'au bout**. Si vous ne savez pas répondre à une sous-question, essayez **toutes** les suivantes ; il se peut que vous n'ayez pas besoin d'avoir résolu la question manquée pour y répondre.

6. **Les réponses doivent toutes être justifiées**. Un espace est prévu à cet effet après chaque question. De plus, des feuilles vierges sont disponibles sur demande. Les **unités** doivent être indiquées pour les résultats numériques.

7. Pour les calculs numériques, on prendra **$g=9{,}8\ ms^{-2}$**.

8. L'énoncé comporte **14 pages. La première chose à faire est de vérifier que votre énoncé est complet et d'indiquer votre nom et prénom.** Certaines pages sont laissées intentionnellement pratiquement vierges, pour vous laisser la place de répondre.

Bon courage !

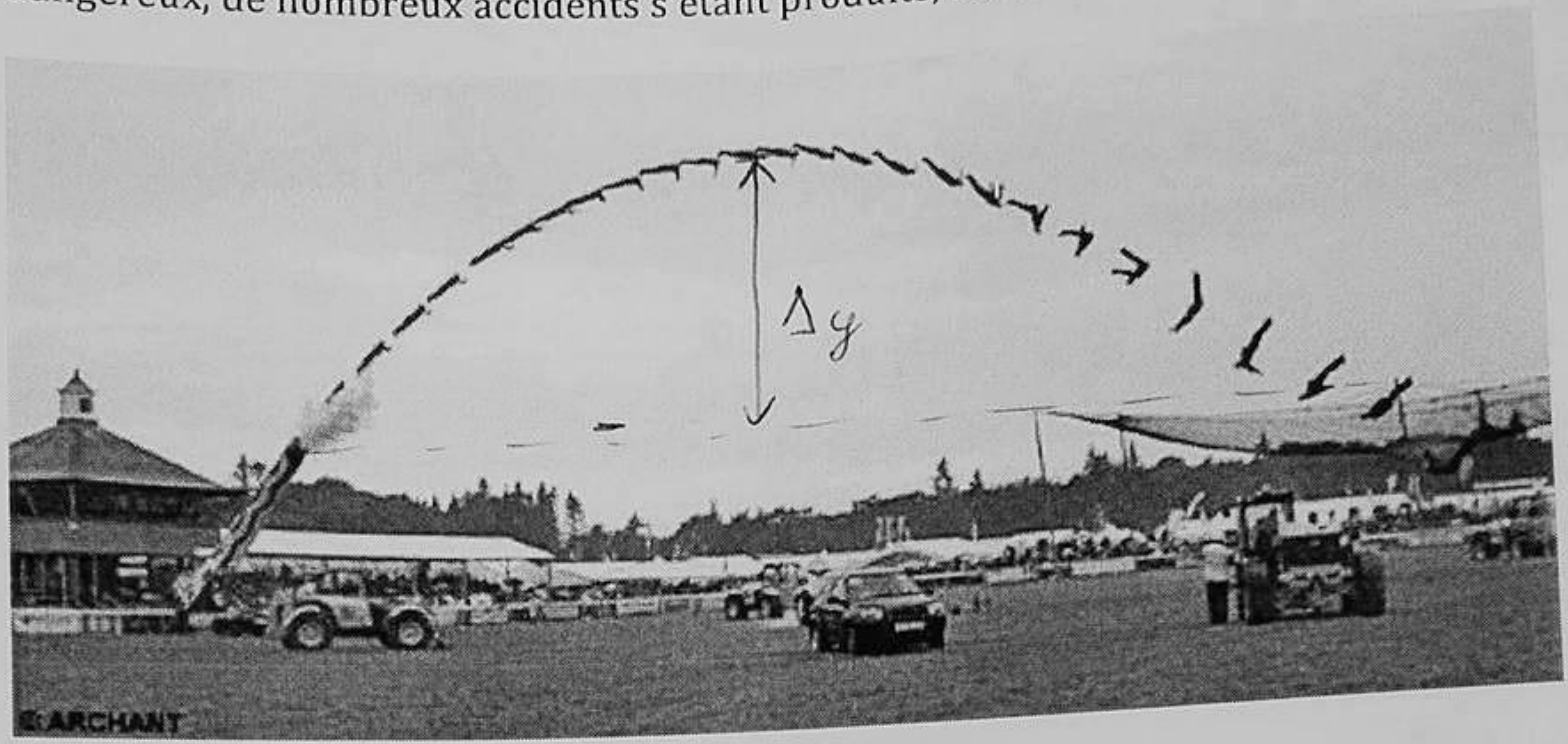
---

* Barrer les mentions inutiles.

Question 1

(Toutes sections).

Le « boulet de canon humain » est un tour de cirque dans lequel un dispositif projette un humain dans l'air. (Notez que ce tour, qui se pratique depuis le 19ème siècle est assez dangereux, de nombreux accidents s'étant produits, surtout lors de l'arrivée au sol).



Sur la photo vous voyez un « boulet de canon humain » en train de voler depuis le « canon » qui le projette et le filet qui va amortir sa chute.

Le Guiness book des records mentionne que la plus grande distance parcourue par un boulet humain est de 59 mètres. Lors de cet exploit, l'humain a atteint une hauteur de 23m. La longueur du canon, c'est-à-dire la distance sur laquelle était accélérée cette personne, était d'approximativement 8m.

1.1) Estimez la vitesse de l'humain à la sortie du canon.

1.2) Estimez l'accélération moyenne de l'humain dans le canon.

(On supposera, comme dans la photo, que le sol est horizontal, et que la sortie du canon et le filet à l'arrivée sont à la même hauteur au-dessus du sol. On négligera le frottement de l'air).

1.1 v_{y0} : Vitesse initiale dans l'axe y.

équation de mouvement : $\Delta y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{y0} t$ (1)

MRUA

$v_y(t) = -g t + v_{0y}$ (2)

- On peut résoudre ce système de 2 équations pour trouver le vitesse v_{0y} et t qu'il faut pour monter à y_{max}.

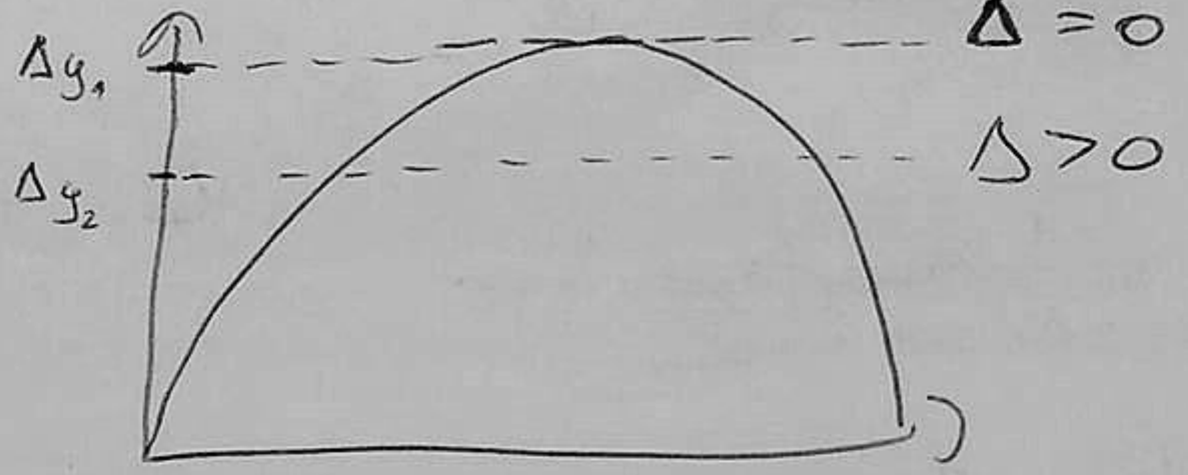
$$\Rightarrow \Delta y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{y0} t$$

$$\Leftrightarrow 0 = -\frac{1}{2} 9{,}81 t^2 + v_{y0} t - (23 - 8)$$

Calculons le Δ de ce polygnôme

$$\Delta = v_{y0}^2 - \frac{4}{2} 9{,}81 . 15$$

- Astuce, si on fixe $\Delta = 0$, le polynome aura une Racine cette solution correspondra au fait que on a atteint la hauteur maximale. Si $\Delta > 0$, il y a 2 Racines qui correspondent au fait qu'on franchit 2 fois le Δy fixé : une fois en montant, une fois en descendant.



$$\Rightarrow \Delta = 0 = v_{y0}^2 - 30 . 9{,}81 \Rightarrow v_{y0} = \sqrt{30 . 9{,}81} = 17{,}2 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\shortparallel \\ 0 \text{ (au sommet)}}}{v_y(t)} = v_{y0} - g . t \rightarrow t = \frac{v_{y0}}{g} = 1{,}75 \text{ s}$$

- On pourrait aussi ne pas mettre de condition sur Δ, trouver les racines du polynôme, les remplacer dans l'équation (2) en mettant $v_y(t) = 0$ et on trouverait les mêmes solutions.

V_{0x} : Equations MRU : $\Delta x = V_{0x} \cdot t_{vol}$

$v_x(t) = v_{0x}$

t_{vol} correspond au temps de montée et descente

$\Rightarrow t_{vol} = 2 \cdot t_{montée} = 2 \cdot 1{,}75 = 3{,}5$ s.

$\rightarrow$ ~~$V_{0x} = \frac{t_{vol}}{\Delta x} = \frac{3{,}5}{59} =$~~

$V_{0x} = \frac{\Delta x}{t_{vol}} = \frac{59}{3{,}5} = 16{,}86$ m/s

$\Rightarrow |V_{sortie}| = \sqrt{|v_{0x}|^2 + |v_{0y}|^2} = 24{,}06$ m/s

1.2| $L = \frac{1}{2} a_{moy} t^2 + \underbrace{v_0}_{=0} t$; $V_{sortie} = a_{moy} \cdot t + \underbrace{v_0}_{=0}$

$t = \frac{V_{sortie}}{a_{moy}}$

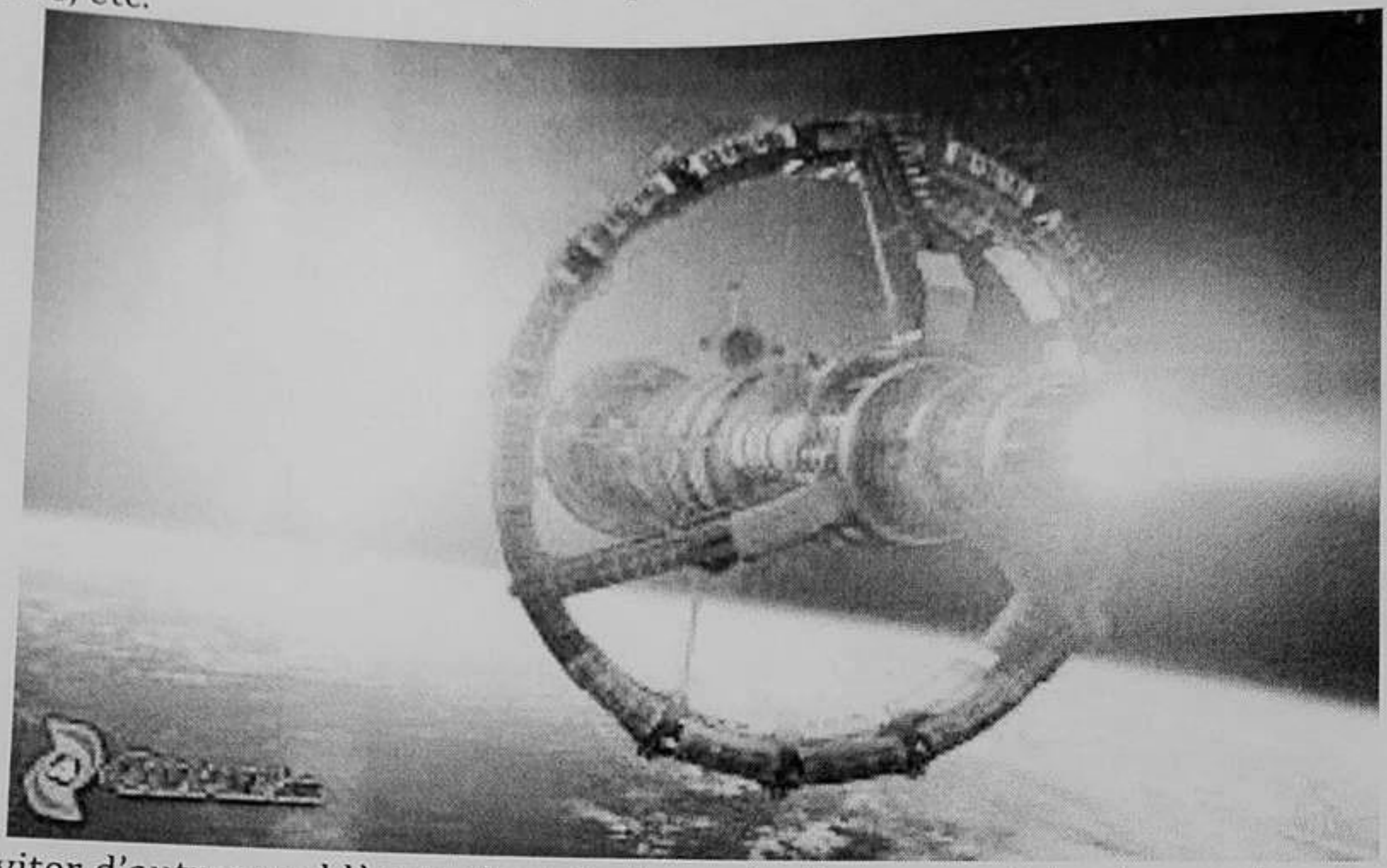
$\Rightarrow L = \frac{1}{2} a_{moy} \left(\frac{v_{sortie}}{a_{moy}}\right)^2 + 0$

$\frac{2L}{v_{sortie}^2} = \frac{1}{a_{moy}}$

$a_{moy} = \frac{v_{sortie}^2}{2L} = \frac{24^2}{2 \cdot 8} = 36 \frac{m}{s^2} \sim 3{,}7\, g$

Question 2. (Toutes Sections)

Lors de longs voyages dans l'espace, l'absence de pesanteur a des effets néfastes sur le corps humain.
Pour lutter contre ces effets, on aimerait pouvoir créer, à bord d'un vaisseau spatial, une "gravité artificielle".
Pour ce faire, on pourrait créer un vaisseau spatial qui comprendrait un anneau en rotation autour de l'axe longitudinal du vaisseau. Cet axe longitudinal serait, lui, orienté dans le sens du déplacement du vaisseau (voir figure ci-dessous). Les humains vivraient dans l'anneau en rotation, tandis que la partie centrale comprendrait les machines, moteurs, etc.



Pour éviter d'autres problèmes physiologiques, la vitesse angulaire de rotation de l'anneau autour de l'axe longitudinal ne peut cependant pas dépasser deux tours par minute.

2.1) En tenant compte de la contrainte sur la vitesse angulaire de rotation, quelle doit être la longueur minimale du rayon de l'anneau pour créer, dans l'anneau, une accélération égale à celle de l'accélération due à la force de gravitation terrestre ? (Prenez $g=9,80\ m/s^2$)

2.2) À l'approche de la planète Mars, on souhaite habituer les occupants du vaisseau à l'accélération due à la force de pesanteur de la planète rouge. En considérant la longueur minimale du rayon trouvée en a), quelle doit être la vitesse angulaire de rotation de l'anneau pour créer, dans l'anneau, l'accélération souhaitée ? (Rayon de Mars = 3393 km ; Masse de Mars = $6,42.10^{23}$ kg ; constante de gravitation universelle = $6,67 \cdot 10^{-11}\ kg^{-1} \cdot m^3 \cdot s^{-2}$).

2.1) $a = \omega^2 . R$

$$R = \frac{a}{\omega^2} = \frac{9,8}{(2\pi . \frac{2}{60})^2} = 223\ m$$

↳ $\omega = 2\pi . f$

$$a_{gravitation} = G \cdot \frac{M_{mars}}{R^2_{mars}} = 6,67 . 10^{-11} \cdot \frac{6,42 . 10^{23}}{(3393 . 10^3)^2}$$

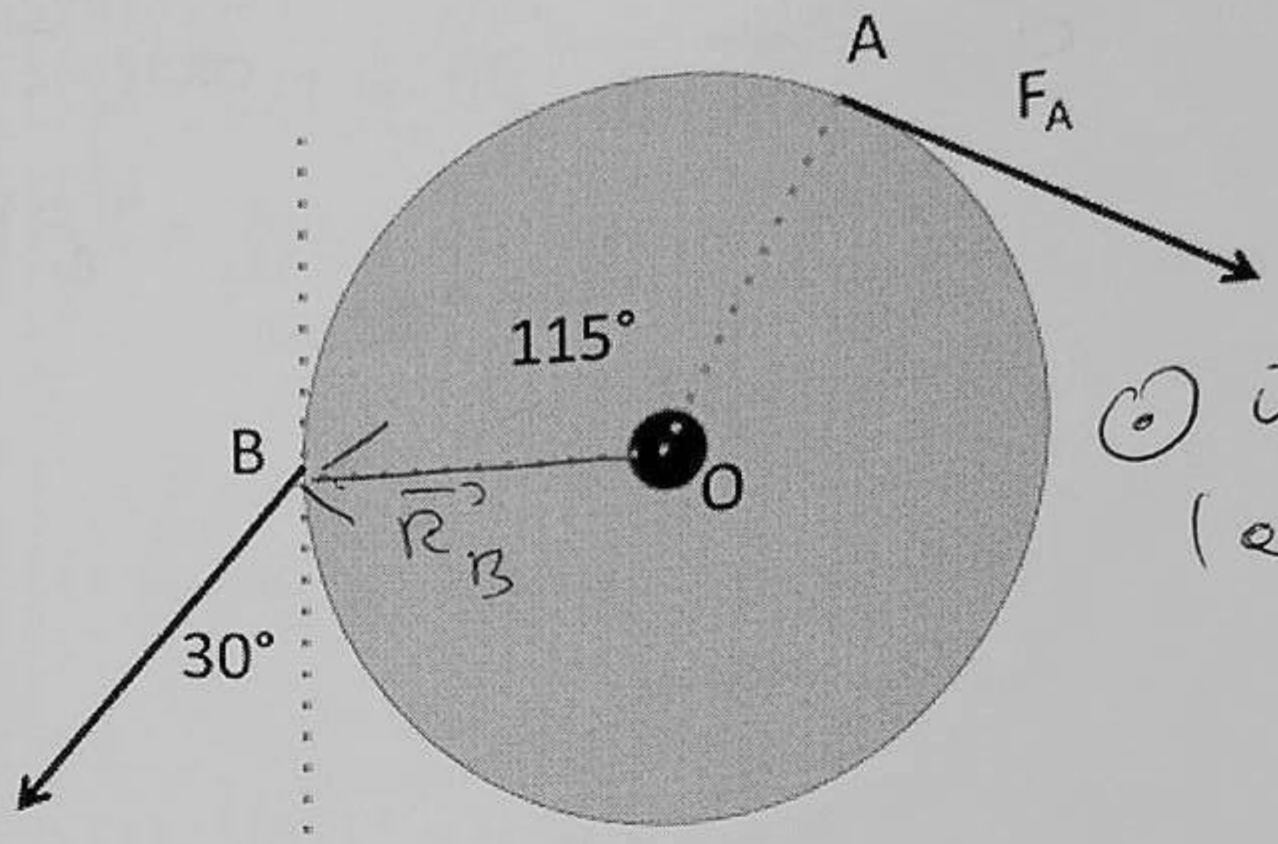
$$= 3,72 \ \frac{m}{s^2}$$

$$a = \omega^2 . R$$

$$\Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{a}{R}} = \sqrt{\frac{3,72}{223}} = 0,129 \ \frac{Rad}{s} \simeq 1,23 \ \frac{tours}{min}$$

Question 3

(Toutes sections)



⊙ $\vec{u}_z$

(axe sortant de la feuille

Un manège de rayon 5m est libre de tourner autour de son axe noté O (voir schéma). Deux enfants se disputent et veulent faire tourner le manège dans des directions opposées. Le premier enfant applique une force F_A au point A, tangentiellement au manège. La norme de F_A est de 500N. Le second enfant applique une force F_B au point B. La force F_B forme un angle de 30° avec la tangente au manège. L'angle AOB vaut 115°. Le manège est immobile.

Quelle est la norme de la force F_B ?

Pour que le manège ne tourne pas, il faut que la somme des moments de force soit nulle :

$$\vec{M}_{F_A} + \vec{M}_{F_B} = 0$$

Or $\vec{M}_{F_A} = \vec{R}_A \times \vec{F}_A = 5m \cdot 500N \boxed{(-\vec{u}_z)}$ → se détermine avec la règle de la main droite

$\vec{M}_{F_B} = \vec{R}_B \times \vec{F}_B = 5m \cdot \underline{(|F_B| \cdot \cos 30°)} \cdot \vec{u}_z$

→ seule la composante orthogonale à $\vec{R}_B$ compte

Donc $\vec{M}_{F_A} + \vec{M}_{F_B} = 0$

$\Leftrightarrow -5 \cdot 500 + 5 \cdot (|F_B| \cdot \cos 30°) = 0$

$\Leftrightarrow |F_B| = \frac{500}{\cos 30°}$

Question 4

(Toutes sections)

Une barre de fer de faible section et de longueur 2m a une masse linéique dont la dépendance en la position peut être approximée par l'expression :

$\lambda(x) = a + bx + cx^2$ pour $0 \leq x \leq 2m$

avec a=0,1 kg·m^{-1}, b=-0,05 kg·m^{-2}, c=0,06 kg·m^{-3}
(Notez la valeur négative du coefficient b).

4.1 Une masse linéique ne peut jamais être négative. Montrez que $\lambda(x)$ est positive pour $0 \leq x \leq 2m$.

4.2 Quelle est la masse de la barre ?

4.3 Quelle est la position x_{CM} du centre de masse de la barre ?

4.1 Il suffit de montrer que les 2 racines du polynôme se trouvent toutes les 2 à droite ou à gauche du segment [0,2].

· $\lambda(x) = 0,1 - 0,05\,x + 0,06x^2$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{0,05^2 - 4(0,1)(0,06)} = \sqrt{\ominus 0,0215}$$

avec un Δ négatif, il n'y a pas de racines et λ(x) est toujours positif

4.2
$$M = \int_0^2 \lambda(x)\,dx$$
$$= \int_0^2 (0,1 - 0,05\,x + 0,06\,x^2)\,dx$$
$$= \left[0,1x - 0,05\,\frac{x^2}{2} + 0,06\,\frac{x^3}{3}\right]_0^2$$
$$= 0,1.2 - 0,05.2 + 0,06\,.\frac{8}{3}$$
$$= 0,26 \text{ kg}$$

NOM, PRENOM (en majuscules) ….………………………..…………………….……

SECTION (entourez votre section)

Chimie **Mathématique** **Physique** **Polyvalente**

PHYS-F-110

Physique générale II - Electricité et magnétisme

Examen du 21 juin 2017

I. Théorie (20 points – 1 heure 15')

Justifiez toujours vos réponses.
(les simples affirmations du type oui / non ne sont pas prises en compte)

Les résultats numériques doivent être exprimés
- en unités du Système international ;
- avec la précision adéquate, sous peine d'être considérés comme incorrects.

Note théorie : **/20**

Toutes les sections

1. Définissez, en précisant toutes les grandeurs que vous introduisez :
a) résistivité électrique
b) inductance d'un élément de circuit électrique
c) différence de potentiel électrostatique entre le point A et le point B
d) susceptibilité magnétique d'un matériau
(4 points)

voir cours.

Toutes les sections

2. Enoncez la loi d'Ampère-Maxwell (celle dans laquelle intervient le courant de déplacement), en précisant toutes les grandeurs et concepts que vous introduisez.
(3 points)

$$\oint_C \vec{B}.\vec{dl}=\mu_0(\sum I_i+\epsilon_0\frac{d}{dt}\oint_S \vec{E}.\vec{dS})$$

où :

$\oint_C \vec{B}.\vec{dl}$ est la circulation du champ magnétique sur un contour fermé C

μ_0 est la perméabilité du vide

$\sum I_i$ est la somme algébrique des courants encerclés par C

ϵ_0 est la permittivité du vide

$\oint_S \vec{E}.\vec{dS}$ est le flux du champ électrique à travers la surface S délimitée par C

et *d/dt* est la dérivée par rapport au temps

Toutes les sections

3. A une distance *d* d'un très long fil rectiligne uniformément chargé, on mesure un champ électrique radial d'intensité *E*. Etablissez l'expression de la densité linéique de charge sur le fil en fonction de *d* et de *E*, en utilisant la loi de Gauss. Définissez toutes les grandeurs que vous introduisez.

(4 points)

Loi de Gauss :

$$\oint_S \vec{E}\,.\,d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon}$$

où Q est la charge enfermée dans la surface de Gauss et ϵ est la permittivité du milieu.

Choix de la surface de Gauss qui exploite la symétrie du champ : on prend un cylindre dont l'axe est sur le fil, de rayon d et de hauteur h.

$$\oint_S \vec{E}\,.\,d\vec{S} = E\,.\,2\pi d\,h$$

et la charge enfermée $Q=\lambda h$, où λ est la charge linéique.

Donc :

$\lambda=\epsilon\,2\pi\,d\,E$

Toutes les sections

4. Un générateur de tension alternative sinusoïdale est constitué d'un cadre de surface *S* autour duquel un fil conducteur est enroulé en *N* spires serrées. Le cadre tourne avec une vitesse angulaire constante dans un champ magnétique uniforme perpendiculaire à l'axe de rotation du cadre. Etablissez l'expression de l'amplitude de la tension induite, en précisant chaque grandeur que vous introduisez.
(3 points)

Soit B l'intensité du champ magnétique, et $\alpha(t)=\omega t$ l'angle entre le champ magnétique et le vecteur normal à la surface du cadre, où ω est la vitesse angulaire du cadre.

L'expression du flux du champ magnétique à travers 1 spire en fonction du temps est :
$\varphi_B = BS\cos(\omega t)$

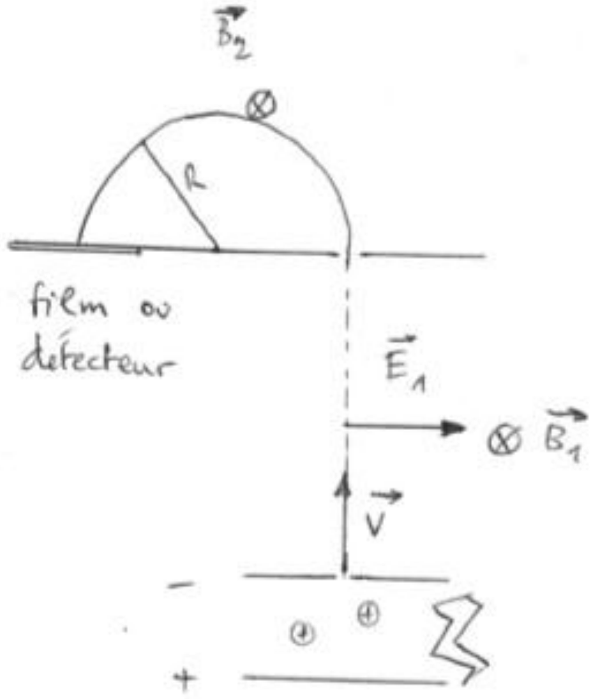
Par la loi de l'induction, la f.é.m. aux bornes de cette spire a pour expression :

$$\epsilon = \frac{-d\varphi_B}{dt} = BS\omega\sin(\omega t)$$

Comme les N spires sont toutes en série, l'amplitude ϵ_0 de la f.é.m. aux bornes de la bobine a pour expression $\epsilon_0 = NBS\omega$

Sections Chimie et Polyvalente

5. Expliquez le principe de fonctionnement du spectromètre de masse à partir des lois qui décrivent les forces électrique et magnétique.
(4 points)



Le spectromètre de masse comporte :

- une source d'ions des différents composants du matériau à analyser ;
- une d.d.p. accélératrice qui produit un faisceau d'ions de masses et de vitesses différentes ;
- un sélecteur de vitesse, avec un champ magnétique $\vec{B}_1$ perpendiculaire au vecteur vitesse $\vec{v}$ des ions, et un champ électrique $\vec{E}_1$ perpendiculaire à $\vec{v}$ et $\vec{B}_1$ (voir la figure). Seuls les ions dont la vitesse est telle que la force totale $\vec{F}=q\vec{E}_1+q\vec{v}\times\vec{B}_1$ est nulle poursuivent en ligne droite, soit ceux dont la norme de la vitesse vaut $v=\frac{E_1}{B_1}$;

- un séparateur avec seulement un champ magnétique $\vec{B}_2$ perpendiculaire à $\vec{v}$. Dans ce champ, les ions soumis à une force centripète d'intensité qvB_2 décrivent une trajectoire circulaire dont le rayon se calcule par $qvB_2=m\frac{v^2}{R}$, soit : $R=m\frac{v}{qB_2}$. Le rayon est donc proportionnel à la masse de l'ion, et celui-ci est alors détecté à un endroit bien spécifique dépendant de sa masse.

Sections Chimie et Polyvalente

6. Etablissez l'expression de l'énergie électrostatique stockée dans une capacité *C* quand elle est complètement chargée sous une différence de potentiel *V*.
(2 points)

On charge progressivement la capacité en amenant des charges élémentaires *dq* de l'armature négative à l'armature positive.

Quand la capacité est partiellement chargée avec une charge *q*, la tension *V(q)* entre les bornes vaut $V(q)=\frac{q}{C}$.

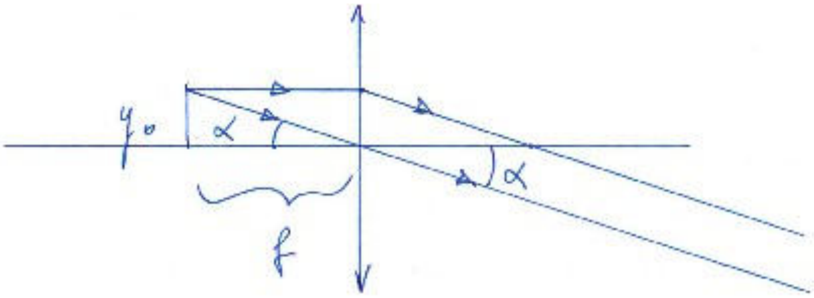
Le travail pour amener une charge supplémentaire *dq* est : $dW=V(q)dq=\frac{q}{C}dq$.

Le travail total pour charger la capacité est : $W=\int_0^Q \frac{q}{C}dq=\frac{Q^2}{2C}$

Or $Q=C.V$ donc $W=\frac{CV^2}{2}$

Sections Mathématique et Physique

7. Etablissez la formule du grossissement angulaire qu'on obtient avec une loupe lorsqu'on regarde l'objet à travers la loupe avec un oeil au repos.
(3 points)



La loupe est une lentille convergente.

Oeil au repos → les rayons qui entrent dans l'oeil sont parallèles (ils proviennent d'un point à l'infini) → l'image de l'objet par la loupe est une image virtuelle à l'infini → l'objet est au foyer objet de la loupe.

Angle sous lequel l'objet est vu à travers la loupe : $\alpha = \frac{y_o}{f}$, où y_o est la taille de l'objet et f est la distance focale de la loupe.

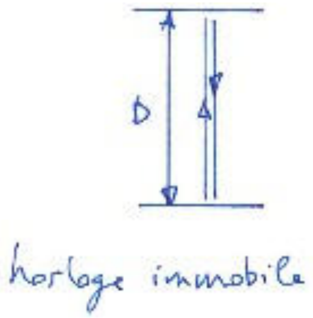
On compare cet angle au meilleur angle possible à l'oeil nu, càd avec l'objet au point proche : $\alpha_{pp} = \frac{y_o}{N}$, où N est la distance conventionnelle du point proche, 25 cm.

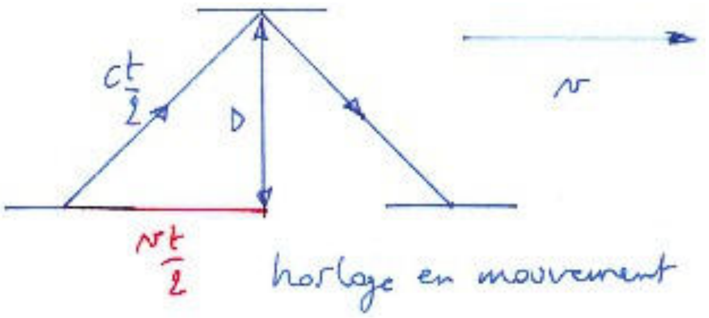
Donc le grossissement angulaire :

$$M = \frac{\alpha}{\alpha_{pp}} = \frac{N}{f}$$

Sections Mathématique et Physique

8. Etablissez la formule de la dilatation des intervalles de temps à partir de l'expérience de pensée de l'horloge lumineuse. Précisez, pour chaque calcul, le référentiel dans lequel vous vous placez.
(3 points)





L'observateur observe deux horloges lumineuses identiques (voir schéma), l'une immobile p/r à lui, et l'autre qui s'éloigne à vitesse *v*. Toutes les durées sont celles perçues par l'observateur, donc tous les calculs sont faits dans le référentiel de l'observateur.

Pour ce dernier, le temps que met la lumière pour 1 aller-retour dans l'horloge immobile est :

$$t_0 = \frac{2D}{c}$$

Le temps que met la lumière pour 1 aller-retour dans l'horloge en mouvement se calcule comme suit. Par Pythagore, pour la moitié du trajet parcourue en un temps $t/2$, on a :

$$c^2 \frac{t^2}{2} = D^2 + v^2 \frac{t^2}{2} \quad .$$

En isolant *t* on trouve : $t = \frac{2D}{c\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$.

D'où l'expression de la dilatation des intervalles de temps :

$t = \frac{t_0}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} = \gamma t_0$, où on définit le facteur de dilatation du temps $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$.

NOM, PRENOM (en majuscules) ..…………………….....……………………..……

SECTION (entourez votre section)

Chimie **Mathématique** **Physique** **Polyvalente**

PHYS-F-110

Physique générale II - Electricité et magnétisme

Examen du 21 juin 2017

II. Exercices (20 points – 2 heures)

<u>Justifiez toujours vos réponses.</u>
(les simples affirmations du type oui / non ne sont pas prises en compte)

Les résultats numériques doivent être exprimés
- en unités du Système international ;
- avec la précision adéquate, sous peine d'être considérés comme incorrects.

Q : **1** */4* **2** */4* **3** */4* **4 ou 6** */4* **5 ou 7** */4*

Note totale exercices : **/20**

Examen de Physique Générale – PHYS-F110

Partie Théorie

Année 2017-2018 - Examen de janvier 2018

Nom :

Prénom :

N° de carte d'étudiant :

Section (entourer) : Chimie — Math-Bio — Math-Ph — Physique — Polyvalente

Consignes générales :

1. Écrivez immédiatement vos prénom, nom, numéro de carte d'étudiant et section.
2. Vérifiez que votre énoncé comporte bien **4 feuilles** (2 questions).
3. **Ne répondez qu'aux questions qui concernent votre section.**
4. Ne dégrafez pas les pages.
5. Les GSM, tablettes, smartwatches et autres moyens de communication sont interdits. Ils doivent être éteints et rangés dans les sacs le long du mur. En aucun cas vous ne pouvez avoir un GSM (ou autre moyen de communication) à portée de main, même éteint.
6. Vous n'avez pas droit à un aide-mémoire ou à une calculatrice.
7. Ne répondez pas en rouge, cette couleur étant réservée pour la correction.
8. **Les réponses doivent toutes être clairement justifiées.**
9. L'examen dure **1h15 (75 minutes)**.

Bon travail !

Q1	Q2
/15	/8

1. (Toutes sections — 15 points) : Soit $\mathcal{R}$ un référentiel inertiel. On considère un système $\mathscr{S}$ de N points matériels de masses m_i placés aux points A_i, $1 \leq i \leq N$. Les vitesses des points A_i dans $\mathcal{R}$ pourront être notées $\vec{v}_i$.

a) Rappeler les définitions de l'impulsion (ou quantité de mouvement) totale $\vec{P}$, du moment cinétique total $\vec{\sigma}(O)$ par rapport à un point O quelconque et de l'énergie cinétique totale E_c du système $\mathscr{S}$.

b) Rappeler la définition du centre de masse G du système $\mathscr{S}$.

c) Rappeler la définition du référentiel du centre de masse $\mathcal{R}^*$ pour le système $\mathscr{S}$.

d) Montrer que l'impulsion totale $\vec{P}^*$ du système $\mathscr{S}$ dans $\mathcal{R}^*$ est nulle.

e) Trouver la relation reliant $\vec{\sigma}(O)$, $\vec{\sigma}(O')$ et $\vec{P}$, où O et O' sont deux points distincts quelconques. Que donne cette relation lorsqu'elle est appliquée dans le référentiel $\mathcal{R}^*$? Qu'est-ce que le moment cinétique propre du système $\mathscr{S}$?

f) Énoncer et démontrer le théorème de Koenig pour le moment cinétique (c'est-à-dire le premier théorème de Koenig) pour le système $\mathscr{S}$. On définira chaque terme dans la formule du théorème et on justifiera soigneusement chaque étape de la démonstration.

g) Énoncer, sans démonstration ni calcul, le théorème du moment cinétique dans le référentiel inertiel $\mathcal{R}$ par rapport à un point O fixe.

2. (Toutes sections sauf Math-Bio — 8 points) :

a) Rappelez la condition d'équilibre hydrostatique pour un fluide à la surface de la Terre (en définissant soigneusement chaque symbole employé).

b) En faire la démonstration en considérant le bilan des forces sur un parallélépipède de fluide au repos à la surface de la Terre.

Examen de Physique Générale – PHYS-F110

Partie Exercices

Année 2017-2018 - Examen de janvier 2018

Nom :

Prénom :

N° de carte d'étudiant :

Section (entourer) : Chimie — Math-Bio — Math-Ph — Physique — Polyvalente

---

Consignes générales :

1. Écrivez immédiatement vos prénom, nom, numéro de carte d'étudiant et section.
2. Vérifiez que votre énoncé comporte bien **5 feuilles** (4 questions).
3. **Ne répondez qu'aux questions qui concernent votre section.**
4. Ne dégrafez pas les pages.
5. Les GSM, tablettes, smartwatches et autres moyens de communication sont interdits. Ils doivent être éteints et rangés dans les sacs le long du mur. En aucun cas vous ne pouvez avoir un GSM (ou autre moyen de communication) à portée de main, même éteint.
6. Vous pouvez consulter votre aide mémoire (une feuille A4 recto-verso manuscrite). Celui-ci doit porter votre nom et ne peut pas être prêté.
7. Les calculatrices ne peuvent pas être prêtées.
8. Ne répondez pas en rouge, cette couleur étant réservée pour la correction.
9. **Les réponses doivent toutes être clairement justifiées et les unités doivent être indiquées pour les résultats numériques.**
10. En cas de besoin, vous prendrez les valeurs de constantes suivantes :
    - — Vitesse du son dans l'air : $v_{\text{air}} = 340\,\text{m/s}$;
    - — Accélération de la pesanteur à la surface de la Terre : $g = 9{,}81\,\text{m/s}^2$;
    - — Constante de Newton : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\text{N}\,\text{m}^2/\text{kg}^2$.
11. L'examen dure **2h00 (120 minutes)**.

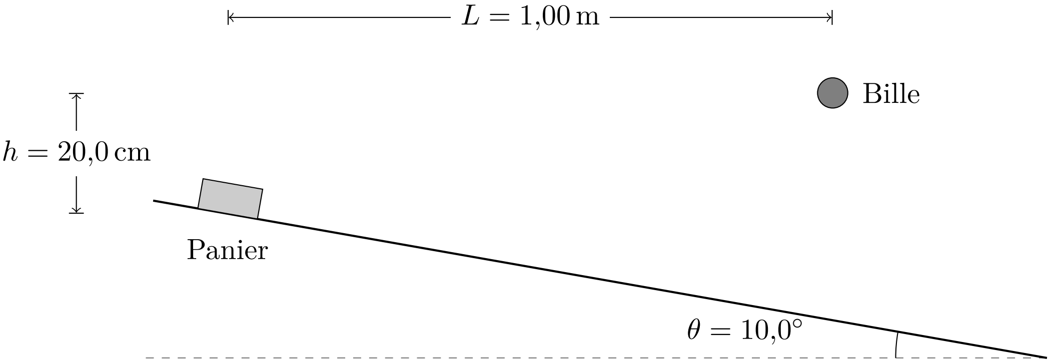
Bon travail !

CORRECTIF

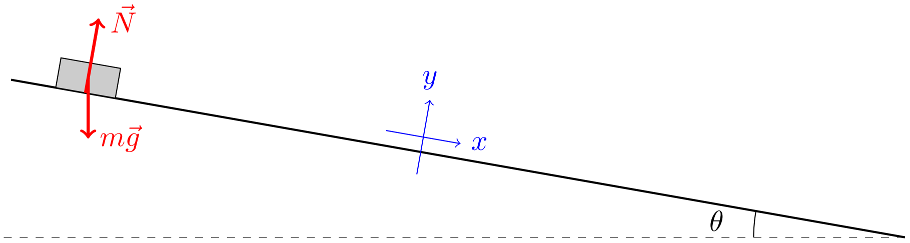
Q1 /7	Q2 /5	Q3 /6	Q4 /4

Correctif rédigé par Nicolas : Nicolas.Postiau@ulb.ac.be

1. (Toutes sections — 7 points) : Un panier se trouve au sommet d'un plan incliné formant un angle θ avec l'horizontale. À l'instant $t = 0$, on lâche le panier. On supposera que la panier glisse sur la pente sans frottement. À quel instant t_0 faut-il lâcher une bille se trouvant à une hauteur h au-dessus de la position initiale du panier et à une distance horizontale L de la position initiale du panier, pour que la bille atterrisse exactement dans le panier lors de son passage ? On négligera les dimensions du panier et de la bille.
Application numérique : calculer t_0 pour $\theta = 10{,}0°$; $h = 20{,}0\,\text{cm}$; $L = 1{,}00\,\text{m}$.



Réponse : *On veut trouver le temps qu'il faut attendre pour lâcher la bille afin que les deux objets arrivent en même temps au même point : pour ce faire, on va calculer le temps nécessaire au panier et à la bille pour arriver à ce point (le bas de la pente) et faire la différence de ces deux temps.*
Commençons par étudier le mouvement du panier. Les forces et le système d'axes sont indiqués dans le schéma ci-dessous.



La relation fondamentale de la dynamique pour le panier s'exprime comme :

$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}.$$

Après projection sur l'axe x, cela donne :

$$0 + mg\sin\theta = ma \quad \Rightarrow \quad a = g\sin\theta.$$

Le mouvement ayant lieu uniquement suivant l'axe x, on n'a pas besoin d'écrire la projection sur l'axe y.
Puisque cette accélération est constante, le mouvement est un MRUA d'accélération $a = g\sin\theta$. L'équation du mouvement est donc :

$$x(t) = a\frac{t^2}{2} = g\sin\theta \cdot \frac{t^2}{2}. \tag{1}$$

Trouvons la distance totale parcourue par le panier : si on appelle cette distance d, on a par trigonométrie :

$$\cos\theta = \frac{L}{d} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{L}{\cos\theta}.$$

Pour trouver le temps t_p mis par le panier pour descendre la pente, il suffit d'écrire l'équation (1) pour $x = d$ et d'isoler le temps :

$$\frac{L}{\cos\theta} = g\sin\theta \cdot \frac{t_p^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t_p^2 = \frac{2L}{g\sin\theta\,\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \quad t_p = \sqrt{\frac{2L}{g\sin\theta\,\cos\theta}} = 1{,}092\,\text{s}.$$

Étudions à présent le mouvement de la bille : il s'agit d'une chute libre. Son équation du mouvement sur un axe vertical orienté vers le haut et dont l'origine est au niveau du sol est donc donnée par :

$$y = y_0 - \frac{gt^2}{2}.$$

La hauteur initiale, qui est la distance verticale à parcourir, peut s'obtenir également par trigonométrie en utilisant le même triangle rectangle que précédemment :

$$y_0 = h + L\tan\theta.$$

On recherche le temps t_b pour que la bille arrive en bas de la pente, en $y = 0$:

$$0 = h + L\tan\theta - \frac{gt_b^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{gt_b^2}{2} = h + L\tan\theta$$

$$\Rightarrow \quad t_b = \sqrt{\frac{2}{g}\left(h + L\tan\theta\right)} = 0{,}277\,\text{s}.$$

Le temps d'attente requis pour que les deux objets se croisent est donc donné par la différence de ces deux temps :

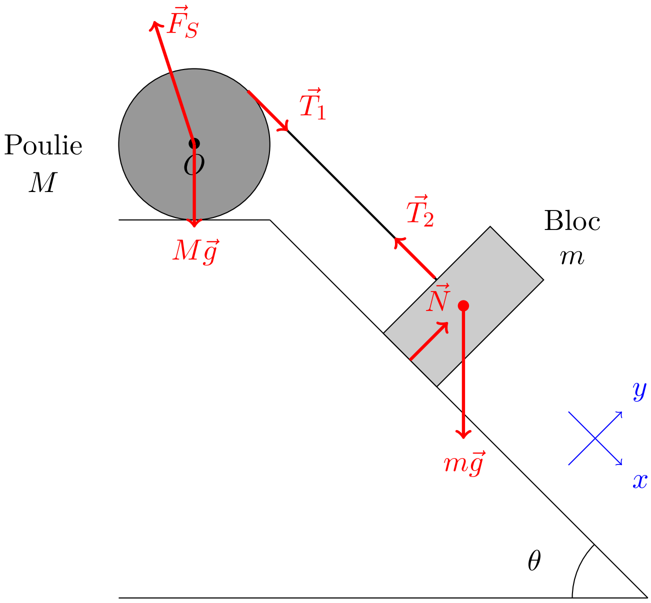
$$t_0 = t_p - t_b = \sqrt{\frac{2L}{g\sin\theta\,\cos\theta}} - \sqrt{\frac{2}{g}\left(h + L\tan\theta\right)} = \boxed{0{,}815\,\text{s}}.$$

2. (Toutes sections — 5 points) : Un bloc de masse m peut glisser vers le bas d'un plan incliné d'un angle θ, sans frottement. Il est relié à une poulie de masse M et de rayon R par un fil (inextensible et de masse négligeable). On assimile la poulie à un disque dont le moment d'inertie est $I = \frac{1}{2}MR^2$.

a) Déterminer l'accélération angulaire de la poulie.

b) Déterminer le module de la vitesse du bloc lorsqu'il a glissé d'une distance D à partir du repos.

Application numérique : Calculer les réponses aux questions a) et b) pour :
$m = 2{,}00\,\mathrm{kg}$; $M = 4{,}00\,\mathrm{kg}$; $R = 0{,}50\,\mathrm{m}$; $D = 1{,}00\,\mathrm{m}$; $\theta = 53{,}0°$.



Réponse : *Les forces et le système d'axes ont été indiquées sur le schéma. Les forces $\vec T_1$ et $\vec T_2$ sont les tensions dans la corde (égales et opposées), $m\vec g$ et $M\vec g$ sont les poids de la poulie et du bloc, $\vec N$ est la normale à la surface (qui s'exerce sur le bloc), et $\vec F_S$ est la force extérieure qui doit s'exercer sur la poulie pour que celle-ci reste en place.*

a) Regardons la somme des moments de force qui s'exercent sur la poulie : on a que

$$I\vec\gamma = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}}_O,$$

où I est le moment d'inertie de la poulie : $I = \frac{1}{2}MR^2$.Il faut donc calculer le moment de chacune des 3 forces s'exerçant sur la poulie, par rapport au point O. Le moment des forces $M\vec g$ et $\vec F_S$ vaut $\vec 0$ car ces forces s'exercent sur le point O. Il reste donc uniquement le moment de la force $\vec T_1$:

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{T_1,O} = \vec r \times \vec T_1 = RT_1\,(-\vec u_z) \quad \Rightarrow \quad \left|\sum \overrightarrow{\mathcal{M}}_O\right| = RT.$$

En effet, le vecteur position ($\vec r$) est de norme R et est dirigé du point O au point d'application de $\vec T_1$. Puisque la tension est la même partout dans une corde, on a utilisé la notation $\left|\vec T_1\right| = \left|\vec T_1\right| \equiv T$.
On a donc :

$$\gamma = \frac{RT}{I} = \frac{2RT}{MR^2} = \frac{2T}{MR}.$$

Cependant, on ne connaît pas T. Pour le déterminer, il nous faut considérer l'autre système du problème : le bloc, qui est en mouvement selon l'axe x :

$$\vec T_2 + \vec N + m\vec g = m\vec a.$$

En projetant cette équation sur l'axe x, on a (sachant que l'accélération est dirigée dans le sens des x positifs) :

$$-T + 0 + mg\sin\theta = ma.$$

D'autre part, l'accélération angulaire de la poulie est reliée à l'accélération du bloc :

$$\gamma = \frac{a}{R}$$

car la corde, qui est reliée à la poulie, a la même accélération que le bloc. En combinant les résultats obtenus, on obtient :

$$\begin{aligned} & \gamma = \frac{2T}{MR} = \frac{2m}{MR}(g\sin\theta - \gamma R) \\ \Rightarrow \quad & \gamma\left(1 + 2\frac{m}{M}\right) = \frac{2m}{MR}\sin\theta \\ \Rightarrow \quad & \gamma = \frac{2m}{M+2m}\cdot\sin\theta\cdot\frac{g}{R} = \boxed{7{,}83\,\mathrm{rad/s^2}}. \end{aligned}$$

b) *Du résultat précédent, on trouve directement l'accélération :*

$$a = \gamma R = \frac{2m}{M+2m}\sin\theta\, g.$$

Comme cette accélération est constante, le bloc suit un MRUA. À partir de l'expression pour la position en fonction du temps et pour la vitesse en fonction du temps, on peut exprimer la vitesse en fonction de la position et calculer la grandeur recherchée :

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{at^2}{2} \\ v = at \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v}{a} \end{array}\right\} \quad \begin{aligned} \Rightarrow \quad & x = \frac{a}{2}\cdot\frac{v^2}{a^2} \\ \Rightarrow \quad & x = \frac{v^2}{2a} \\ \Rightarrow \quad & v = \sqrt{2ax}. \end{aligned}$$

Après avoir parcouru une distance D, le bloc aura donc une vitesse

$$v_D = \sqrt{\frac{4m}{M+2m}\sin\theta\, g\cdot D} = \boxed{2{,}80\,\mathrm{m/s}}.$$

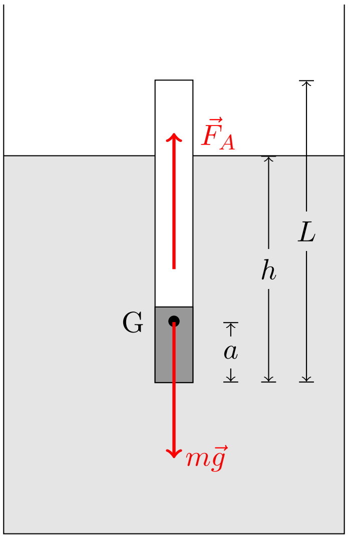
3. (Toutes sections sauf Math-Bio — 6 points) : Un densimètre est un appareil permettant de mesurer la densité. Soit un densimètre destiné à mesurer la densité de liquides et constitué d'un cylindre creux (longueur $L = 400\,\text{mm}$, rayon r) à l'intérieur duquel se trouve une masse de plomb fixée à la base inférieure du cylindre. Le centre de masse G du densimètre est situé à la hauteur $a = 10\,\text{mm}$ de la base inférieure du cylindre.

Le densimètre flotte à la surface d'un liquide de masse volumique ρ à déterminer. Il est immergé jusqu'à une hauteur h. Cette hauteur vaut $h_0 = 200\,\text{mm}$ lorsque le densimètre est placé dans de l'eau (de masse volumique $\rho_0 = 1\,000\,\text{kg/m}^3$).

a) Quelle est la masse volumique du liquide si le densimètre est immergé jusqu'à une hauteur $h = 250\,\text{mm}$?

b) Quelle masse volumique minimale ρ_{min} peut-on mesurer avec ce densimètre ?

c) A partir d'une certaine masse volumique ρ_{max}, le densimètre ne peut plus être en équilibre stable. Que vaut ρ_{max} ? (on supposera que r, le rayon du cylindre, est négligeable).



Réponse : *Les forces ont été indiquées sur le schéma : on a uniquement le poids $m\vec{g}$, et la poussée d'Archimède $\vec{F}_A$.*

a) Puisque le système est en équilibre, la somme des forces doit être nulle :

$$m\vec{g} + \vec{F}_A = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad mg = F_A = \rho g h \cdot \pi r^2.$$

En effet, le volume d'eau déplacé est un cylindre de hauteur h et de rayon r.
On cherche à connaître ρ. L'équation ci-dessus ne suffit pas puisqu'on ne connaît ni m ni r. On connaît cependant la hauteur h_0 pour un liquide dont on connaît la masse volumique (l'eau), et on peut réécrire la même équation dans l'eau :

$$mg = \rho_0 g h_0 \cdot \pi r^2.$$

En combinant les deux équations que nous avons obtenues, on trouve :

$$\rho g h \cdot \pi r^2 = \rho_0 g h_0 \cdot \pi r^2 \quad \Rightarrow \quad \rho = \rho_0 \cdot \frac{h_0}{h} = \boxed{800\,\text{kg/m}^3}.$$

b) La masse volumique minimale correspond au cas limite où le cylindre est complètement immergé, autrement dit au cas où $h = L$. Dans cette situation, l'équation précédente se réécrit comme :

$$\rho = \rho_0 \cdot \frac{h_0}{L} = \boxed{500\,\text{kg/m}^3}.$$

c) *Si ρ est trop grand, le* centre de poussée *($\equiv$ centre de masse du liquide déplacé) peut passer sous le centre de masse du densimètre, ce qui cause une situation d'équilibre instable. Le centre de poussée se situe en $\frac{h}{2}$. On a donc équilibre instable si $\frac{h}{2} < a$ (puisque a est la hauteur du centre de masse). Puisque $h = h_0 \cdot \frac{\rho_0}{\rho}$, on a donc équilibre instable si :*

$$\frac{h_0}{2} \cdot \frac{\rho_0}{\rho} < a \quad \Rightarrow \quad \rho > \rho_{max} = \rho_0 \cdot \frac{h_0}{2a} = \boxed{10\,000\,\mathrm{kg/m^3}}.$$

4. (Uniquement Math-Ph et Physique — 4 points) : Une voiture s'approche d'un grand mur à la vitesse de 30 km/h. Elle émet un son de fréquence 500 Hz. Un observateur immobile, situé sur l'axe du mouvement de la voiture, détecte les ondes directes provenant de la voiture et celles réfléchies par le mur. Il y a deux cas de figure possibles :

a) L'observateur est situé entre la voiture et le mur (avec un décalage transversal pour lui éviter de se faire écraser ; on négligera ce décalage).

b) La voiture est entre l'observateur et le mur.

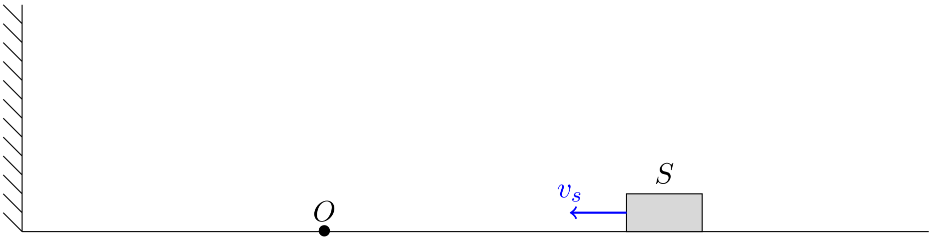
Quelle est la fréquence des éventuels battements perçus par l'observateur dans chacun des cas ?

Réponse : *Rappelons la formule pour l'effet Doppler :*

$$f' = f \cdot \frac{v \pm v_o}{v \mp v_s},$$

où v est la vitesse du son, v_o la vitesse de l'observateur et v_s la vitesse de la source. On prend les signes du haut si la source et l'observateur se rapprochent, et ceux du bas s'ils s'éloignent.

a) Représentons la situation :



L'observateur reçoit deux ondes sonores différentes, provenant de la source ou réfléchies par le mur. Pour les ondes reçues directement par la source, il faut utiliser la formule de l'effet Doppler avec une source en mouvement, qui se rapproche de l'observateur :

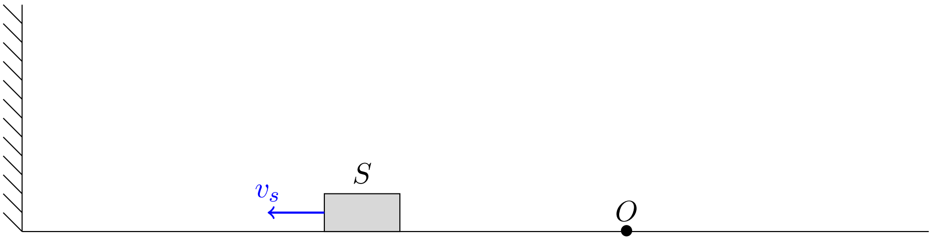
$$f'_{auto} = f \cdot \frac{v + 0}{v - v_s},$$

où v_s est la vitesse de la voiture. Les ondes reçues par le mur sont reçues à la même fréquence f'_{auto} (puisque le mur est également fixe). Le mur va ensuite réémettre des ondes à cette même fréquence, qui seront reçues par l'observateur encore à cette même fréquence puisque ni le mur ni l'observateur ne sont en mouvement. Donc,

$$f'_{auto} = f'_{mur}$$

et il n'y a donc pas de battements.

b) La situation est suivante :



Cette fois, l'observateur et la source s'éloignent. La fréquence des ondes reçues directement par l'observateur est donc :

$$f'_{auto} = f \cdot \frac{v - 0}{v + v_s}.$$

En revanche, la voiture se rapproche du mur, donc la fréquence perçue par le mur est la même qu'au point précédent :

$$f'_{mur} = f \cdot \frac{v + 0}{v - v_s}.$$

L'observateur reçoit ensuite les ondes réfléchies par le mur à la même fréquence f'_{mur} *puisque l'observateur comme le mur sont au repos.*
L'observateur reçoit donc deux ondes à des fréquences différentes, il y aura donc des battements. La fréquence des battements est de :

$$\begin{aligned} f_{battements} &= |f'_{auto} - f'_{mur}| \\ &= \left| f \cdot \frac{v}{v + v_s} - f \cdot \frac{v}{v - v_s} \right| \\ &= f \cdot v \cdot \left| \cdot \frac{1}{v + v_s} - \cdot \frac{1}{v - v_s} \right| \\ &= f \cdot v \cdot \left| \frac{v - v_s - v - v_s}{v^2 - v_s^2} \right| \\ &= f \cdot v \cdot \left| \frac{-2v}{v^2 - v_s^2} \right| \\ &= f \cdot \frac{2v \cdot v_s}{v^2 - v_s^2} = \boxed{24{,}5\,\mathrm{Hz}}. \end{aligned}$$

NOM, PRENOM (en majuscules) ….……………………...…………………….……

SECTION (entourez votre section)

Chimie Mathématique Physique Polyvalente

PHYS-F-110

Physique générale II - Electricité et magnétisme

Examen du 20 juin 2018

I. Théorie (20 points – 1 heure 15')

Justifiez toujours vos réponses.
(les simples affirmations du type oui / non ne sont pas prises en compte)

Les résultats numériques doivent être exprimés
- en unités du Système international ;
- avec la précision adéquate, sous peine d'être considérés comme incorrects.

Note théorie : /20

Toutes les sections

1. Définissez, en précisant toutes les grandeurs que vous introduisez :
a) résistance électrique d'un élément de circuit
b) circulation du champ magnétique
c) différence de potentiel électrostatique
(3 points)

a) *R* = *V/I*, où *V* est la tension aux bornes de cet élément et *I*, le courant qui traverse cet élément

b) $\oint_C \vec{B}.\vec{dl}$, où $\vec{B}$ est le champ magnétique, $\vec{dl}$ est un élément de parcours et C, le parcours fermé sur lequel l'intégrale curviligne est faite

c) différence de potentiel électrostatique entre les points A et B : $V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q}$, où W_{AB} est le travail qu'il faut fournir (contre la force électrostatique) pour amener la charge test *q* du point A au point B.

Toutes les sections

2 . Calculez l'expression de l'énergie électrostatique stockée dans un condensateur de capacité *C* chargé sous une tension V.
(3 points)

Les électrodes d'un condensateur qui porte une charge *q* sont à une différence de potentiel $V(q)=\frac{q}{C}$.

Pour ajouter une charge élémentaire *dq*, il faut amener cette charge de l'électrode négative à l'électrode positive, et travailler une quantité $dW=V(q)dq=\frac{q}{C}dq$.

Pour charger la capacité jusqu'à une charge $Q=CV$ il faut fournir :
$W=\int_0^{CV}\frac{q}{C}dq=\frac{(CV)^2}{2C}=\frac{1}{2}CV^2$, travail qui est stocké sur la capacité sous forme d'énergie électrostatique.

Toutes les sections

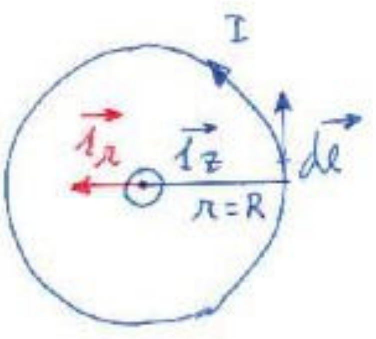
3 . Énoncez la loi de Biot et Savart, en précisant toutes les grandeurs que vous introduisez. Appliquez-la au calcul du champ magnétique au centre d'une spire conductrice circulaire placée dans l'air, de rayon *R*, et parcourue par un courant *I*.
(4 points)

$$\vec{dB}=\frac{\mu_O I}{4\pi r^2}\vec{dl}\times\vec{1}_r \quad ,$$

où $\vec{dB}$ est le champ élémentaire produit par l'élément de courant $I\vec{dl}$ en un point situé à distance *r* de cet élément de courant.

Le vecteur $\vec{1}_r$ est le vecteur unitaire dirigé de l'élément de courant vers le point où on calcule le champ.

La constante μ_0 est la perméabilité du vide (quasi égale à celle de l'air).



Sur le schéma :

- $\vec{dl}\times\vec{1}_r$ est toujours dirigé selon l'axe de la spire $\vec{1}_z$ et $\vec{dl}\times\vec{1}_r=dl\vec{1}_z$
- $r = R$ le rayon de la spire.

Alors :

$$\vec{dB}=\frac{\mu_O I}{4\pi R^2}dl\vec{1}_z$$

et si on intègre le long de la spire :

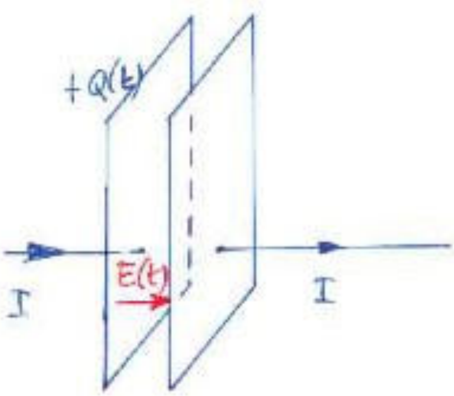
$$\vec{B}=\vec{1}_z.\int_0^{2\pi R}\frac{\mu_O I}{4\pi R^2}dl=\vec{1}_z.\frac{\mu_O I}{2R} \quad .$$

Toutes les sections

4. Démontrez que le courant de déplacement entre les plaques conductrices d'un condensateur plan est égal au courant électrique qui charge ce condensateur. Définissez tous les symboles que vous introduisez.
(4 points)

Courant de déplacement :

$I_D = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$, où $\frac{d\Phi_E}{dt}$ est la dérivée du flux du champ électrique par rapport au temps, et ϵ_0 est la permittivité du vide.



Dans un condensateur plan fait de plaques de surface *S*, le champ électrique est uniforme et perpendiculaire aux plaques : $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, où σ est la densité de charge sur la plaque positive. Le flux vaut alors :

$\Phi_E = S.E = S.\frac{Q}{S}.\frac{1}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}$, où *Q* est la charge sur la plaque positive.

Alors : $I_D = \epsilon_0 \frac{d}{dt}\frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{dQ}{dt}$ c'est à dire le courant qui charge le condensateur.

Ce résultat est valable si le seul champ électrique variable entre les plaques est le champ dû aux charges sur les plaques.

Sections Chimie et Polyvalente

5. Expliquez comment fonctionne le chauffage par induction.
(3 points)

Par la loi d'induction de Faraday, un flux de champ magnétique variable au cours du temps produit un champ électrique et une f.é.m. induits :

$$\varepsilon=\frac{-d\,\Phi_B}{dt}$$

Si cette f.é.m. est induite dans un matériau conducteur, un courant induit va circuler et produire un échauffement par effet Joule :

$P_{Joule}=\frac{\varepsilon^2}{R}$, où *R* est la résistance du matériau.

La puissance dissipée est d'autant plus grand que la résistance du matériau est faible.

Sections Chimie et Polyvalente

6. Montrez que, lorsqu'on applique une tension alternative sinusoïdale aux bornes d'une capacité, la puissance électrique moyenne consommée par la capacité est nulle.
Rappel : sin(a).cos(a) = ½ . sin(2a)
(3 points)

Puissance électrique instantanée : $P(t)=V(t)I(t)$

Puissance moyenne : $P=\frac{1}{T}\int_0^T V(t)I(t)dt$, où *T* est la période de la tension sinusoïdale.

Tension sinusoïdale : $V(t)=V_0\sin(\omega t)$, où V_0 est l'amplitude de la tension et $\omega=\frac{2\pi}{T}$ est la pulsation.

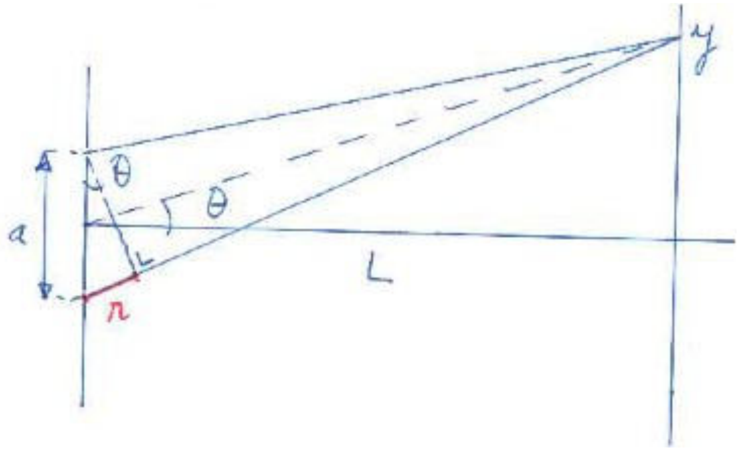
Le courant qui charge la capacité : $I(t)=\frac{dQ(t)}{dt}=\frac{dCV(t)}{dt}=CV_0\omega\cos(\omega t)$

Donc la puissance moyenne :

$$P=CV_0^2\omega.\frac{1}{T}\int_0^T \sin(\omega t)\cos(\omega t)dt=CV_0^2\omega.\frac{1}{2T}\int_0^T \sin(2\omega t)dt=0 \quad .$$

Sections Mathématique et Physique

7. On éclaire un panneau opaque comportant deux minces fentes rectilignes avec la lumière monochromatique cohérente d'un laser. On observe les franges d'interférence sur un écran placé à grande distance derrière le panneau. Les maxima sont séparés d'une distance *s* quand le dispositif est dans l'air. A présent, on plonge tout le dispositif dans un milieu transparent d'indice de réfraction *n* (de l'eau, par exemple). Calculez la distance entre les maxima dans cette situation.
(3 points)



Dans l'air, pour avoir un maximum d'interférence il faut :
$r = m.\lambda$, où m est un entier et λ la longueur d'onde dans l'air.

Si l'écran est à une distance *L* grande par rapport à la distance *a* entre les fentes, et le maximum considéré, d'ordre *m*, est à une distance y_m petite par rapport à *L,* on peut écrire :

$$r = a.\theta$$

$$\theta = \frac{y_m}{L}$$

Donc $y_m = \frac{mL\lambda}{a}$ et la distance entre maxima successifs vaut : $s = \frac{L\lambda}{a}$.

Si on plonge le dispositif dans un matériau d'indice *n*, la longueur d'onde $\lambda_n = \frac{c}{n}\frac{1}{f} = \frac{\lambda_{air}}{n}$, en faisant l'approximation que l'indice de réfraction de l'air = 1.

Donc $s_n = \frac{s}{n}$.

Sections Mathématique et Physique

8. En relativité restreinte, le carré de l'énergie totale d'un corps s'écrit :

$E^2 = p^2 c^2 + m_0{}^2 c^4$,

où *p* est la quantité de mouvement de ce corps, *m₀* sa masse au repos et *c*, la vitesse de la lumière. Montrez comment cette relation mène à l'expression :

$E = mc^2$,

en ayant soin de définir toutes les grandeurs et tous les symboles que vous introduisez. (3 points)

$E^2 = (mv)^2 c^2 + m_0{}^2 c^4 = (\gamma m_o v)^2 c^2 + m_0{}^2 c^4$, où $m = \gamma m_o$ est la masse relativiste du corps en mouvement, et $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, où $\beta = \frac{v}{c}$.

Alors :

$$E^2 = \frac{(m_o v)^2}{1-\beta^2} c^2 + m_0{}^2 c^4 = m_0{}^2 c^4 \left(\frac{\beta^2}{(1-\beta^2)} + 1\right) = m_0{}^2 c^4 \left(\frac{1}{1-\beta^2}\right) = \gamma^2 m_0{}^2 c^4 = m^2 c^4 \quad .$$

Et l'énergie est définie positive car $m \geq m_0$, donc $E = mc^2$.

NOM, PRENOM (en majuscules) ..………………………..………………………..……

SECTION (entourez votre section)

Chimie Mathématique Physique Polyvalente

PHYS-F-110

Physique générale II - Electricité et magnétisme

Examen du 20 juin 2018

II. Exercices (20 points – 2 heures)

<u>Justifiez toujours vos réponses.</u>
(les simples affirmations du type oui / non ne sont pas prises en compte)

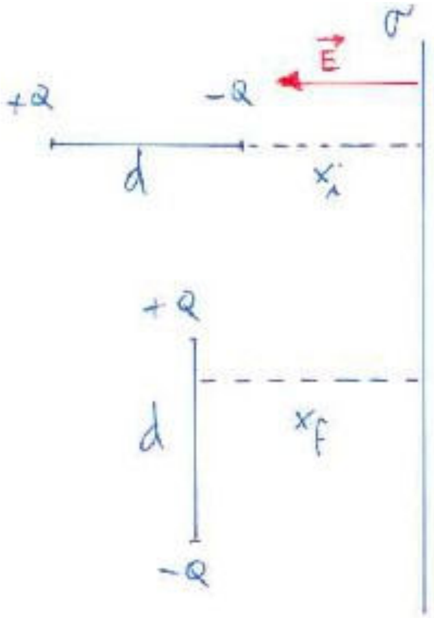
Les résultats numériques doivent être exprimés
- en unités du Système international ;
- avec la précision adéquate, sous peine d'être considérés comme incorrects.

Q : 1 */4* **2** */4* **3** */4* **4 ou 6** */4* **5 ou 7** */4*

Note totale exercices : /20

Toutes les sections

1. Une molécule polaire de longueur *d* comporte une charge +*Q* à l'une de ses extrémités, et une charge *(-Q)* à l'autre. Elle est placée à proximité d'une membrane plane qui porte une densité de charge uniforme +σ. Elle s'oriente librement jusqu'à l'équilibre. Calculez l'expression de l'énergie qu'il faut fournir pour changer l'orientation de cette molécule, depuis la situation d'équilibre jusqu'à la situation où l'axe de la molécule est parallèle à la membrane. Supposez que la membrane est infinie, et que le milieu dans lequel la molécule et la membrane sont placées a la même permittivité que l'air.
(4 points)



L'énergie à fournir est égale à la différence d'énergie potentielle électrostatique entre les 2 situations :

$$W=U_f-U_i$$

Dans le champ dû à la membrane uniformément chargée, l'énergie potentielle d'une charge à distance *x* de celle-ci vaut, par rapport à un point sur la membrane :

$U(x)=Q.V(x)=-Q\,E\,x=-Q\frac{\sigma}{2\epsilon_0}x$, où $E=\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ est le champ dû à la membrane, et $V(x)$ le potentiel dû à ce champ.

Donc pour la molécule dipolaire :

$$U_i=-Q.\frac{\sigma}{2\epsilon_0}.(x_i+d)+-(-Q).\frac{\sigma}{2\epsilon_0}.x_i=-Q.\frac{\sigma}{2\epsilon_0}.d$$

et :

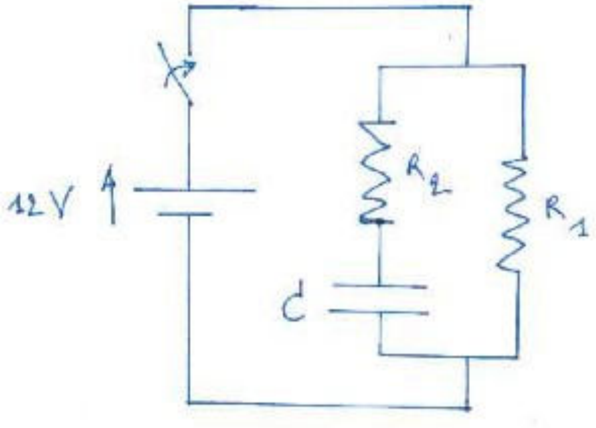
$$U_f=-Q.\frac{\sigma}{2\epsilon_0}.x_f+-(-Q).\frac{\sigma}{2\epsilon_0}.x_f=0$$

Donc il faut fournir un travail :

$$W=+Q.\frac{\sigma}{2\epsilon_0}.d$$

Toutes les sections

2. Dans le circuit ci-dessous, la résistance R_1 vaut 1,0 kΩ, la capacité C vaut 470 nF et la résistance R_2 est de 1,7 kΩ. La pile fournit une tension de 12 V. On ferme l'interrupteur et on mesure le courant fourni par la pile. Combien de temps faut-il, après avoir fermé l'interrupteur, pour que le courant atteigne la valeur de 15 mA ? Le condensateur est initialement déchargé.
(4 points)



Loi des noeuds :

$$I_{pile}(t)=I_1(t)+I_2(t)$$

Loi des mailles : la tension de la pile est appliquée au circuit R_2C et à la résistance R_1 :

$$I_1(t)=\frac{V_{pile}}{R_1}$$

$$I_2(t)=\frac{V_{pile}}{R_2}\exp(-t/R_2C)$$

Donc

$$15\,mA=a=\frac{V_{pile}}{R_1}+\frac{V_{pile}}{R_2}\exp(-t/R_2C)$$

$$\frac{-t}{R_2C}=\ln(\frac{R_2}{V_{pile}}(a-\frac{V_{pile}}{R_1}))$$

$$t=-(R_2C).\ln(\frac{R_2}{V_{pile}}(a-\frac{V_{pile}}{R_1}))=-(1{,}7.10^3.470.10^{-9}).\ln(\frac{1{,}7.10^3}{12}.(15.10^{-3}-\frac{12}{10^3}))$$

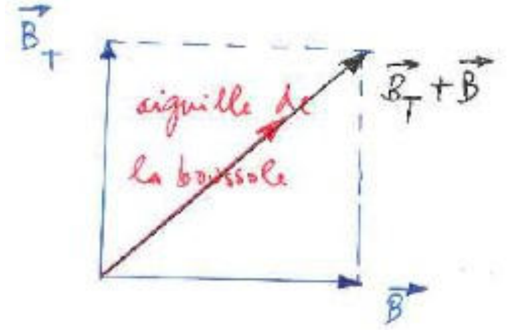
$$t=-8.10^{-4}.\ln(142.3.10^{-3})=0{,}68\,ms.$$

Toutes les sections

3 . Le dispositif ci-dessous permet de mesurer la composante horizontale du champ magnétique terrestre. Il est fait d'un tube en plastique transparent, de 19,2 cm de longueur et de 16 cm^2 de section, autour duquel est enroulé un bobinage de 24 spires espacées de 8,0 mm. Le bobinage a une résistance électrique de 10,0 Ω . On place une boussole au milieu du tube, et on oriente l'axe du tube dans la direction Ouest-Est, l'aiguille de la boussole indiquant le Nord. On applique alors une tension continue égale à 2,2 V aux bornes du bobinage, et, après 1,2 seconde, l'aiguille de la boussole fait un angle de 45° avec l'axe du tube. Calculez la valeur de la composante horizontale du champ terrestre.

(4 points)

Dispositif © Prof. J.-M. Frère (ULB)



A l'instant où la boussole fait un angle de 45°, le champ dû au solénoïde est égal à la composante horizontale du champ magnétique terrestre. Ce champ vaut :

$B(t)=\mu_0 \frac{N}{d} I(t)$, où N est le nombre de spires et d la longueur du solénoïde, et $I(t)$ le courant dans le fil.

Le bobinage constitue un circuit RL dont la constante de temps est :

$\tau=\frac{L}{R}=\frac{1}{R}.\mu_0 \frac{N^2}{d} S$, où S est la section de la bobine.

Donc :

$$\tau=\frac{1}{10}.4\pi.10^{-7}\frac{24^2}{0{,}192}.16.10^{-4}=6{,}0.10^{-7}s.$$

Comme $1{,}2s \gg 6{,}0.10^{-7}s$ le courant maximum est atteint au moment où on observe la boussole : $I=2{,}2V/10\Omega=0{,}22A.$

Donc $B=4\pi.10^{-7}\frac{24}{0{,}192}.0{,}22=3{,}5.10^{-5}T.$

Sections Chimie et Polyvalente

4. Des électrons et des protons, d'énergies cinétiques égales, entrent dans un champ magnétique perpendiculaire à leur trajectoire. Que vaut, en valeur absolue, le rapport entre l'accélération centripète subie par les protons et l'accélération centripète subie par les électrons ? Supposez que la masse du proton vaut 1,8.10^3 fois celle de l'électron.
(4 points)

Accélération centripète : $a_c = \frac{v^2}{R}$, où le rayon R de la trajectoire est lié à la quantité de mouvement des particules par : $mv = qBR$, où q est la charge des particules, donc

$$R = \frac{mv}{qB}$$

Donc :

$$a_c = \frac{vqB}{m}$$

D'autre part $v = \sqrt{\frac{2.E_{cin}}{m}}$.

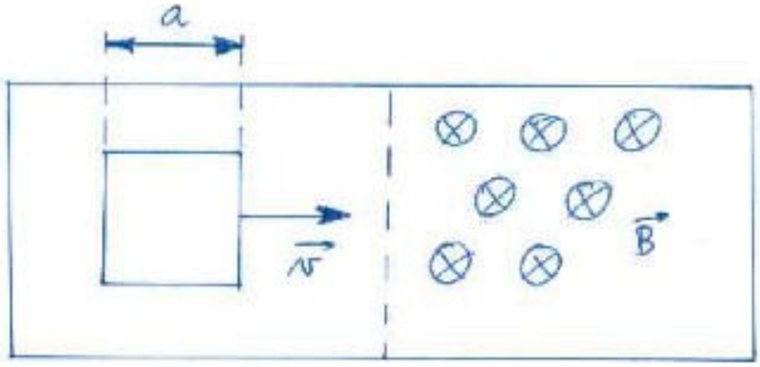
Donc en valeur absolue :

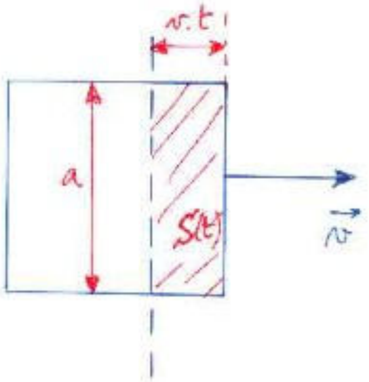
$$|\frac{a_{c,p}}{a_{c,e}}| = \frac{m_e \sqrt{m_e}}{m_p \sqrt{m_p}} = 1{,}3.10^{-5}.$$

Sections Chimie et Polyvalente

5. Sur une table horizontale, on fait glisser à vitesse constante *v* un cadre horizontal carré, depuis le côté gauche de la table vers le côté droit. Le cadre est formé de 4 barreaux conducteurs, chacun de longueur *a* et de résistance électrique *R*, soudés ensemble. Un champ magnétique vertical *B* constant baigne la moitié droite de la table. Quelle est l'expression de la force de freinage que le cadre métallique subit au moment où il entre dans le champ magnétique ? Supposez que les côtés du cadre sont parallèles aux bords de la table, et qu'il n'y a pas de frottement entre le cadre et la surface de la table.

(4 points)





A partir de l'instant où le cadre atteint le coté droit de la table, un flux de $\vec{B}$ croissant le traverse. Ceci induit une f.é.m. dans le cadre, qui est alors parcouru par un courant électrique *I*. La force de freinage est la force magnétique qui s'exerce sur ce courant.

Force totale :

$$F = B.I.a$$

Courant : $I = \frac{\varepsilon}{4R} = \frac{1}{4R} . \frac{d\Phi_B}{dt}$; où Φ_B est le flux de $\vec{B}$.

Ce dernier s'exprime comme suit : $\vec{B}$ est perpendiculaire à la surface du cadre. *t* secondes après que le cadre a atteint la zone de champ non-nul, la portion de cette surface qui est dans le champ est : $S(t) = a.vt$

Donc : $\Phi_B(t) = B.a.vt$.

Dès lors :

$$F = \frac{B^2.a^2 v}{4R}$$

Sections Mathématique et Physique

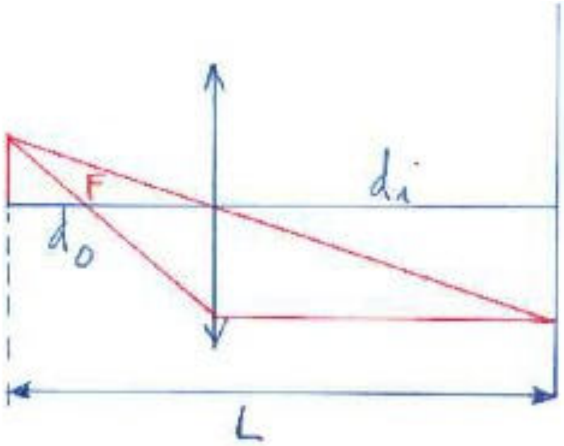
6. On dispose d'une lentille convergente, de distance focale *f*, et d'un écran. Un objet est placé à une distance fixe de l'écran, notée *L*. On place la lentille entre l'objet et l'écran.

a) A quelle distance de l'objet faut-il placer la lentille pour former sur l'écran une image nette et agrandie ?

(3 points)

b) Toutes les lentilles convergentes conviennent-elles pour ce dispositif ?

(1 point)



a) Dans la situation décrite d_0 et d_i sont positives.

Image réelle agrandie → grandissement transversal $m=\frac{-d_i}{d_0}<-1$ donc $d_i>d_0$.

On sait :

$$d_0+d_i=L$$

$$\frac{1}{d_0}+\frac{1}{d_i}=\frac{1}{f}$$

Après quelques calculs on trouve une équation du 2nd degré dont les racines sont :

$$d_0=\frac{L\pm\sqrt{(L^2-4Lf)}}{2}$$.

On garde la plus petite des solutions pour avoir $d_0<\frac{L}{2}$ et donc $d_i>d_0$.

b) Non, il faut que la distance focale $f<\frac{L}{4}$ sinon l'équation du second degré n'admet pas de racine réelle.

Sections Mathématique et Physique

7. Chasse relativiste.

Un chasseur et son chien à l'affut voient un sanglier immobile à 100 m de distance. Le chasseur tire et, au même instant, le chien file vers le sanglier à la vitesse de 0,25.*c*, où *c* est la vitesse de la lumière. 7,7.10^{-7} secondes après le tir, le chien voit que la balle a touché le sanglier. Combien de temps après le tir le chasseur voit-il, lui aussi, que le sanglier est touché ?

(4 points)

Evé. 1 : le chasseur tire
Coordonnées (0 ; 0) dans les 2 référentiels

Evé. 2 : le chien voit que le sanglier est touché
Coordonnées *(x'; t')* = (0 ; 7,7.10^{-7} s) dans le référentiel du chien
Coordonnées *(x ; t)* dans le référentiel du chasseur.

Pour que le chasseur voie que le sanglier est touché, il faut que la lumière parcoure la distance supplémentaire entre l'endroit où le chien se trouve, et l'endroit où le chasseur se trouve :

$$t_c = t + \frac{x}{c}$$

En applicant les transformations de Lorentz :

$$t = \gamma(t' + \beta/c\, x') = \gamma t'$$
$$x = \gamma(x' + v t') = \gamma v t'$$

où *v* est la vitesse du chien, $\beta = \frac{v}{c}$ et $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Donc $t_c = \gamma(1+\beta) t' = 1{,}033.1{,}25.7{,}7.10^{-7} s = 9{,}9.10^{-7} s.$

Examen de Physique Générale – PHYS-F110

Partie Exercices

Année 2018-2019 - Examen de juin 2019

Nom :

Prénom :

N° de carte d'étudiant :

Section (entourer) : Chimie — Math-Bio — Math-Ph — Physique — Polyvalente

---

Consignes générales :

1. Écrivez immédiatement vos prénom, nom, numéro de carte d'étudiant et section.
2. Vérifiez que votre énoncé comporte bien **9 feuilles** (4 questions).
3. **Ne répondez qu'aux questions qui concernent votre section.**
4. Ne dégrafez pas les pages.
5. Les GSM, tablettes, smartwatches et autres moyens de communication sont interdits. Ils doivent être éteints et rangés dans les sacs le long du mur. En aucun cas vous ne pouvez avoir un GSM (ou autre moyen de communication) à portée de main, même éteint.
6. Vous pouvez consulter votre aide mémoire (une feuille A4 recto-verso manuscrite). Celui-ci doit porter votre nom et ne peut pas être prêté.
7. Les calculatrices ne peuvent pas être prêtées.
8. Ne répondez pas en rouge, cette couleur étant réservée pour la correction.
9. **Les réponses doivent toutes être clairement justifiées et les unités doivent être indiquées pour les résultats numériques.**
10. En cas de besoin, vous prendrez les valeurs de constantes suivantes :
    - Accélération de la pesanteur à la surface de la Terre : $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$;
    - Masse volumique de l'eau : $\rho = 1{,}0 \times 10^3\,\mathrm{m}^3$
11. L'examen dure **2h (120 minutes)**.

Bon travail !

Q1	Q2	Q3	Q4
/8	/10	/12 + /4	/10

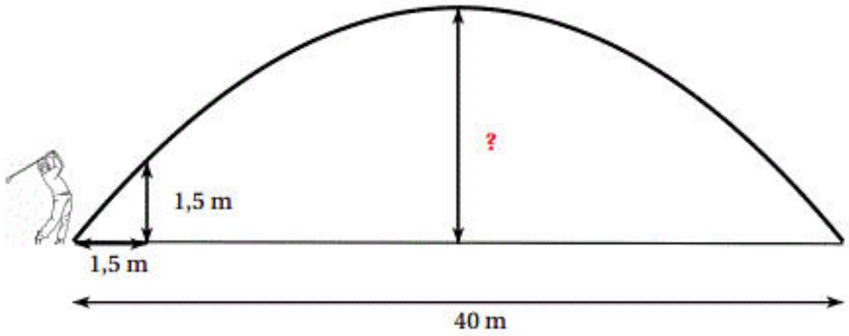


Fig. 1 – Golfeur frappant une balle.

1. (Toutes sections — 8 points) :

Un golfeur frappe sa balle avec un angle de 45°. La trajectoire de la balle est parabolique (on néglige les frottements de l'air). La distance horizontale pacourue par la balle est 40m.

Déterminer la hauteur maximale atteinte par la balle.

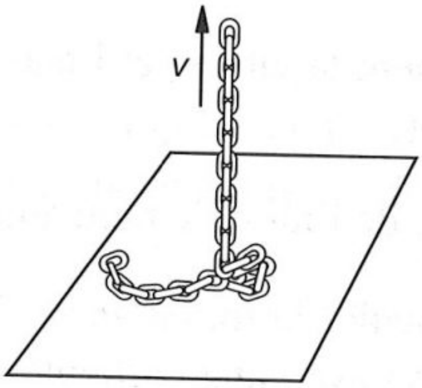


Fig. 2 – Chaine dont l'extrémité est tirée vers le haut à une vitesse v constante.

2. (Toutes sections — 10 points) :

L'extrémité d'une chaine, de masse par unité de longueur μ, au repos sur une table pour $t \leq 0$, est soulevée verticalement à une vitesse constante v pour $t > 0$, comme le montre la figure.

a) À l'instant $t > 0$, une partie de la chaine est immobile sur la table, et une partie de la chaine est en mouvement. Exprimez la masse de la partie de la chaine qui est en mouvement à l'instant $t > 0$ en fonction des variables de l'énoncé.

b) Exprimez la quantité de mouvement de la partie de la chaine qui est en mouvement à l'instant $t > 0$ en fonction des variables de l'énoncé.

c) Nous désirons évaluer la force $\vec{F}(t)$ exercée vers le haut sur le bout de la chaine pour soulever la chaine. Pour cela il est commode d'utiliser la deuxième loi de Newton reformulée comme

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext} \tag{1}$$

où $\vec{F}_{ext}$ sont les forces externes agissant sur la chaine, et $\vec{P}$ la quantité de mouvement de la chaine. Déterminez la force $\vec{F}(t)$.

d) Déterminez le travail effectué par la force $\vec{F}(t)$ entre l'instant $t = 0$ et l'instant t.

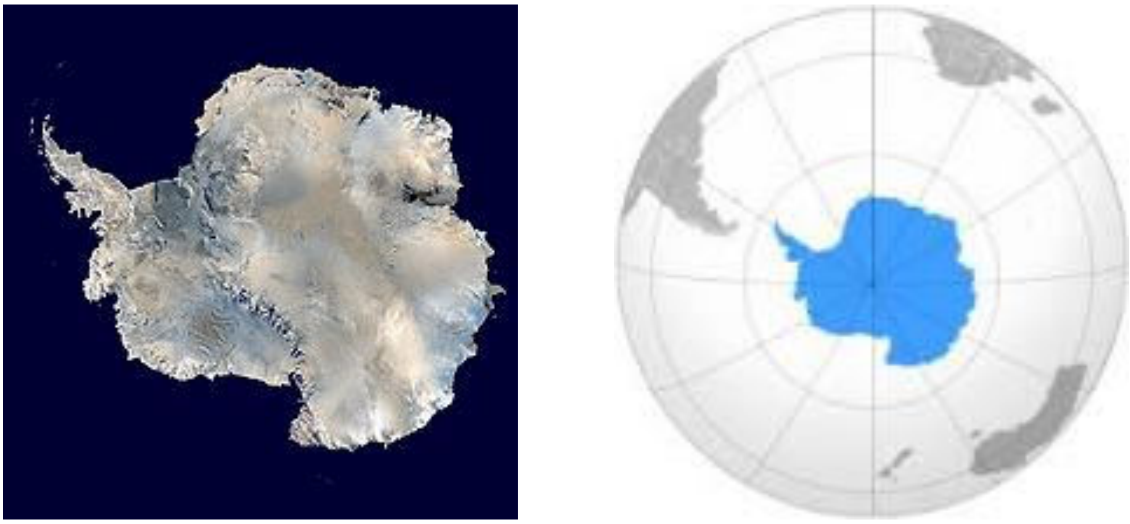


Fig. 3 – L'Antarctique vu de l'espace.

3. (Toutes sections pour questions a–d, uniquement Math-Ph, Math-Bio et Physique pour la question e — 12 ou 16 points) :

L'Antarctique (voir la figure) est couvert d'une calotte glaciaire. Cette calotte glaciaire couvre une surface d'à peu près $14 \times 10^6\,\mathrm{km}^2$ et a une épaisseur moyenne de 1,8 km. Le réchauffement climatique actuellement en cours pourrait entrainer la fonte de la calotte glaciaire de l'Antarctique.

Vous allez étudier quelques unes des conséquences de la fonte de la calotte glaciaire de l'Antarctique. Dans cette analyse vous ferez plusieurs simplifications : vous pourrez négliger par exemple qu'une partie de la calotte glaciaire de l'Antarctique est sous le niveau de la mer, ou que les océans ne couvrent pas la totalité de la surface de la Terre (ils couvrent 70% de la surface de la Terre), ou que la glace n'a pas la même masse volumique que l'eau liquide (et aussi que la masse volumique de la glace et de l'eau change légèrement avec la pression et la température), ou que la calotte glaciaire de l'Antarctique a une contribution non nulle au moment d'inertie de la Terre avant qu'elle fonde. Par conséquent des réponses numériquement différentes de la réponse exacte, mais avec un raisonnment correct pourront être admises.

a) Estimez la masse de la calotte glaciaire de l'Antarctique.

b) Estimez de combien le niveau de la mer monterait si la calotte glaciaire de l'Antarctique fondait entièrement.

c) La fonte de la calotte glaciaire de l'Antarctique entrainerait une modification de la durée du jour (période de rotation de la Terre sur elle-même). Est ce que la durée du jour s'allongerait, raccourcirait ? Pourquoi ?

d) Estimez de combien changerait la durée du jour si la calotte glaciaire Antarctique fondait totalement. Pour cela vous pouvez approximer la Terre comme une sphère pleine homogène de masse $M_T = 6{,}0 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$ et de rayon 6 400 km.

   Vous aurez également besoin des informations suivantes : le moment d'inertie d'une sphère pleine homogène de rayon R et de masse M est $I_{\mathrm{SPleine}} = (2/5)MR^2$; le moment d'inertie d'une sphère creuse (une coquille sphérique mince) de masse M et de rayon R est $I_{\mathrm{SCreuse}} = (2/3)MR^2$.

e) Choisissez une des simplifications énumérées ci-dessus. Expliquez (sans faire de calcul, mais éventuellement en donnant les formules pertinentes) comment vous feriez pour ne pas faire cette approximation et obtenir une réponses numériquement plus correcte dans les réponses aux questions a,b,d.

f) **Physique, Math-Physique et Math-Bio uniquement.** Démontrez que $I_{\mathrm{SPleine}} = (2/5)MR^2$.

Fig. 4 – Quelques montgolfières.

Fig. 5 – Montgolfières avec le bruleur en action. Le bruleur injecte de l'air chaud dans l'enveloppe par l'ouverture qui se trouve dans le bas de l'enveloppe.

4. (Toutes sections sauf math–bio — 10 points) :

Une montgolfière (voir figure 4) est composée d'une nacelle surmontée d'une enveloppe légère. La sustentation de la montgolfière est assurée par l'air chauffé que renferme la nacelle, selon le principe de la poussée d'Archimède. Le maintien de la température de l'air nécessite l'emport d'un carburant et d'un bruleur (voir figure 5) .

Considérons une montgolfière dont la masse (enveloppe, nacelle, bouteilles de propane, passagers) est de 400 kg. Le volume d'air chauffé dans l'enveloppe est de $2{,}0 \times 10^3$ m^3. La température ambiante est de 15°C et la pression atmosphérique de 1 atmosphère $= 1{,}0 \times 10^5$ Pa. À cette température la masse volumique de l'air est de 1,2 kg/m^3. La montgolfière flotte sans monter ni descendre.

a) Dans ces conditions, quelle est la masse volumique de l'air dans l'enveloppe (supposé uniforme) ?

b) Expliquer pourquoi la pression de l'air est approximativement la même à l'intérieur et à l'extérieur de l'enveloppe.

c) Quelle est la température de l'air (que nous assimilons à un gaz parfait) dans l'enveloppe ?

Examen de Physique Générale – PHYS-F110

Partie Théorie

Année 2018-2019 - Examen de juin 2019

Nom :

Prénom :

N° de carte d'étudiant :

Section (entourer) : Chimie — Math-Bio — Math-Ph — Physique — Polyvalente

---

Consignes générales :

1. Écrivez immédiatement vos prénom, nom, numéro de carte d'étudiant et section.
2. Vérifiez que votre énoncé comporte bien **6 feuilles** (3 questions).
3. **Ne répondez qu'aux questions qui concernent votre section.**
4. Ne dégrafez pas les pages.
5. Les GSM, tablettes, smartwatches et autres moyens de communication sont interdits. Ils doivent être éteints et rangés dans les sacs le long du mur. En aucun cas vous ne pouvez avoir un GSM (ou autre moyen de communication) à portée de main, même éteint.
6. Vous n'avez pas droit à un aide-mémoire ou à une calculatrice.
7. Ne répondez pas en rouge, cette couleur étant réservée pour la correction.
8. **Les réponses doivent toutes être clairement justifiées. Définissez soigneusement toutes les grandeurs que vous utilisez.**
9. L'examen dure **1h15 (75 minutes)**.

Bon travail !

Q1 /10	Q2 /10	Q3 /10

1. (Toutes sections sauf math-bio — 10 points) :

Fluides.

a) Énoncez l'équation de continuité (conservation de la masse) pour un fluide. (Il existe plusieurs formulations de l'équation de continuité. Vous ne devez en donner qu'une.)

b) Définissez la viscosité d'un fluide. Faites un schéma pour illustrer la définition.

c) Donnez les unités de la viscosité.

2. (Toutes sections — 10 points) :

Considérons une particule ponctuelle de masse m qui se meut dans l'espace à 3 dimensions, selon une trajectoire $\vec{x}(t)$, soumise à une force $\vec{F}(\vec{x},t)$. A l'instant $t = t_0$ elle se trouve à la position $\vec{x}_0$, et à l'instant $t = t_1 > t_0$, elle se trouve à la position $\vec{x}_1$.

a) Définissez l'énergie cinétique de la particule à l'instant t.

b) Définissez le travail W effectué par la force $\vec{F}$ entre les instants $t = t_0$ et $t = t_1$.

c) Donnez un exemple illustratif dans lequel vous choisissez une force $\vec{F}(\vec{x},t)$, des positions initiales et finales $(t_0, \vec{x}_0)$ et $(t_1, \vec{x}_1)$, et vous calculez le travail W effectué par la force $\vec{F}$ entre les instants $t = t_0$ et $t = t_1$. Attention : dans votre exemple la force $\vec{F}(\vec{x},t)$ ne peut pas être constante (trop facile) : elle doit dépendre de la position et/où du temps.

d) Énoncez et démontrez le théorème de l'énergie cinétique pour cette particule ponctuelle. Faites particulièrement attention aux notations utilisée et aux étapes du calcul : toute expression incohérente mathématiquement sera sanctionnée.

3. (Toutes sections — 10 points) :

Nous considérons un solide au repos, en situation d'équilibre statique.

a) Enoncez précisément les conditions d'équilibre statique de ce solide.

b) Si ce solide est soumis à la force de pesanteur, expliquez comment tenir compte de la force de pesanteur : donnez le point d'application de la force, sa norme, sa direction, son sens.

c) Expliquez comment tenir compte des forces de contact entre le solide et une surface. Donnez le point d'application, la norme, la direction, le sens des forces de contact. Expliquez comment intervient le coefficient de frottement statique.

Faites un schéma pour illustrer vos définitions et explications.

NOM, PRENOM (en majuscules) …..………………………...…………………….……

SECTION (entourez votre section)

Chimie **Mathématique** **Physique** **Polyvalente**

PHYS-F-110

Physique générale II - Electricité et magnétisme

Examen du 19 juin 2019

I. Théorie (20 points – 1 heure 15')

Justifiez toujours vos réponses.
(les simples affirmations du type oui / non ne sont pas prises en compte)

Les résultats numériques doivent être exprimés
- en unités du Système international ;
- avec la précision adéquate, sous peine d'être considérés comme incorrects.

Note théorie : /20

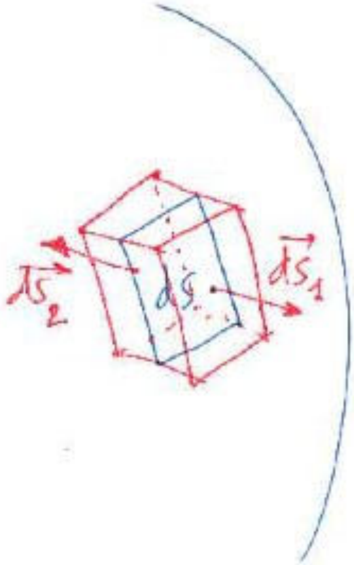
Toutes les sections

1. Utilisez le théorème de Gauss pour calculer l'expression du champ électrique à la surface d'un conducteur chargé à l'équilibre électrostatique. Précisez toutes les grandeurs et tous les symboles que vous introduisez.
(3 points)

Pour un conducteur chargé à l'équilibre électrostatique, on sait que :

- le champ électrique à l'intérieur du conducteur est nul ;
- le champ électrique à la surface du conducteur est perpendiculaire à cette surface ;

sinon il y aurait des courants électriques sous l'effet du champ électrique.



On choisit comme surface de Gauss la surface qui délimite un élément de volume en forme de parallélépipède, dont 2 faces $\vec{dS}_1$ et $\vec{dS}_2$, de surface dS, sont // à la surface du conducteur, l'une à l'intérieur et l'autre à l'extérieur, et dont 4 faces sont perpendiculaires à la surface du conducteur (voir schéma).

Alors par Gauss :

$\Phi_E = \vec{E}.\vec{dS}_1 + \vec{0}.\vec{dS}_2 + 0 = E.dS = \frac{\sigma.dS}{\varepsilon_0}$, où Φ_E est le flux du champ électrique, σ est la densité de charge à la surface du conducteur, et ε_0 est la permittivité du vide.

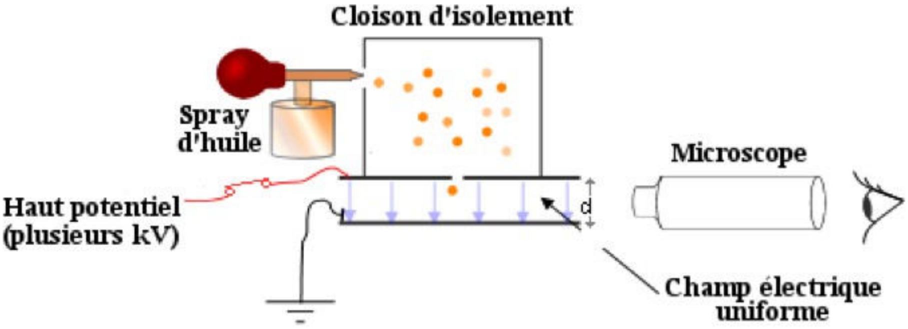
Donc : $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

Toutes les sections

2. Expliquez l'expérience de la goutte d'huile de Millikan.

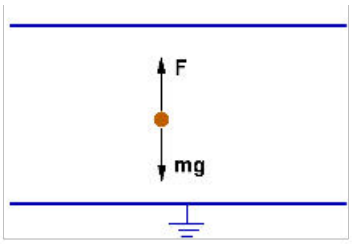
(4 points)

Le dispositif de Millikan permet d'observer le mouvement de gouttes d'huile ionisées dans un champ électrique uniforme.



Les gouttes d'huile s'ionisent par frottement en sortant du vaporisateur. Elles tombent ensuite sous l'effet de la gravité et sont soumises à la poussée d'Archimède et au frottement de l'air (de viscosité η).

En l'absence de champ électrique, elles chutent à une vitesse limite qui dépend de leur rayon :

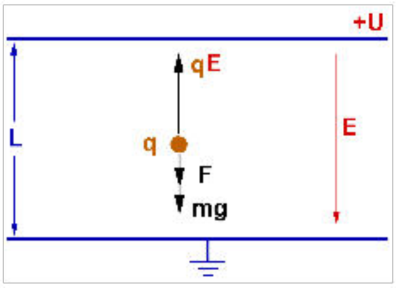


$$gm_{huile} - gm_{air} - 6\pi\eta r v_1 = 0$$

$$g\frac{4}{3}\pi r^3(\rho_{huile} - \rho_{air}) - 6\pi\eta r v_1 = 0$$

De v_1 on déduit le rayon r de la goutte.

En présence d'un champ électrique, la vitesse limite d'une goute donnée dépend de sa charge électrique : pour une goutte qui se déplace vers le haut :



$$gm_{huile} - gm_{air} - qE + 6\pi\eta r v_2 = 0$$

De v_2 et connaissant le rayon r, on déduit la charge q de la goutte.

Millikan observe que q est quantifiée et est un multiple (entier) de $1{,}6.10^{-19}$ C.

Toutes les sections

3 . Énoncez la loi d’Ampère-Maxwell où intervient le courant de déplacement, en précisant toutes les grandeurs qui interviennent.
(3 points)

Loi d’Ampère :

$$\oint_C \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 [\sum I + \frac{d}{dt}(\varepsilon_0 \Phi_E)]$$

avec :

$\vec{B}$: champ magnétique
$d\vec{l}$: élément de parcours fermé C
μ_0 : perméabilité du vide
$\sum I$: somme des intensités des courants encerclés par le parcours fermé C
ε_0 : permittivité du vide
Φ_E : flux du champ électrique à travers la surface délimitée par C

Toutes les sections

4. a) Enoncez la loi d'induction de Faraday, en précisant toutes les grandeurs que vous introduisez.

(2 points)

b) Appliquez-la pour calculer l'expression de la force électromotrice produite par un générateur de tension alternative sinusoïdale constitué d'un cadre de surface *S* autour duquel un fil conducteur est enroulé en *N* spires serrées. Ce cadre tourne avec une vitesse angulaire constante dans un champ magnétique uniforme perpendiculaire à l'axe de rotation du cadre. Précisez toutes les grandeurs que vous introduisez.

(2 points)

a) La loi d'induction de Faraday peut s'écrire :

$\varepsilon = \frac{-d\Phi_B}{dt}$, où ε est la force électromotrice induite dans une boucle conductrice fermée, et Φ_B est le flux du champ magnétique à travers la surface délimitée par la boucle.

b) Soit B l'intensité du champ magnétique, et $\alpha(t) = \omega t$ l'angle entre le champ magnétique et le vecteur normal à la surface du cadre, où ω est la vitesse angulaire du cadre.

L'expression du flux du champ magnétique à travers 1 spire en fonction du temps est :

$$\Phi_B = BS\cos(\omega t)$$

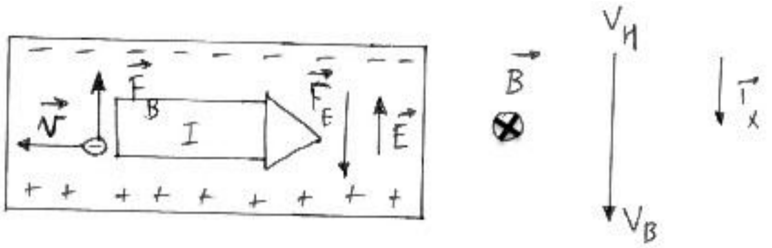
Comme les N spires sont en série, la f.é.m. aux bornes du fil a pour expression :

$$\varepsilon = N\frac{-d\Phi_B}{dt} = NBS\,\omega\sin(\omega t) \quad .$$

Sections Chimie et Polyvalente

5. Expliquez le principe de la mesure du champ magnétique par effet Hall à partir des lois qui décrivent les forces électrique et magnétique.
(3 points)

L'effet Hall permet de mesurer le champ magnétique à partir de la différence de potentiel qui s'établit entre les faces latérales d'un conducteur plongé dans ce champ lorsqu'il est parcouru par un courant électrique. Cette différence de potentiel s'établit dans la direction perpendiculaire au courant (voir schéma).



Les porteurs de charge mobiles qui constituent le courant se déplacent à vitesse moyenne *v* et subissent une force magnétique perpendiculaire au courant. Supposons la charge des porteurs négative, et les sens du courant et du champ magnétique comme précisés sur le schéma. Alors :

$$\vec{F}_B = -qvB\,\vec{1}_x$$

Les charges (-) s'accumulent sur la face supérieure du conducteur et créent un champ électrique du bas vers le haut, qui exerce une force électrique sur les charges mobiles, dans la direction opposée à la force magnétique. L'équilibre s'établit et l'accumulation de charges cesse lorsque :

$$\vec{F}_E = qvB\,\vec{1}_x$$

$$\vec{E} = -vB\,1_x$$

Alors la différence de potentiel entre les faces du conducteur s'obtient en intégrant le champ électrique (constant) d'une face à l'autre :

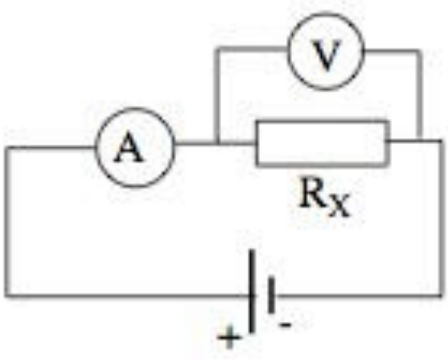
$V_{Bas} - V_{Haut} = -\int_{Haut}^{Bas} -vB\,dx = vBL$, où L est la largeur du conducteur.

Cette différence de potentiel est proportionnelle à *B*.

Sections Chimie et Polyvalente

6. Dans le montage ci-dessous, à quelle condition le rapport de la tension V mesurée au voltmètre et du courant I mesuré à l'ampèremètre est-il une bonne approximation de la résistance R_X ? Justifiez par un calcul.

(3 points)



Notons R_V la résistance interne du voltmètre, I_V le courant qui traverse le voltmètre et I_X le courant qui traverse la résistance R_X. On a :

$$I = I_X + I_V$$

$$V = R_X I_X = R_V I_V$$

En substituant les courants dans la 1^e équation :

$$I = \frac{V}{R_X} + \frac{V}{R_V} = V\left(\frac{1}{R_X} + \frac{1}{R_V}\right) = V\left(\frac{R_X + R_V}{R_X R_V}\right)$$

Alors :

$$\frac{V}{I} = \frac{R_X R_V}{R_X + R_V} = \frac{R_X}{1 + \frac{R_X}{R_V}} .$$

Ce rapport tend vers R_X quand $R_V \gg R_X$: la résistance interne du voltmètre doit être grande par rapport à R_X.

Sections Mathématique et Physique

7. On dispose d'un objet et d'une lentille divergente (distance focale f < 0). Montrez que, si l'objet est réel, la taille de l'image est toujours réduite par rapport à celle de l'objet. (3 points)

L'expression du grandissement transversal est :

$m = \frac{-d_i}{d_0}$, où d_i, d_o sont les distances image et objet.

Equation de conjugaison : $\frac{1}{d_0} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f}$. On isole d_i :

$$\frac{1}{d_i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{d_0} = \frac{d_0 - f}{f . d_0} \quad ,$$

donc :

$$m = \frac{-f}{d_0 - f} \quad .$$

Comme l'objet est réel, $d_0 > 0$, et comme $(-f) = |f| > 0$ on a :

$$m = \frac{|f|}{d_0 + |f|} < 1 \quad .$$

Sections Mathématique et Physique

8. On considère un référentiel prime ('), en mouvement à vitesse constante *v* dans la direction $\vec{1}_x$ par rapport au référentiel sans prime. À partir des expressions des transformations de Lorentz des coordonnées d'espace-temps ci-dessous :

$$x=\gamma(x'+vt')$$

$$t=\gamma(t'+v\frac{x'}{c^2})$$

où $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$ **est le facteur de dilatation du temps, calculez les expressions des transformations de toutes les composantes de la vitesse.**

(3 points)

On cherche à exprimer les composantes de la vitesse dans le référentiel « au repos », $(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt})$, à partir des composantes de la vitesse dans le référentiel en mouvement, $(\frac{dx'}{dt'},\frac{dy'}{dt'},\frac{dz'}{dt'})$.

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{dt'}.\frac{dt'}{dt}=\gamma(\frac{dx'}{dt'}+v).\frac{dt'}{dt}$$

et

$$\frac{dt'}{dt}=(\frac{dt}{dt'})^{-1}=(\gamma(1+\frac{v}{c^2}.\frac{dx'}{dt'}))^{-1}$$

. Ce facteur traduit l'effet de la dilatation du temps.

Donc :

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\frac{dx'}{dt'}+v}{1+\frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}} .$$

Pour la composante selon y : le référentiel prime est en mouvement dans la direction x, donc $y=y'$

et

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy'}{dt'}.\frac{dt'}{dt}=\frac{\frac{dy'}{dt'}}{\gamma(1+\frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'})}$$

. De façon similaire : $\frac{dz}{dt}=\frac{\frac{dz'}{dt'}}{\gamma(1+\frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'})}$.

NOM, PRENOM (en majuscules) ....

SECTION (entourez votre section)

Chimie **Mathématique** **Physique** **Polyvalente**

PHYS-F-110

Physique générale II - Electricité et magnétisme

Examen du 19 juin 2019

II. Exercices (20 points – 2 heures)

Justifiez toujours vos réponses.
(les simples affirmations du type oui / non ne sont pas prises en compte)

Les résultats numériques doivent être exprimés
- en unités du Système international ;
- avec la précision adéquate, sous peine d'être considérés comme incorrects.

Q : **1** */4* **2** */4* **3** */4* **4 ou 6** */4* **5 ou 7** */4*

Note totale exercices : **/20**

Toutes les sections

1. On raccorde une source de tension à un câble coaxial cylindrique très long. La borne positive est raccordée au fil central, de 1,0 mm de rayon, et la borne négative au conducteur extérieur, de 3,0 mm de rayon. L'isolant entre les conducteurs a une permittivité relative de 1,0 et peut supporter un champ maximum de 3,0.10^6 V/m avant l'apparition de décharges électriques. On augmente progressivement la différence de potentiel entre les conducteurs. A quelle différence de potentiel les décharges apparaissent-elles ?
(4 points)

Le câble coaxial constitue un condensateur qui se charge lorsqu'on applique une tension entre le conducteur central et le conducteur extérieur. Le champ entre les conducteurs a pour expression :

$\vec{E}(r)=\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r r}\vec{1}_r$, où λ est la densité linéique de charge sur le fil central, $\epsilon_0\epsilon_r$ est la permittivité de l'isolant, et r est la distance à l'axe du fil.

L'intensité du champ est donc maximum à la surface du fil central ($r=R_1=1{,}0\,mm$), soit :

$E(R_1)=\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r R_1}$, et les décharges apparaissent quand $E(R_1)=3{,}0.10^6 V/m$.

La différence de potentiel ΔV entre les fils est par définition :

$$\Delta V=-\int_{R_1}^{R_2}\vec{E}(r).d\vec{r}=\frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}\ln(\frac{R_2}{R_1}) \quad .$$

Donc :

$\Delta V=E(R_1).R_1.\ln(\frac{R_2}{R_1})$, et la tension à laquelle apparaissent les décharges est :

$$\Delta V=3{,}0.10^6.1{,}0.10^{-3}.\ln(3)=3{,}3.10^3 V.$$

Toutes les sections

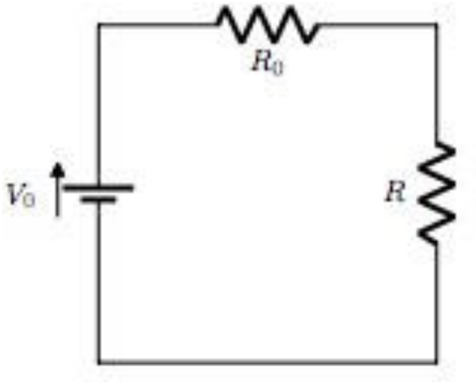
2. Le circuit ci-dessous comporte une pile, qui fournit une tension continue V_0 et dont la résistance interne est notée R_0, et une résistance R raccordée à la pile.

a) Exprimez la tension aux bornes de la résistance R en fonction de V_0, R_0 et R.

(1 point)

b) On fait varier R et on observe que, lorsque R = R_0, la puissance dissipée dans R atteint un maximum. Montrez par un calcul que c'est le résultat attendu.

(3 points)



a) Loi des mailles : $V_0=(R_0+R).I$; loi d'Ohm : $V_R=R.I$ donc en éliminant I : $V_R=\frac{R}{R_0+R}.V_0$.

b) Puissance dissipée dans R : $P=\frac{V_R^2}{R}=\frac{R}{(R_0+R)^2}.V_0^2$.

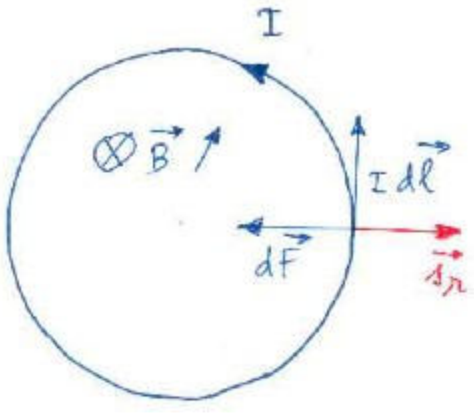
On recherche R qui correspond à un maximum de P : $R\, telle\, que\, \frac{\partial P}{\partial R}=0$, soit :

$$\frac{\partial P}{\partial R}=V_0^2.\frac{[(R_0+R)^2-R.2(R_0+R)]}{(R_0+R)^4}=V_0^2.\frac{(R_0^2-R^2)}{(R_0+R)^4} ,$$

qui s'annule quand $R=R_0$, CQFD.

Toutes les sections

3. Une spire de surface S est constituée d'un fil conducteur circulaire de résistance R. Elle est placée dans un champ magnétique de sorte que le champ soit perpendiculaire à la surface de la spire. L'intensité du champ magnétique augmente linéairement au cours du temps selon l'expression B = k.t. On observe que la spire a tendance à se resserrer, à cause de forces radiales qui s'exercent sur le fil. Calculez l'expression de la force qui s'exerce par unité de longueur du fil. Négligez l'inductance de la spire, et négligez la déformation de la spire sous l'effet des forces.
(4 points)



Une f.é.m. est induite dans la spire, qui produit un courant dans celle-ci. Le champ magnétique exerce alors une force sur ce courant, de direction radiale car $d\vec{F} = I\,d\vec{l}\,x\,\vec{B}$ (voir schéma).

La f.é.m. : $\epsilon = \frac{-d\,\Phi_B}{dt} = k.S$

Comme l'inductance de la spire est négligeable, $I = \frac{\epsilon}{R} = \frac{k.S}{R}$

Comme $I\,d\vec{l}\,x\,\vec{B} = I.dl.B.(-\vec{1}_r)$, où $\vec{1}_r$ est un vecteur radial, la force par unité de longueur a pour expression :
$\frac{d\vec{F}}{dl} = \frac{k^2.S.t}{R}\vec{1}_r$.

Sections Chimie et Polyvalente

4. Un cyclotron de Lawrence fonctionnant avec un champ magnétique de 1,0 T produit un faisceau de protons de 40 MeV d'énergie cinétique. Les protons sont accélérés depuis une vitesse initiale négligeable. A chaque demi-tour, ils traversent une différence de potentiel accélératrice de 10 kV.

a) Combien de temps prend l'accélération d'un proton jusqu'à l'énergie de 40 MeV ? Prenez 1,7.10^{-27} kg comme masse du proton.

(2 points)

b) A quelle énergie des noyaux de carbone comportant 6 protons et 6 neutrons sortiraient-ils du même cyclotron ? Négligez la différence de masse entre les neutrons et les protons.

(2 points)

a) A chaque demi-tour, les protons gagnent une énergie cinétique $q_p \Delta V$, où q_p est la charge du proton, et ΔV la ddp accélératrice. Ils parcourent donc $\frac{40\,MeV}{q_p \Delta V}=\frac{40\,MeV}{10\,keV}=4000$ demi-tours avant de sortir du cyclotron.

Chaque demi-tour prend un temps $T_{1/2}=\frac{\pi m_p}{q_p B}$, où m_p est la masse du proton et B l'intensité du champ magnétique.

L'accélération prend donc un temps total : $T=4000.\frac{\pi.1{,}7.10^{-27}}{1{,}6.10^{-19}.1{,}0}=1{,}3.10^{-4}s$.

b) $E_C=\frac{1}{2}\frac{(q_C.B.R)^2}{m_C}=\frac{1}{2}\frac{(6.q_p.B.R)^2}{12.m_p}=\frac{36}{12}.\frac{1}{2}\frac{(q_p.B.R)^2}{m_p}$, où q_C, m_C sont la charge et la masse du noyau de carbone.

Donc $E_C=3.E_p=1{,}2.10^2 MeV$.

Sections Chimie et Polyvalente

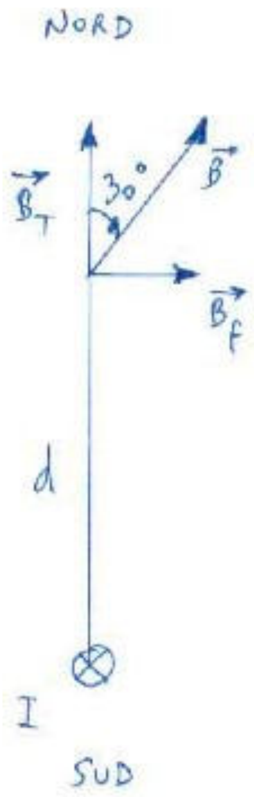
5. On suppose une boussole idéale qui s'aligne instantanément sur le champ magnétique. Elle est posée horizontalement sur le sol, à un endroit où la composante horizontale du champ magnétique terrestre vaut 0,5.10^{-4} T vers le nord géographique. La foudre tombe verticalement à 7,0 m au sud de la boussole. L'aiguille de la boussole pointe alors à 30 degrés à l'est du nord géographique.

a) Quelle est l'intensité du courant électrique transporté par la foudre ?

(3 points)

b) Dans quel sens ce courant circule-t-il ? Justifiez votre réponse.

(1 point)



a) $\tan 30° = \frac{B_f}{B_T}$, où B_f, B_T sont les composantes du champ dues à la foudre et au champ magnétique terrestre (voir schéma).

L'intensité du champ dû à la foudre a pour expression $B_f = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$, où d est la distance entre la boussole et la foudre, et I est le courant recherché.

Donc : $I = B_T \tan 30° . \frac{2\pi d}{\mu_0} = 0{,}5.10^{-4} . \frac{1}{\sqrt{3}} . \frac{2\pi .7{,}0}{4\pi . 10^{-7}} = 1{,}0\, kA .$

b) Par la règle de la main droite, si le champ total a une composante vers l'est, c'est que le courant de la foudre cause un champ magnétique dirigé vers l'est (voir schéma). Donc le courant est dirigé vers le sol.

Sections Mathématique et Physique

6. Un récepteur GSM est constitué d'un fil conducteur rectiligne de 2,0 cm de long. Ce fil est orienté parallèlement au champ électrique capté. A 100 m de l'émetteur, une tension de 4,8 mV d'amplitude est mesurée entre les extrémités du fil. A quelle distance de l'émetteur l'intensité maximale admise en région bruxelloise, 0,096 W/m^2, est-elle atteinte ? Supposez que l'émetteur produit une onde sphérique.
(4 points)

Par conservation de l'énergie, l'intensité décroit comme le carré de la distance à l'émetteur :

$$\frac{I(d_1)}{I(d_0)}=\frac{d_0^2}{d_1^2}$$

L'intensité (moyennée sur une période) et l'amplitude E du champ de l'onde é.m. sont liées par :

$$I=\frac{1}{2}c\epsilon_0 E^2 \quad ,$$

et l'amplitude du champ capté par l'antenne s'estime par : $E=\frac{\Delta V}{L}$, où ΔV est l'amplitude de la tension captée, et L est la longueur de l'antenne.

Alors : $d_1^2=\frac{1}{2}\frac{c\epsilon_0}{I_{max}}\left(d_0\frac{\Delta V}{L}\right)^2=0{,}5.\frac{3.10^8.8{,}85.10^{-12}}{0{,}096}.\left(100.\frac{4{,}8.10^{-3}}{2{,}0.10^{-2}}\right)^2=7{,}97m^2$.

Donc $d_1=2{,}8m$.

Sections Mathématique et Physique

7. Un électron initialement au repos est soumis à une différence de potentiel et atteint la vitesse de 0,405.c. Que vaut cette différence de potentiel ? Prenez 511 keV comme énergie de masse au repos de l'électron.
(4 points)

Conservation de l'énergie : $q_e \Delta V = (K_f + m_0 c^2) - (K_i + m_0 c^2) = \Delta K$, o ù q_e, m_0 sont la charge et la masse au repos de l'électron, c la vitesse de la lumière, et K_i, K_f les énergies cinétiques initiale et finale de l'électron.

On donne $K_i = 0\,eV$, et $K_f = m_0 c^2 (\gamma - 1) = 511\,keV.(\frac{1}{\sqrt{(1-0{,}405^2)}} - 1) = 47{,}9\,keV$.

Donc $\Delta V = 47{,}9\,kV$.

/6	/10	/10

INTERROGATION DE PHYSIQUE

31 Octobre 2019

Nom : CORRECTIF **Prénom :**

N° de carte d'étudiant :

Section : physique - math option physique – math option bio - polyvalente - chimie*

Règles de l'examen :

1. Les **GSM doivent êtres éteints et laissés** dans les serviettes le long du mur. En aucun cas vous ne pouvez avoir un GSM (ou autre moyen de communication) à portée de main, même éteint.
2. Les notes et/ou livres ne peuvent être utilisés.
3. Vous pouvez utiliser n'importe quel type de calculette; celles-ci ne peuvent être prêtées. Les appareils de communication électronique tel **GSM, tablette, smartwatch,** etc. sont rigoureusement interdits.
4. Utilisez de l'encre **noire** ou **bleue**, ou un crayon. Le **rouge** est interdit, étant réservé pour la correction.
5. Lisez attentivement les questions **jusqu'au bout**. Si vous ne savez pas répondre à une sous-question, essayez **toutes** les suivantes ; il se peut que vous n'ayez pas besoin d'avoir résolu la question manquée pour y répondre.
6. **Les réponses doivent toutes être justifiées.** Un espace est prévu à cet effet après chaque question. De plus, des feuilles vierges sont disponibles sur demande. Les **unités** doivent être indiquées pour les résultats numériques.
7. Pour les calculs numériques, on prendra **$g=9,81\ ms^{-2}$**.
8. L'énoncé comporte **10 pages. La première chose à faire est de vérifier que votre énoncé est complet et d'indiquer votre nom et prénom.** Certaines pages sont laissées intentionnellement pratiquement vierges, pour vous laisser la place de répondre.
9. Durée de l'examen : 1h30

Bon courage !

---

* barer les mentions inutiles.

Question 1 (6 points)

1.1 Énoncez les 3 lois de Newton.

1. Principe d'inertie : Tout corps soumis à aucune force conserve son état de repos ou de mouvement.

2. Relation fondamentale de la dynamique : Pour un corps de masse m, $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m\vec{a}$, où $\vec{a}$ est l'accélération de la masse m et $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ sont les forces extérieures s'appliquant sur la masse m.

3. Principe d'action-réaction : Si un corps A exerce une force $\vec{F}_{AB}$ sur un corps B, alors le corps B exerce une force $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$ sur le corps A.

1.2 Un atome d'hydrogène ^{1}H est composé de constituants plus élémentaires. Quels sont-ils ?

Un électron et un proton.

Remarque : Le proton n'est en fait pas une particule élémentaire et est lui-même constitué de quarks et de gluons.

1.3 Écrivez 15 nanosecondes en utilisant la notation scientifique. (La notation scientifique pour 32 millions de mètres est 3,2 10^7 m).

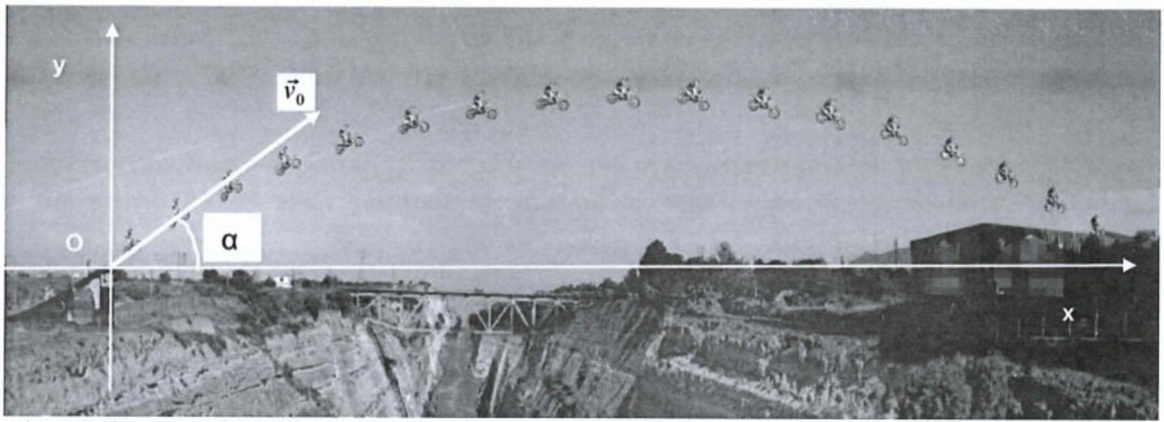
$15\,ns = 1{,}5 \cdot 10^{-8}\,s$.

1.4 En termes des unités fondamentales du Système International (m, kg, s, A), que vaut 1 watt ?

$$1W = 1\,J/s = 1\,\frac{m \cdot N}{s} = 1\,\frac{m}{s} \cdot kg \cdot \frac{m}{s^2} = 1\,\frac{kg\,m^2}{s^3}.$$

Question 2 (10 points)

Le canal de Corinthe est situé en Grèce. Il a été creusé pour relier la mer Égée et la mer Ionienne. Les parois rocheuses sont très hautes et l'eau s'écoule à 79 m au-dessous du niveau du sol. Plusieurs pilotes de moto ont eu l'intention de franchir le canal de Corinthe. L'Australien Robbie Maddison est le premier à réaliser cet exploit en avril 2010. Il a pris son élan pour accélérer sa moto et atteindre la vitesse de $v_0 = 125$ km.h^{-1}. Il a ensuite emprunté une rampe qui lui a permis de franchir le canal, avant d'atterrir de l'autre côté.



Chronophotographie (photos prises à intervalles de temps identiques) du saut de Madison au-dessus du canal de Corinthe.

Le référentiel d'étude est le référentiel terrestre, supposé galiléen pendant la durée du saut. Le mouvement de Maddison et sa moto est étudié à l'aide du repère (*O, x, y*) représenté sur la chronophotographie.

À l'instant $t = 0$, Maddison et sa moto se trouvent à l'origine du repère et quittent le tremplin. Le vecteur vitesse $\vec{v}_0$ du pilote et de sa moto fait alors un angle α avec l'axe horizontal (*Ox*) comme indiqué sur la chronophotographie. L'inclinaison en sortie du tremplin vaut $\alpha = 33°$. La vitesse en sortie de tremplin vaut $v_0 = 125$ km.h^{-1} . Tous les frottements sont négligés. On supposera que le sol du côté droit sur la photo est à la hauteur du haut du tremplin. N'oubliez pas de justifier (brièvement) vos réponses.

2.1 Quelles sont les composantes x et y du vecteur vitesse $\vec{v}_0$ à l'instant t=0 ?

$$\vec{v}_0 = v_0 \cos\alpha \, \vec{u}_x + v_0 \sin\alpha \, \vec{u}_y$$

$$= \boxed{(29,1 \ ; 18,9) \, m/s}.$$

2.2 Une des composantes de la vitesse $\vec{v}(t)$ ne change pas au cours du temps. Laquelle et pourquoi ?

La composante selon $\boxed{x}$ est invariante car la seule force extérieure appliquée est le poids, dirigé selon l'axe y. Par la 2e loi de Newton, l'accélération en x est donc nulle et la vitesse selon cet axe est constante.

2.3 Quelles sont les composantes du vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ lorsque Maddison à traversé le canal de Corinthe, et que sa trajectoire recroise l'axe Ox (à droite sur la chronophotographie) ?

La trajectoire est parabolique (MRUA en y, MRU en x) et donc symétrique. L'angle formé par le vecteur vitesse par rapport à l'axe x à la fin de la trajectoire sera donc $-\alpha$, et le module de la vitesse sera le même qu'au début de la trajectoire. $\Rightarrow \vec{v}(t) = v_0 \cos\alpha \, \vec{u}_x - v_0 \sin\alpha \, \vec{u}_y = \boxed{(29,1\,; -18,9)\,\mathrm{m/s}}$.

2.4 Quelle est la hauteur maximale au-dessus de l'axe Ox atteinte par Maddison ?

Écrivons les équations du mouvement (MRU en x, MRUA en y) :

$$\begin{cases} y(t) = v_0 \sin\alpha \cdot t - \dfrac{g t^2}{2} \\ v_y(t) = v_0 \sin\alpha - g t \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha \cdot t \\ v_x(t) = v_0 \cos\alpha \end{cases}$$

La hauteur est maximale lorsque $\frac{dy}{dt} = 0 \Leftrightarrow v_y = 0$.

$$\Rightarrow v_0 \sin\alpha - g t = 0 \quad \Rightarrow t = \frac{v_0}{g} \sin\alpha .$$

En remplaçant dans l'expression de $y(t)$, on trouve donc la hauteur maximale :

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} - \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = \boxed{18,2\ \mathrm{m}} .$$

2.5 Quelle est la distance horizontale parcourue par Maddison durant son saut ?

La distance horizontale parcourue est la distance pour laquelle la position verticale revient à 0.

$$\Rightarrow \quad 0 = v_0 \sin\alpha \, t - g\frac{t^2}{2}$$

↳ Une première solution est $\underline{t=0}$ ⇝ à rejeter (correspond à la position initiale).

Si $t \neq 0$:

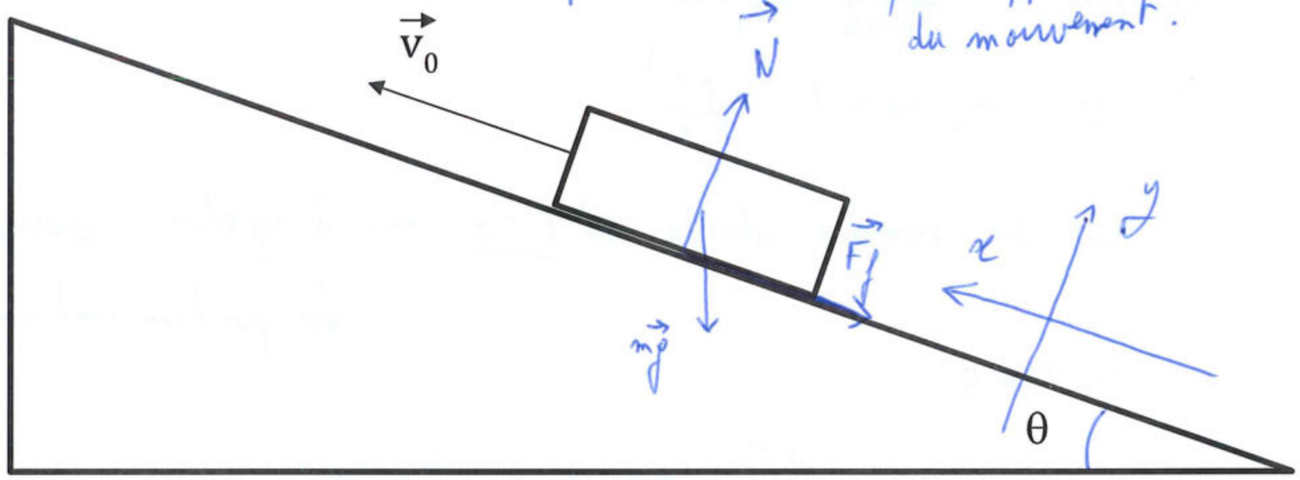
$$0 = v_0 \sin\alpha - g\frac{t}{2} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g} .$$

En remplaçant dans l'expression de $x(t)$, on trouve la distance horizontale parcourue d :

$$x(t) = d = v_0 \cos\alpha \cdot \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha) = \boxed{112 \text{ m}} .$$

$\vec{mg}$ ≡ poids
$\vec{N}$ ≡ réaction normale à la surface
$\vec{F_f}$ ≡ force de frottement dynamique (car mouvement), qui s'oppose au sens du mouvement.

Question 3 (10 points)



Soit un bloc de masse m sur un plan incliné d'angle θ. À l'instant initial t=0 on fournit une vitesse initiale v_0 au bloc, vers le haut du plan incliné. Le bloc va monter la pente jusqu'à l'instant t=T quand sa vitesse sera nulle.

Attention : Les réponses aux questions 3.2 à 3.5 seront formulées en fonction d'un ou de plusieurs paramètres de l'énoncé m , θ , v_0 , ainsi que des coefficients de frottements statique μ_S et dynamique μ_D.

3.1 Représenter sur le dessin les forces agissant sur le bloc à l'instant t=0.

3.2 Donner la norme de ces forces durant l'intervalle $T > t \geq 0$ pendant laquelle le bloc est en mouvement vers le haut.

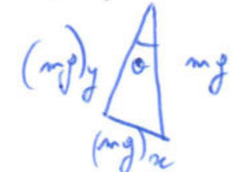
2^e loi de Newton : $\vec{mg} + \vec{N} + \vec{F_f} = m\vec{a}$. (1)

On choisit un système d'axes (x,y) – cf schéma. (Rmq : ici, on a choisi l'axe x dans le sens du mouvement.)

Projection de (1) sur l'axe x : $-mg\sin\theta - F_f = -ma$ (2)

($F_f \equiv |\vec{F_f}|$, $a \equiv |\vec{a}|$) En effet, l'accélération est dirigée vers le bas de la pente.

Pour la projection de $\vec{mg}$, on a utilisé le triangle rectangle :



Projection de (1) sur l'axe y : $N - mg\cos\theta = 0 \Rightarrow |\vec{N}| = \boxed{N = mg\cos\theta}$.

De plus, on sait que $F_f = \mu_D \cdot N$ (frottement dynamique).

$$\Rightarrow \boxed{F_f = \mu_D mg\cos\theta}.$$

3.3 Le bloc va monter jusqu'à une hauteur maximale h. Quel est le temps T mis pour atteindre cette hauteur maximale ?

On injecte l'expression de F_f dans (2) $\Rightarrow mg\sin\theta + \mu_D mg\cos\theta = ma$.

$\Rightarrow a = g(\sin\theta + \mu_D\cos\theta)$, constante selon l'axe x.

$\Rightarrow$ Le bloc est en MRUAV. L'accélération s'oppose à la vitesse initiale $\vec{v}_0$.

$\Rightarrow v(t) = v_0 - at$. En particulier, à $t = T$, la hauteur est maximale et $v(T) = 0$.

$\Rightarrow v_0 - aT = 0 \Rightarrow T = \frac{v_0}{a}$.

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{v_0}{g(\sin\theta + \mu_D\cos\theta)}}.$$

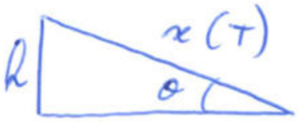
3.4 Quelle est la hauteur maximale h? Attention : la hauteur est mesurée dans la direction verticale !

Écrivons l'équation du mouvement selon l'axe x (c'est un MRUA):

$x(t) = v_0 \cdot t - \frac{a t^2}{2}$. (En posant $x(0) \equiv 0$).

$$\Rightarrow x(T) = v_0 T - \frac{a T^2}{2} = v_0 \cdot \frac{v_0}{g(\sin\theta + \mu_D \cos\theta)} - \frac{g(\sin\theta + \mu_D\cos\theta)}{2} \cdot \frac{v_0^2}{\left(g(\sin\theta + \mu_D \cos\theta)\right)^2}$$

$\Rightarrow x(T) = \frac{v_0^2}{2g(\sin\theta + \mu_D\cos\theta)}$. Pour trouver la hauteur h, on utilise le triangle rectangle :



$\rightarrow \sin\theta = \frac{h}{x(T)}$

$$\Rightarrow h = x(T) \sin\theta = \boxed{\frac{v_0^2}{2g\left(1 + \frac{\mu_D}{\tan\theta}\right)}}.$$

3.5 Quelle est l'énergie dissipée par la force de frottement au cours du mouvement (entre l'instant initial t=0 et le l'instant t=T où le bloc atteint sa hauteur maximale) ?

Première méthode :

- À $t=0$, l'énergie mécanique est égale à l'énergie cinétique :

$$E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 .$$

- À $t=T$, l'énergie mécanique est égale à l'énergie potentielle puisque la vitesse est nulle :

$$E_T = m g h = \frac{m v_0^2}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\mu_D}{\tan\theta}} < \frac{m v_0^2}{2} \Rightarrow E_T < E_0 .$$

L'énergie dissipée par la force de frottement est donc la différence d'énergie mécanique entre $t=0$ et $t=T$:

$$E_{diss} = E_0 - E_T = \frac{m v_0^2}{2}\left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\mu_D}{\tan\theta}}\right) = \frac{m v_0^2}{2} \cdot \left(\frac{\frac{\mu_D}{\tan\theta}}{1 + \frac{\mu_D}{\tan\theta}}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{E_{diss} = \frac{m v_0^2}{2} \cdot \frac{\mu_D}{\mu_D + \tan\theta}} .$$

Deuxième méthode : On calcule directement le travail de $\vec{F}_f$ pendant tout le mouvement. L'énergie dissipée par $\vec{F}_f$ est l'opposé de ce travail.

$$W = \int_{\text{pente}} \vec{F}_f \cdot d\vec{l} = \vec{F}_f \cdot \vec{d}$$

($\vec{F}_f$ est constante ; $\vec{d} \equiv x(T)\,\vec{u}_x$ est le déplacement total)

$$= -F_f \cdot x(T).$$

$$= -\mu_D mg\cos\theta \cdot \frac{v_0^2}{2g(\sin\theta + \mu_D\cos\theta)}$$

$$= \frac{-\mu_D}{2(\tan\theta + \mu_D)}\, m v_0^2 .$$

$$\Rightarrow E_{diss} = -W = \boxed{\frac{m v_0^2}{2} \cdot \frac{\mu_D}{\tan\theta + \mu_D}}.$$

Examen de Physique Générale – PHYS-F110

Partie Théorie

Année 2019-2020 - Examen de janvier 2020

Nom :

Prénom :

N° de carte d'étudiant :

Section (entourer) : Chimie — Math-Bio — Math-Ph — Physique — Polyvalente

---

Consignes générales :

1. Écrivez immédiatement vos prénom, nom, numéro de carte d'étudiant et section.
2. Vérifiez que votre énoncé comporte bien **6 feuilles** (4 questions).
3. **Ne répondez qu'aux questions qui concernent votre section.**
4. Ne dégrafez pas les pages.
5. Les GSM, tablettes, smartwatches et autres moyens de communication sont interdits. Ils doivent être éteints et rangés dans les sacs le long du mur. En aucun cas vous ne pouvez avoir un GSM (ou autre moyen de communication) à portée de main, même éteint.
6. Vous n'avez pas droit à un aide-mémoire ou à une calculatrice.
7. Ne répondez pas en rouge, cette couleur étant réservée pour la correction.
8. **Les réponses doivent toutes être clairement justifiées. Définissez soigneusement toutes les grandeurs que vous utilisez.**
9. L'examen dure **1h15 (75 minutes)**.

Bon travail !

Q1 /5	Q2 /10	Q3 /10	Q4 /10

1. **(Toutes sections sauf Math-bio — 5 points) :**

   Définissez la poussée d'Archimède. Faites un schéma pour illustrer votre définition.

2. (Toutes sections — 10 points) :

Soit un système constitué de 2 particules de masses m_1, m_2 différentes ($m_1 \neq m_2$).

a) Est-il possible d'imaginer une situation dans laquelle l'énergie cinétique du système n'est pas nulle alors que sa quantité de mouvement est nulle ? Si oui, donnez un exemple et justifiez-le. Si non, expliquez pourquoi c'est impossible.

b) Est-il possible d'imaginer une situation dans laquelle le centre de masse du système est immobile, alors que son moment angulaire par rapport au centre de masse est non nul. Si oui, donnez un exemple et justifiez-le. Si non, expliquez pourquoi c'est impossible.

3. (Toutes sections — 10 points) :

Considérons une particule ponctuelle de masse m qui se meut dans l'espace à 3 dimensions, selon une trajectoire $\vec{x}(t)$, soumise à une force $\vec{F}(\vec{x}, t)$. À l'instant $t = t_0$ elle se trouve à la position $\vec{x}_0$, et à l'instant $t = t_1 > t_0$, elle se trouve à la position $\vec{x}_1$.

a) Définissez l'énergie cinétique de la particule à l'instant t.

b) Définissez le travail W effectué par la force $\vec{F}$ entre les instants $t = t_0$ et $t = t_1$.

c) Énoncez et démontrez le théorème de l'énergie cinétique pour cette particule ponctuelle. Faites particulièrement attention aux notations utilisées et aux étapes du calcul : toute expression incohérente mathématiquement sera sanctionnée.

4. (Toutes sections — 10 points) :

Soit un solide indéformable possédant un axe de symétrie, en rotation à la vitesse angulaire ω autour de cet axe.

Dans cette question, nous supposerons que ce solide est constitué de N points matériels A_i de masses m_i situés aux points $\vec{x}_i(t)$ de l'espace. Les points A_i sont animés d'une vitesse $\vec{v}_i(t)$ dans un référentiel inertiel $\mathcal{R}$.

Les forces internes sont telles que les distances entre les paires de points ne changent pas au cours du temps (définition du solide indéformable).

On supposera que le centre de masse du solide est immobile. On pourra prendre le centre de masse comme origine du référentiel inertiel $\mathcal{R}$. On peut montrer que, en vertu de la symétrie, le centre de masse est situé sur l'axe de rotation. Vous pouvez supposer ceci comme acquis.

Le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ est le vecteur dont la norme vaut ω, dont la direction est donnée par l'axe de rotation (qui coïncide ici avec l'axe de symétrie), et dont le sens est donné par la « règle du tire-bouchon / de la main droite ».

Notons $\vec{L}_{CM}$ le vecteur moment cinétique par rapport au centre de masse.

On peut montrer que

$$\vec{L}_{CM} = I\vec{\omega} \ . \tag{1}$$

a) Comment s'appelle le facteur de proportionnalité I ?

b) Faire un schéma sur lequel vous indiquerez l'axe de symétrie, le vecteur $\vec{\omega}$, et les positions et vitesses d'au moins 2 points matériels constituant ce corps solide, ces points matériels étant symétriques l'un de l'autre par rapport à l'axe de rotation.

c) Donner la définition de I, c'est-à-dire une formule permettant de calculer I.

d) Démontrer la relation (1). N'oubliez pas d'utiliser le fait que le solide possède un axe de symétrie.

Examen de Physique Générale – PHYS-F110

Partie Exercices

Année 2019-2020 - Examen de janvier 2020

Nom :

Prénom :

N° de carte d'étudiant :

Section (entourer) : Chimie — Math-Bio — Math-Ph — Physique — Polyvalente

---

Consignes générales :

1. Écrivez immédiatement vos prénom, nom, numéro de carte d'étudiant et section.
2. Vérifiez que votre énoncé comporte bien **10 feuilles** (5 questions).
3. **Ne répondez qu'aux questions qui concernent votre section.**
4. Ne dégrafez pas les pages.
5. Les GSM, tablettes, smartwatches et autres moyens de communication sont interdits. Ils doivent être éteints et rangés dans les sacs le long du mur. En aucun cas vous ne pouvez avoir un GSM (ou autre moyen de communication) à portée de main, même éteint.
6. Vous pouvez consulter votre aide mémoire (une feuille A4 recto-verso manuscrite). Celui-ci doit porter votre nom et ne peut pas être prêté.
7. Les calculatrices ne peuvent pas être prêtées.
8. Ne répondez pas en rouge, cette couleur étant réservée pour la correction.
9. **Les réponses doivent toutes être clairement justifiées et les unités doivent être indiquées pour les résultats numériques.**
10. En cas de besoin, vous prendrez les valeurs de constantes suivantes :
    - Accélération de la pesanteur à la surface de la Terre : $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$;
11. L'examen dure **2h (120 minutes)**.

Bon travail !

CORRECTIF

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5
/4	/7	/10	/10	/4

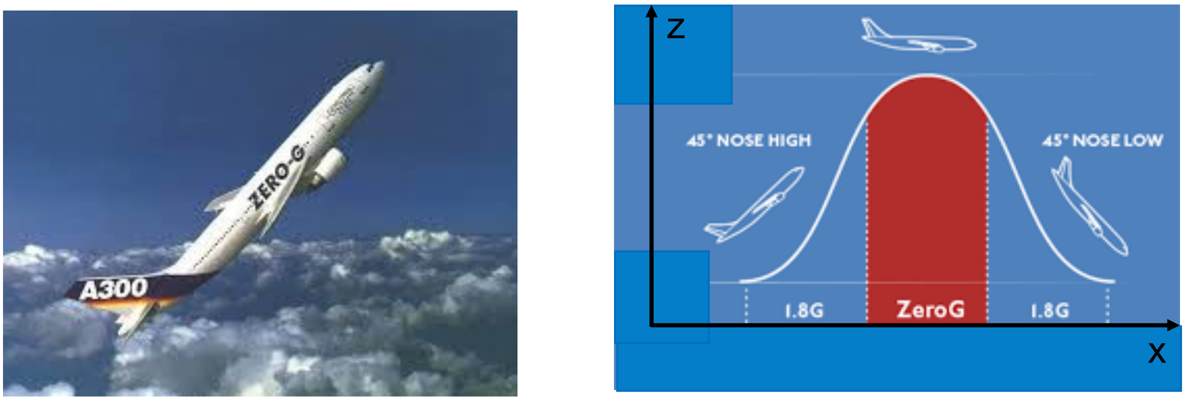


Fig. 1 – À gauche : avion au début d'un vol parabolique. À droite : schéma de la trajectoire lors d'un vol parabolique.

1. (Toutes sections — 4 points) :

Le principe du vol parabolique est pour un avion de reproduire pendant une durée aussi longue que possible une trajectoire la plus proche possible de la parabole décrite par un objet en chute libre, afin que les objets situés à l'intérieur de l'avion soient en état d'apesanteur.

Dans une expérience typique (voir le schéma), après un vol horizontal, il y a une phase de propulsion vers le haut durant laquelle les passagers ressentent une accélération d'environ $1{,}8\,g$ (où g est l'accélération de la pesanteur) ; ensuite la phase de vol parabolique dans laquelle les passagers ressentent une accélération très proche de $0\,g$ (en pratique on atteint approximativement $0{,}01\,g$) ; et finalement une phase de retour vers le vol horizontal durant laquelle les passagers ressentent de nouveau une accélération de $1{,}8\,g$.

Lors d'un vol typique, lorsque commence la trajectoire parabolique (début de la phase à $0\,g$), l'avion a une vitesse dont la norme est $530\,\mathrm{km/h}$, et il vole avec une inclinaison de 45° par rapport à l'horizontale. Le vol parabolique finit lorsque l'inclinaison atteint $-45°$ par rapport à l'horizontale.

Déterminer la durée pendant laquelle l'état d'apesanteur est maintenu.

Réponse : *Pendant la phase de vol parabolique, l'avion suit la même trajectoire qu'aurait eu un objet en chute libre : autrement dit, il a une accélération $\vec{a} = g\,(-\vec{u}_z)$, dirigée vers le bas. À cause de ceci, les passagers, qui suivent le mouvement de l'avion, ressentent la même chose que dans une chute libre.*

L'avion fait initialement un angle de 45° avec l'horizontale. Cela signifie que sa vitesse initiale vaut $\vec{v}_0 = v_0\,(\cos 45°\,\vec{u}_x + \sin 45°\,\vec{u}_z) = v_0\left(\frac{\vec{u}_x}{\sqrt{2}} + \frac{\vec{u}_z}{\sqrt{2}}\right)$, où $v_0 = 530\,\mathrm{km/h}$.

On recherche le temps T pour que l'inclinaison soit de $-45°$. À ce moment, la vitesse vaut $v(T) = v_0\left(\frac{\vec{u}_x}{\sqrt{2}} - \frac{\vec{u}_z}{\sqrt{2}}\right)$, puisque la composante x est constante (pas d'accélération selon x) et la trajectoire est parabolique (donc symétrique). Puisque le mouvement est un MRUA selon z, on peut donc écrire l'équation :

$$v_z(T) = v_{0z} - gT = -v_{0z} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2v_{0z}}{g} = \frac{\sqrt{2}v_0}{g} = \boxed{21{,}2\,\mathrm{s}}.$$

Erreurs fréquentes :

- *La difficulté principale de cette question résidait dans la modélisation de la trajectoire. Beaucoup d'étudiants n'ont pas su comment traiter le problème, par manque de visualisation de la trajectoire.*
- *De même, certains ont essayé de décrire la phase de propulsion alors que ce n'était pas nécessaire, ou ont utilisé la valeur de $0{,}01\,g$ (en se mettant dans le référentiel des passagers, mais en oubliant de changer de référentiel pour utiliser les expressions de la vitesse).*

2. (Toutes sections — 7 points) :

Une barre de fer de section variable et de longueur 2 m a une masse linéique dont la dépendance en la position peut être approximée par l'expression :

$$\lambda(x) = a + bx + cx^2 \tag{1}$$

pour $0 \leq x \leq 2$ m, avec $a = 0{,}3\,\mathrm{kg/m}$, $b = 0{,}1\,\mathrm{kg/m^2}$, $c = -0{,}06\,\mathrm{kg/m^3}$. (Notez la valeur négative du coefficient c.)

a) Une masse linéique ne peut jamais être négative. Montrer que $\lambda(x)$ est positive pour $0 \leq x \leq 2\,\mathrm{m}$.

b) Quelle est la masse de la barre ?

c) Quelle est la position x_{CM} du centre de masse de la barre ?

Réponse :

a) Il faut vérifier que $\lambda(x) > 0 \ \forall x \in [0, l]$ *(où* $l \equiv 2\,\mathrm{m}$*). Pour ce faire, remarquons d'abord que les deux valeurs aux limites du domaine sont positives :* $\lambda(0) = a > 0$ *et* $\lambda(l) = 0{,}06\,\mathrm{kg/m} > 0$*. Il reste à calculer les racines : si elles sont situées en dehors de l'intervalle* $[0, l]$*, c'est que* $\lambda(x)$ *ne devient négative qu'en dehors de cet intervalle, ce qui est ce qu'on veut montrer. En résolvant l'équation du second degré, les racines sont en*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} = -1{,}55\,\mathrm{m} \ \textit{ou} \ 3{,}22\,\mathrm{m}.$$

Comme ces deux valeurs sont en dehors de l'intervalle, on en déduit que $\lambda(x)$ *est bien positive sur toute la barre.*

b) La masse est l'intégrale de la masse linéique sur toute la barre. Notez que la paramétrisation de l'élément de longueur $\mathrm{d}\ell$ *est évidente ici (*$\mathrm{d}\ell = \mathrm{d}x$*,* x *prenant des valeurs entre* 0 *et* l*) car on paramétrise une ligne droite. Le calcul donne donc :*

$$m = \int_{barre} \lambda(x)\,\mathrm{d}\ell = \int_0^l \lambda(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^l (a + bx + cx^2)\,\mathrm{d}x = al + b\,\frac{l^2}{2} + c\,\frac{l^3}{3} = \boxed{0{,}64\,\mathrm{kg}}.$$

c) On utilise la même paramétrisation qu'au point précédent. À partir de la définition du centre de masse d'un objet ayant une répartition continue linéique de masse, on obtient :

$$x_{CM} = \frac{1}{m}\int_{barre} \lambda(x)\,x\,\mathrm{d}\ell = \frac{1}{m}\int_0^l (ax + bx^2 + cx^3)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{m}\left(a\,\frac{l^2}{2} + b\,\frac{l^3}{3} + c\,\frac{l^4}{4}\right) = \boxed{0{,}98\,\mathrm{m}}.$$

Erreurs fréquentes :

- *Beaucoup de réponses n'étaient pas assez rigoureuses pour la première sous-question, en ne prenant que quelques valeurs sur l'intervalle plutôt que de calculer les racines et de regarder les valeurs aux bords.*
- *Beaucoup de personnes ont mal modélisé l'intégrale, notamment en confondant la variable d'intégration et les bornes, ou en oubliant carrément de préciser les bornes. Rappelons que ces grandeurs se calculent par des intégrales définies et pas des primitives !*
- *On se rend compte que la notion même d'intégrale n'est pas assez maîtrisée, autant au niveau du concept (une somme d'éléments infinitésimaux) qu'au niveau du calcul. Cela se manifeste par beaucoup de réponses qui contiennent uniquement la formule générale (probablement recopiée d'un rappel de TP) sans la particulariser à la situation physique (une barre de longueur* l*, etc).*

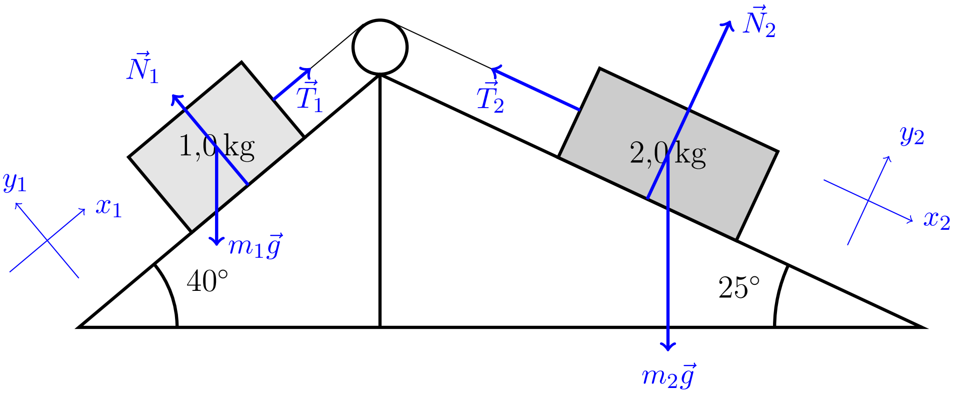


Fig. 2 – Deux blocs sur deux plans inclinés, reliés par une poulie.

3. (Toutes sections — 10 points) :

Considérons deux masses de 1,0 kg et 2,0 kg reliées par un câble inextensible passant par une poulie, et posées sur deux plans inclinés à 40° et 25° respectivement (voir schéma).

Initialement les masses sont immobiles.

On négligera tous les frottements. Le câble est supposé avoir une masse négligeable.

a) Lorsqu'on lâche le système sans vitesse initiale, celui-ci se met en mouvement. Dans quel sens le déplacement se fait-il (c'est-à-dire quel bloc monte et quel bloc descend) ? Justifiez votre réponse.

b) Si on néglige la masse de la poulie, quelle sera l'accélération a des masses ?

c) Tenons compte maintenant de la masse de la poulie. On suppose qu'elle a un moment d'inertie $I = 5 \times 10^{-4}\,\text{kg}\,\text{m}^2$ et un rayon de $R = 5\,\text{cm}$. On supposera que le câble ne glisse pas au contact de la poulie.
Déterminer un système d'équations permettant de trouver la tension T_1 dans la partie du câble entre la masse de 1kg et la poulie, la tension T_2 dans la partie du câble entre la masse de 2,0 kg et la poulie, et l'accélération a des masses.

d) Résoudre les équations obtenues au point c) et déterminer l'accélération a des masses.

Réponse : *Pour des raisons pratiques et pédagogiques, on préfèrera répondre d'abord au point b) avant le point a).*

b) Puisqu'on néglige la masse de la poulie, on néglige son moment d'inertie (qui est proportionnel à la masse). Cela implique que la tension est la même partout dans le câble.

Commençons par représenter les forces en présence sur chacune des deux masses :

- *Sur la masse* $m_1 \equiv 1{,}0\,\text{kg}$, *on a trois forces : le poids* $m_1\vec{g}$, *dirigé vers le bas, la réaction normale à la surface* $\vec{N}_1$ *perpendiculaire à la surface, et la tension dans le câble* $\vec{T}_1$ *dirigée selon le câble.*
- *De façon similaire, sur la masse* $m_2 \equiv 2{,}0\,\text{kg}$, *on a aussi trois forces :* $m_2\vec{g}$, $\vec{N}_2$ *et* $\vec{T}_2$.

On reporte ces forces sur le schéma. Comme expliqué plus haut, les normes des tensions sont égales : $\left|\vec{T}_1\right| \equiv T_1 = T_2 \equiv \left|\vec{T}_2\right|$ *(mais* $\vec{T}_1 \neq \vec{T}_2$ *!). De plus, comme les deux masses bougent ensemble (reliées par un câble inextensible), la norme de leur accélération est la même :* $a_1 = a_2$.

Écrivons la deuxième loi de Newton pour chacune des deux masses :

$$\begin{cases} m_1\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{N}_1 &= m_1\vec{a}_1 \\ m_2\vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{N}_2 &= m_2\vec{a}_2 \end{cases}$$

Projetons chacune de ces équations sur un axe dirigé dans le sens de la pente, vers la droite. On fait le choix de ce système d'axes car il permet de ne devoir regarder qu'une seule projection, puisqu'on n'a pas besoin de l'autre (puisqu'on néglige les frottements, on n'a pas besoin de connaître la force normale). Notez que le système d'axes n'est pas le même pour les deux masses, mais ce n'est pas un problème puisqu'on exprime le système uniquement en termes des normes des deux forces.

$$\begin{cases} -m_1 g \sin\theta_1 + T &= m_1 a \\ \quad m_2 g \sin\theta_2 - T &= m_2 a \end{cases}$$

On a appelé $\theta_1 \equiv 40°$ et $\theta_2 \equiv 25°$. On a noté a l'accélération des deux masses, en faisant la supposition qu'elle est dirigée vers la droite (c'est-à-dire que m_1 monte et m_2 descend). Si on trouve un signe négatif pour a, c'est que cette supposition n'était pas vraie et qu'on devra réécrire le système avec $-a$ à la place de a.

On a un système de deux équations à deux inconnues : T et a. On le résout en commençant par isoler T dans l'une des deux équations, par exemple la première :

$$T = m_1\,(a + g\sin\theta_1).$$

En remplaçant dans la deuxième équation, on trouve :

$$m_2 g \sin\theta_2 - m_1\,(a + g\sin\theta_1) = m_2 a.$$

Après simplifications, cela donne :

$$a = g\left(\frac{m_2\sin\theta_2 - m_1\sin\theta_1}{m_1 + m_2}\right) = \boxed{0{,}66\,\mathrm{m/s^2}}.$$

a) *Puisque le signe trouvé à la réponse précédente est positif, cela signifie que notre supposition était correcte et que le déplacement se fait vers la droite.*

c) *Les équations vectorielles écrites plus haut restent valables. Cependant, cette fois, les tensions ne sont plus égales à gauche et à droite de la poulie ($T_1 \neq T_2$). La projection sur le même système d'axes qu'au point b) donne donc :*

$$\begin{cases} -m_1 g \sin\theta_1 + T_1 &= m_1 a \\ \quad m_2 g \sin\theta_2 - T_2 &= m_2 a \end{cases}$$

On a donc deux équations, mais trois inconnues (a, T_1 et T_2) : il faut une équation supplémentaire. On va utiliser l'équation pour la somme des moments de force s'exerçant sur la poulie. Il y a 4 forces s'exerçant sur la poulie : les tensions dans les cordes à gauche et à droite $-\vec{T}_1$ et $-\vec{T}_2$ (par principe d'action-réaction), son poids $m_p\vec{g}$, et une force de réaction du support de la poulie $\vec{F}_R$ qui permet de la maintenir droite. Les moments de ces deux dernières forces par rapport au centre de la poulie sont nuls (car ces deux forces s'appliquent au centre de la poulie). On a donc, en termes de l'accélération angulaire de la poulie $\vec{\gamma}$:

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{-\vec{T}_1}} + \overrightarrow{\mathcal{M}_{-\vec{T}_2}} = I\vec{\gamma}.$$

Calculons les moments de force : en utilisant la règle de la main droite pour déterminer la direction, on a :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{-\vec{T}_1}} = RT_1\vec{u}_z,$$

où l'axe z sort de la feuille. De façon similaire, on a :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{-\vec{T}_2}} = -RT_2\vec{u}_z.$$

Remarquons que puisque le système se déplace vers la droite, l'accélération angulaire de la poulie est dirigée selon un axe entrant dans la feuille : $\vec{\gamma} = -\gamma\vec{u}_z$. Comme le *câble ne glisse pas au contact de la poulie, la poulie a la même accélération que le reste du système et on peut relier l'accélération à l'accélération angulaire par $\gamma = a/R$. On a donc :*

$$RT_1\vec{u}_z - RT_2\vec{u}_z = -I\frac{a}{R}\vec{u}_z \quad \Rightarrow \quad T_1 - T_2 = -I\frac{a}{R^2}.$$

En combinant, on a le système de trois équations demandé, en termes des trois inconnues T_1, T_2 et a :

$$\begin{cases} -m_1 g\sin\theta_1 + T_1 & = m_1 a \\ m_2 g\sin\theta_2 - T_2 & = m_2 a \\ T_1 - T_2 & = -I\frac{a}{R^2} \end{cases}$$

d) *Pour résoudre ce système, on remarque qu'on peut éliminer les inconnues T_1 et T_2 en soustrayant les deux premières équations de la dernière :*

$$m_1 g\sin\theta_1 - m_2 g\sin\theta_2 = -I\frac{a}{R^2} - m_1 a - m_2 a$$

$$\Rightarrow \quad a\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right) = g\,(m_2\sin\theta_2 - m_1\sin\theta_1)$$

$$\Rightarrow \quad a = g\,\frac{m_2\sin\theta_2 - m_1\sin\theta_1}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} = \boxed{0{,}62\,\mathrm{m/s^2}}.$$

Erreurs fréquentes :

- *Beaucoup d'erreurs dès le début de la résolution, dans la modélisation du problème : des personnes indiquent une "force motrice" vers la droite, qui n'a aucune origine physique, oublient des forces, ou se trompent de direction pour certaines forces.*
- *Un certain nombre de personnes ont cru la situation statique, ou n'ont pas remarqué que les normes des accélérations des deux masses étaient identiques.*
- *La deuxième loi de Newton n'est souvent pas écrite correctement : beaucoup écrivent des "projections" sans savoir quelle équation ils projettent. Il est important de toujours d'abord identifier la loi physique, vectorielle dans ce cas, et d'employer un raisonnement systématique.*
- *On rencontre encore beaucoup de confusions entre vecteurs, normes, projections etc. Ces notions sont vues dans les premières séances de l'année et doivent être maîstrisées à ce stade.*
- *Beaucoup d'étudiants font l'erreur de considérer un seul système constitué des deux blocs. Le problème est que ce système n'est pas un corps rigide car les deux blocs ont un mouvement relatif entre eux. Les relations que l'on a vues au cours ne sont pas valables en général pour des corps non rigides.*
- *Même parmi les meilleures copies, une erreur fréquente est d'oublier de regarder la direction du vecteur accélération angulaire : beaucoup n'ont pas pensé à faire une projection et ont, probablement sans s'en rendre compte, supposé que ce vecteur était sortant. Cette erreur était cependant évitable en regardant la réponse finale : avec cette supposition, on aurait trouvé une accélération plus grande qu'au point b), ce qui n'est pas logique (intuitivement, on se doute qu'augmenter la masse de la poulie réduira l'accélération du système).*
- *Même parmi les meilleures copies, la résolution du système d'équations est souvent laborieuse. Il faut s'entraîner à avoir une méthode systématique de résolution, car beaucoup de problèmes physiques se ramènent à un système d'équations à résoudre.*

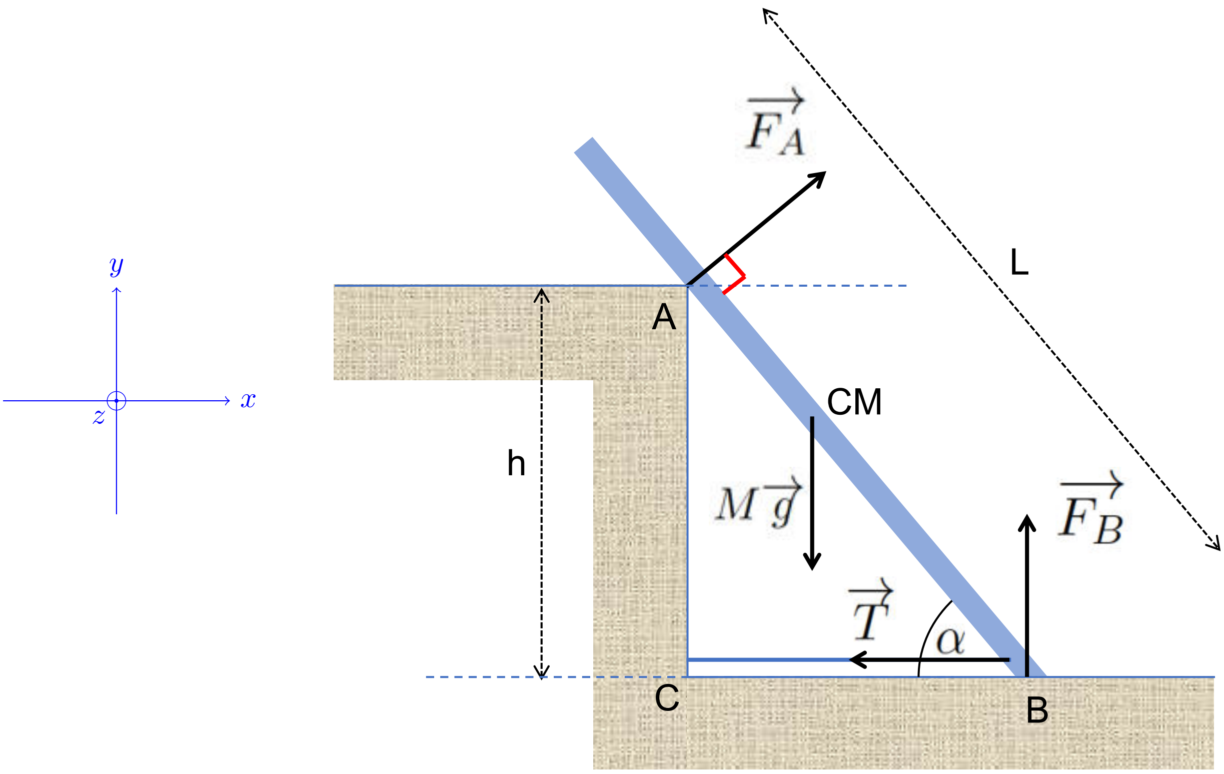


Fig. 3 – Une échelle posée contre un mur.

4. (Toutes sections — 10 points) :

Une échelle de longueur L et de masse M est adossée à un mur vertical au point A. Elle s'appuie sur le sol en B. Elle forme avec le sol horizontal un angle α $(0 < \alpha < \pi/2)$. Le point A est à une hauteur h du sol.

Les deux forces aux points de contact avec le mur et le sol sont notées $\overrightarrow{F_A}$ et $\overrightarrow{F_B}$ respectivement. On supposera que $\overrightarrow{F_B}$ est perpendiculaire au sol, et $\overrightarrow{F_A}$ perpendiculaire à l'échelle, comme indiqué sur la figure.

L'échelle est supposée homogène, et son centre de masse est donc au milieu de l'échelle.

Ces 3 forces seules ne peuvent pas réaliser l'équilibre. On a donc attaché la base B de l'échelle au bas du mur (au point C) par un câble dont la tension est $\overrightarrow{T}$.

Déterminer, en fonction des données de l'énoncé, les normes des forces $\overrightarrow{F_A}$, $\overrightarrow{F_B}$, et de la tension $\overrightarrow{T}$ dans le câble.

Réponse : *Comme on a trois inconnues (les normes des trois forces), on a besoin de trois équations. Deux de ces équations seront données par la deuxième loi de Newton* ($\sum \vec{F} = \vec{0}$ *car situation statique), projetée sur les axes* x *et* y *(représentés à côté de la figure), et la troisième sera donnée par l'équation pour la somme des moments de force* ($\sum \overrightarrow{\mathcal{M}} = \vec{0}$)*.*

Il y a 4 forces qui s'exercent sur le système qu'on considère, à savoir l'échelle : $\vec{F}_A$, $\vec{F}_B$, $M\vec{g}$ *et* $\vec{T}$*. La deuxième loi de Newton (pour exprimer que la situation est statique) s'écrit donc comme :*

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B + M\vec{g} + \vec{T} = \vec{0}. \tag{2}$$

Il faut projeter cette équation sur les axes x *et* y*. Cette projection est triviale, sauf pour la force* $\vec{F}_A$*, pour laquelle il faut déterminer l'angle fait avec l'horizontale. Comme l'angle formé à droite entre l'échelle et la surface horizontale est* α *(par construction) et que* $\vec{F}_A$ *est perpendiculaire à l'échelle, on a que cet angle vaut* $180° - \alpha - 90° = 90° - \alpha$*. La projection* *de (2) sur l'axe x donne donc :*

$$F_A \cos(90^\circ - \alpha) + 0 + 0 - T = 0 \quad \Rightarrow \quad F_A \sin\alpha = T. \tag{3}$$

De même, la projection selon y donne :

$$F_A \sin(90^\circ - \alpha) + F_B - Mg + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_A \cos\alpha + F_B = Mg. \tag{4}$$

*Regardons à présent les moments de force. Puisque la situation est statique, on peut choisir le point de référence pour calculer les moments : on choisit le point **B**, puisqu'il permet d'annuler deux inconnues (le moment de $\vec{T}$ et de $\vec{F}_B$ est nul puisque ces deux forces s'appliquent en B).*
Calculons le moment de force du poids $M\vec{g}$: la force s'exerce au milieu de l'échelle, à une distance $L/2$ du point B. L'angle formé entre le vecteur déplacement du point B au CM et le vecteur force est de $90^\circ - \alpha$. La norme du moment de force vaut donc $Mg\frac{L}{2}\sin(90^\circ - \alpha)$. Par la règle de la main droite, on trouve que ce moment de force est sortant (va en $+\vec{u}_z$).
Pour le moment de force de $\vec{F}_A$, il faut remarquer que la force s'applique à une distance $|AB|$ du point B, perpendiculairement. Cette distance $|AB|$ se trouve à l'aide du triangle rectangle ABC : on a que

$$\sin\alpha = \frac{|AC|}{|AB|} \quad \Rightarrow \quad |AB| = \frac{|AC|}{\sin\alpha} = \frac{h}{\sin\alpha}.$$

En utilisant également la règle de la main droite, on trouve que le moment de force de $\vec{F}_A$ vaut $F_A \frac{h}{\sin\alpha}(-\vec{u}_z)$.
Finalement, l'équation pour les moments de force donne :

$$Mg\frac{L}{2}\sin(90^\circ - \alpha) - F_A\frac{h}{\sin\alpha}\vec{u}_z = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{LMg}{2}\cos\alpha - F_A\frac{h}{\sin\alpha} = 0. \tag{5}$$

Les trois équations (3), (4) et (5) forment un système de trois équations à trois inconnues, qu'il nous suffit de résoudre. Tout d'abord, remarquons que l'équation (5) donne immédiatement :

$$\boxed{F_A = \frac{L}{2h} Mg \sin\theta\cos\theta}.$$

En remplaçant dans (3), on trouve :

$$\boxed{T = \frac{L}{2h} Mg \sin^2\theta\cos\theta}.$$

Finalement, en remplaçant ces deux résultats dans (4), on trouve :

$$\boxed{F_B = Mg\left(1 - \frac{L}{2h}\sin\alpha\cos^2\alpha\right)}.$$

Erreurs fréquentes :

- *Les mêmes difficultés fondamentales pour la question 3 se reportaient souvent sur la question 4 : lois physiques pas clairement exprimées, notions floues pour les composantes des vecteurs,...*
- *L'équation avec les moments de force est souvent oubliée, ou traitée de façon incorrecte. Il s'agit d'une matière importante, à bien travailler en séance.*
- *En particulier, beaucoup ne comprennent pas que le moment de force est vectoriel, et n'est pas compris dans le plan xy.*
- *On voit beaucoup d'erreurs (de distraction ?) sur les angles utilisés, lors des projections ou pour calculer les moments. En cas de doute, vérifiez toujours vos résultats avec des comportements limites (par exemple, si α devient nul, on s'attend à ce que $\vec{F}_A$ soit dirigé uniquement selon y).*
- *Une autre erreur fréquente est de mal identifier le bras de levier (distance au point d'application) pour la force $\vec{F}_A$: beaucoup d'étudiants ont pris L comme distance, ce qui n'est évidemment pas correct.*

Fig. 4 – Un manège.

5. (Toutes sections sauf Math-Bio — 4 points) :

Un manège (voir figure) de rayon $R = 3\,\mathrm{m}$ est libre de tourner autour de son axe.

À l'instant $t = 0$ le manège a une vitesse angulaire $\omega(t = 0) = 0{,}2\,\mathrm{rad/s}$ et sa vitesse angulaire diminue selon $\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}(t = 0) = -0{,}02\,\mathrm{rad/s}^2$.

Un enfant s'est mis au bord du manège. À l'instant $t = 0$, l'enfant lance une balle de masse $m = 100\,\mathrm{g}$ à un angle de 60° avec la tangente au cercle (voir dessin page suivante). Dans le référentiel du manège, la vitesse de la balle est $v = 3\,\mathrm{m/s}$.

Un observateur au centre du manège, qui tourne avec le manège, voit cette balle affectée par plusieurs « pseudo-forces » dont la résultante est donnée par l'expression :

$$\vec{F}_{ie} = -m\frac{d\overrightarrow{\omega(t)}}{dt} \times \overrightarrow{r(t)} - 2m\overrightarrow{\omega(t)} \times \overrightarrow{v(t)} - m\overrightarrow{\omega(t)} \times \left(\overrightarrow{\omega(t)} \times \overrightarrow{r(t)}\right), \tag{6}$$

où $\overrightarrow{r(t)}$ et $\overrightarrow{v(t)}$ sont les vecteurs position et vitesse de la balle tels que mesurés par l'observateur. Les 3 termes dans cette expression sont appelés « pseudo-force d'Euler », « pseudo-force de Coriolis », et « pseudo-force centrifuge ».

a) Donner la norme des 3 pseudo-forces de l'équation (6) à l'instant $t = 0$, juste après que le garçon a lancé la balle.

b) Choisir une échelle appropriée (par exemple —mais celle-ci n'est pas appropriée pour un dessin correct— 1N/mm) et représenter ces 3 pseudo-forces sur le dessin de la page suivante.

Réponse :

a) Calculons la norme des 3 pseudo-forces (sans s'occuper des directions pour le moment) :

- *Pseudo-force d'Euler* $-m\frac{d\overrightarrow{\omega(t)}}{dt} \times \overrightarrow{r(t)}$ *: comme* $\frac{d\overrightarrow{\omega(t)}}{dt}$ *est orienté selon l'axe* z *(voir système d'axes sur la figure), perpendiculaire à la feuille (selon l'axe de rotation du manège) et que* $\overrightarrow{r(t)}$ *est à tout instant dans le plan de la feuille,* $\frac{d\overrightarrow{\omega(t)}}{dt} \perp \overrightarrow{r(t)}$*. Le sinus de l'angle entre les deux vecteurs vaut donc 1. La norme du produit vectoriel vaut donc :*

$$\left|-m\frac{d\overrightarrow{\omega(t)}}{dt} \times \overrightarrow{r(t)}\right|_{t=0} = m\left|\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}(t = 0)\right| \cdot R \cdot 1 = \boxed{0{,}006\,\mathrm{N}}.$$

En effet, en $t = 0$, $r(0) = R\vec{u}_y$ *donc* $|r(0)| = R$.

- Pseudo-force de Coriolis $-2m\overrightarrow{\omega(t)} \times \overrightarrow{v(t)}$: de manière similaire à la pseudo-force d'Euler, $\overrightarrow{\omega(t)}$ est dirigé selon l'axe de rotation, dans la direction z, alors que la vitesse de la balle $\overrightarrow{v(t)}$ reste comprise dans le plan xy. Le sinus de l'angle entre les deux vecteurs vaut donc 1. La norme du produit vectoriel vaut donc :

$$\left|-2m\overrightarrow{\omega(t)} \times \overrightarrow{v(t)}\right|_{t=0} = 2m\omega(t=0)v \cdot 1 = \boxed{0{,}12\,\mathrm{N}}.$$

- Pseudo-force centrifuge $-m\overrightarrow{\omega(t)} \times \left(\overrightarrow{\omega(t)} \times \overrightarrow{r(t)}\right)$: une fois de plus, $\overrightarrow{\omega(t)} \perp \overrightarrow{r(t)}$; et évidemment $\left(\overrightarrow{\omega(t)} \times \overrightarrow{r(t)}\right) \perp \overrightarrow{\omega(t)}$ puisque le résultat d'un produit vectoriel entre deux vecteurs est perpendiculaire à chacun de ces vecteurs. Le sinus de l'angle pour chaque produit vectoriel vaut donc 1 et la norme du produit vectoriel est donnée par le produit des normes :

$$\left|-m\overrightarrow{\omega(t)} \times \left(\overrightarrow{\omega(t)} \times \overrightarrow{r(t)}\right)\right|_{t=0} = m\omega^2(t=0)R \cdot 1 = \boxed{0{,}012\,\mathrm{N}}.$$

b) Pour représenter les forces, il faut trouver leur direction par la règle de la main droite.

- Pseudo-force d'Euler : en $t = 0$, ω va en $-\vec{u}_z$ puisque le manège tourne dans le sens horlogique. L'accélération angulaire $\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$ lui est opposée (signe $-$) et va donc en $+\vec{u}_z$. Par la règle de la main droite, le produit vectoriel $\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r}$ va selon $\vec{u}_z \times \vec{u}_y = -\vec{u}_x$. En prenant en compte le signe $-$ dans l'expression, la pseudo-force d'Euler va donc selon $+\vec{u}_x$.
- Pseudo-force de Coriolis : on sait immédiatement que cette pseudo-force sera perpendiculaire à $\vec{v}$ et dans le plan xy ; il reste à déterminer si elle va vers la gauche ou vers la droite. Par la règle de la main droite, un raisonnement similaire au point précédent permet de se convaincre que la pseudo-force sera dirigée vers la gauche.
- Pseudo-force centrifuge : la direction est en

$$-\left((-\vec{u}_z) \times ((-\vec{u}_z) \times \vec{u}_y)\right) = \vec{u}_z \times \vec{u}_x = \vec{u}_y.$$

Les forces sont représentées en rouge sur la figure 5, avec le choix d'échelle
$1\,\mathrm{cm} \leftrightarrow 0{,}012\,\mathrm{N}$.

Erreurs fréquentes :

- Le but de cette question était de tester si vous étiez capables d'utiliser des relations données pour une application particulière. Aucune relation physique n'était requise en dehors de celle donnée dans l'énoncé. Beaucoup d'étudiants n'ont pas su comment répondre à cette question, se bloquant sur la réputation "difficile" de cette partie du cours, alors que tous les éléments pour répondre étaient dans l'énoncé.
- Les produits vectoriels ne sont souvent pas bien maîtrisés. Il fallait notamment remarquer que les vecteurs qui intervenaient dans les calculs étaient tous perpendiculaires.
- Une norme est positive ; attention à ne pas laisser des signes dans le calcul des normes.
- Il y a eu beaucoup d'erreurs dans les directions des pseudo-forces, notamment à cause de la direction de la vitesse angulaire qui n'a pas toujours été correctement modélisée.

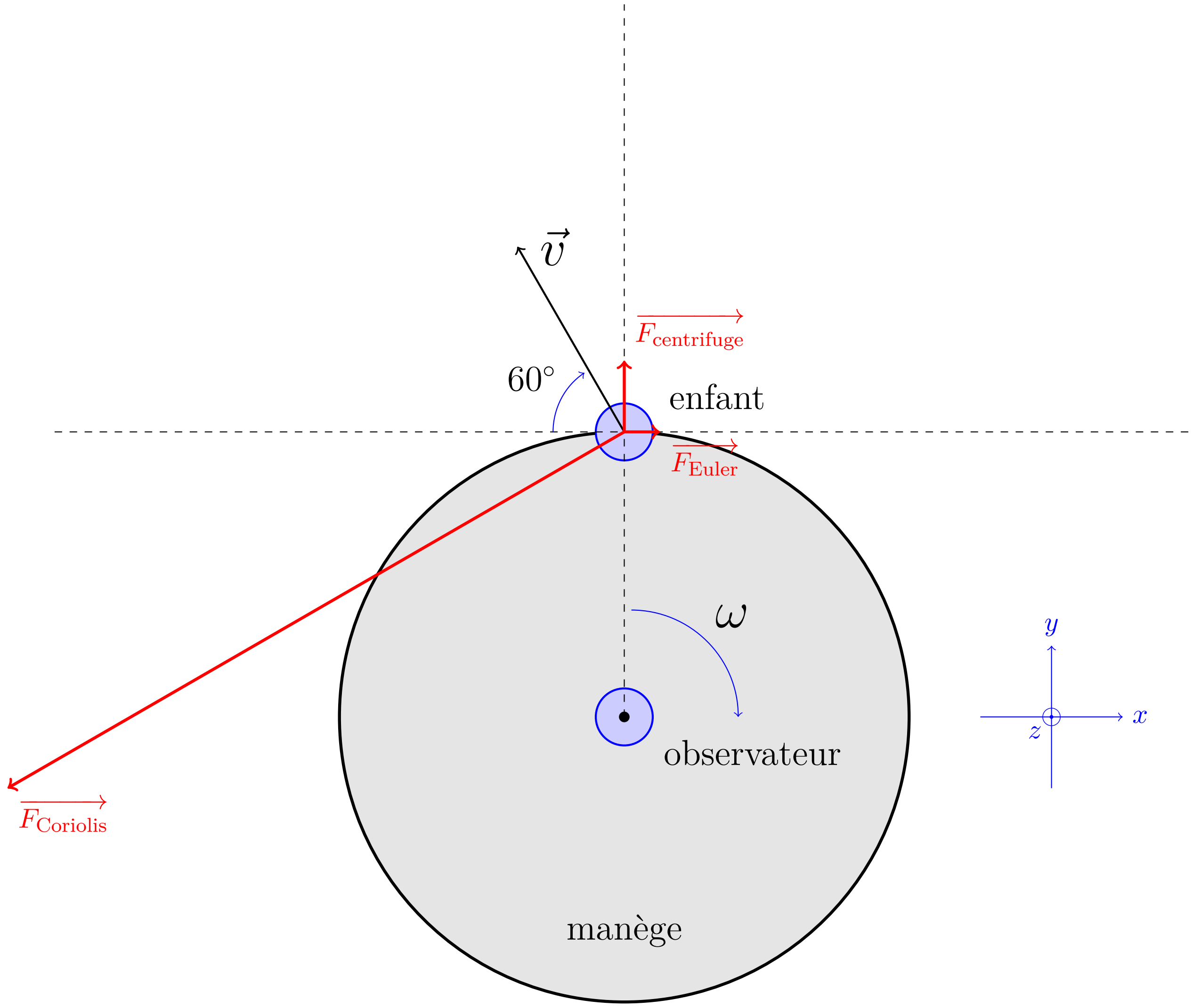


Fig. 5 – Enfant au bord d'un manège en rotation ayant lancé une balle à un angle de 60° de la tangente au manège.

Th. 1 : /3	Th. 2 : /3	Ex. 1 : /4	Ex. 2 : /5	Ex. 3 : /5	Total : /20

INTERRO DU 30 OCTOBRE 2020

Durée : 2 heures

Nom :

Prénom :

N° de carte d'étudiant :

Section (entourer) : Chimie — Math-Bio — Math-Ph — Physique — Polyvalente

Consignes générales :

1. Ecrivez immédiatement vos prénom, nom, numéro de carte d'étudiant et section.
2. Vérifiez que votre énoncé comporte bien **6 feuilles** (5 questions).
3. Ne répondez qu'aux questions qui concernent votre section. (NB : pour cette interro : les questions concernent toutes les sections)
4. Ne dégrafez pas les pages.
5. Les GSM, tablettes, smartwatches et autres moyens de communication sont interdits. Ils doivent être éteints et rangés dans les sacs le long du mur. En aucun cas vous ne pouvez avoir un GSM (ou autre moyen de communication) à portée de main, même éteint.
6. Les calculatrices ne peuvent pas être prêtées.
7. Ne répondez pas en rouge, cette couleur étant réservée pour la correction.
8. **Les réponses doivent toutes être clairement justifiées et les unités doivent être indiquées pour les résultats numériques.**
9. En cas de besoin, vous prendrez les valeurs de constantes suivantes :
   — Accélération de la pesanteur à la surface de la Terre : $g = 9.81$ m s^{-2}
   — Constante de la gravitation universelle : $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}
10. L'examen dure **2h (120 minutes)**.

Bon travail !

Théorie 1 (Toutes sections - 3 points)

1) Ecrire l'expression des vecteurs de base (vecteurs unitaires $\vec{u}_\rho$, $\vec{u}_\theta$) en coordonnées polaires, en fonction des vecteurs de base en coordonnées cartésiennes ($\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$). Inclure un schéma. (1 point)
2) En déduire l'expression de la dérivée par rapport au temps de $\vec{u}_\rho$ et de $\vec{u}_\theta$, en fonction de $\vec{u}_\rho$, $\vec{u}_\theta$ et la vitesse angulaire ω. (1 point)
3) A partir de l'expression des composantes du vecteur position $\vec{r}$ en coordonnées polaires, en déduire les expressions des composantes du vecteur vitesse $\vec{v}$ et du vecteur accélération $\vec{a}$ en coordonnées polaires. (1 point)

Corrigé :

1) Slide p 43
2) Slide p 43 (et éventuellement p 44)
3) Slide p 45 ou 48 (vitesse) et p48 (accélération)

Théorie 2 (Toutes sections - 3 points)

Montrez que l'énergie cinétique d'un système de particules i, $1 < i < n$, peut être décomposée en deux termes (2ème théorème de König). Expliquez ce que représentent ces deux termes. Inclure un schéma (3 points).

Corrigé :

Slide p 151
(ou Syllabus Chapitre VI, Section 6.4, p 10 et 11
ou Benson 1. Mécanique, p 358)

Exercice 1 (Toutes sections - 4 points)

Un projectile de masse m est lancé verticalement à partir de la surface de la Terre (masse M_T, rayon R_T). On néglige la rotation terrestre et la résistance de l'air.

1) Définissez la vitesse de libération v_{lib} et déterminez son expression algébrique (=littérale) à partir des données. (2 points)
2) Le projectile est maintenant lancé à la vitesse v_{lib}/N, avec $N > 1$. Trouvez l'expression littérale (=algébrique) de l'altitude maximale h atteinte par le projectile, en fonction de R_T et N. (2 points)

Corrigé :

1) La vitesse de libération est la vitesse minimale à communiquer au projectile pour qu'il s'échappe de l'attraction gravitationnelle terrestre.
   La force gravitationnelle est conservative. Il y a donc conservation de l'énergie mécanique.
   Au décollage à $r = R_T$:
   $U = -G\frac{mM_T}{R_T}$
   $E_c = \frac{1}{2}mv_{\text{lib}}^2$

   A l'infini :
   $U = 0$
   $E_c = 0$ par définition de la vitesse de libération.
   En égalant :
   $-G\frac{mM_T}{R_T} + \frac{1}{2}mv_{\text{lib}}^2 = 0 + 0$
   Donc $v_{\text{lib}} = \sqrt{2\frac{GM_T}{R_T}}$

2) L'équation de conservation de l'énergie mécanique devient :
   $-G\frac{mM_T}{R_T} + \frac{1}{2}m\left(\frac{v_{\text{lib}}}{N}\right)^2 = -G\frac{mM_T}{(R_T+h)}$
   $-G\frac{mM_T}{R_T} + \frac{1}{2}m\frac{1}{N^2}2\frac{GM_T}{R_T} = -G\frac{mM_T}{(R_T+h)}$
   $\frac{-1}{R_T} + \frac{1}{N^2R_T} + \frac{1}{(R_T+h)} = 0$
   $h = \frac{R_T}{N^2-1}$

Exercice 2 (Toutes sections - 5 points)

Arsène Lupin doit s'échapper d'un château. Il dispose d'une corde pouvant soutenir une force maximale de 740 N. La masse d'Arsène est de 80 kg. En glissant, Arsène exerce donc une traction T sur la corde (ne considérez pas les frottements entre Arsène et la corde ; ils sont inclus dans T).

1) Arsène se laisse glisser verticalement du haut du donjon, suspendu à sa corde attachée au sommet du donjon. Quelle accélération doit avoir Arsène pour que la corde ne se rompe pas ? (2 points)
2) Arsène se retrouve maintenant au sommet d'un toit (plan incliné) du château et veut s'en échapper en glissant le long du toit, retenu par sa corde attachée maintenant au sommet de ce toit. La pente du toit du château fait un angle $\alpha = 80°$ avec l'horizontale. Le coefficient de frottement cinétique entre Arsène et le toit vaut $\mu_c = 0.1$.
    a) Quelle accélération doit avoir Arsène en glissant sur le toit pour que la corde ne se rompe pas ? (2 points)
    b) Votre expression littérale (=algébrique) de l'accélération obtenue à la question 2)a) est-elle plausible ? Justifiez cela (i) par une analyse dimensionnelle et (ii) en considérant une valeur particulière de α. (1 point)

Corrigé :

1) Soit T la tension exercée par la corde sur Arsène. On applique la 2ème loi de Newton au système Arsène dans le référentiel du château supposé inertiel. Si on projette sur un axe vertical orienté positivement vers le bas : $mg - T = ma$ avec $T < T_{\max} = 740\text{N}$.
   donc $a > a_{\min} = g - \frac{T_{\max}}{m}$
   A.N. : $a_{\min} = 0.56$ m. s^{-2}

2) a) On applique la 2ème loi de Newton au système Arsène de masse m. En projetant sur (Ox), axe dirigé selon la pente du toit et orienté positivement vers le bas :
   $-F_{f,c} - T + mg\sin(\alpha) = m\ddot{x}$

   En projetant sur (Oy), axe perpendiculaire à (Ox) et orienté positivement vers le haut :
   $N - mg\cos(\alpha) = 0$

   Comme le frottement est cinétique, $F_{f,c} = \mu_c N = \mu_c mg\cos(\alpha)$.

   $m\ddot{x} = -\mu_c mg\cos(\alpha) - T + mg\sin(\alpha)$

   $T < T_{\max} = 740\text{N}$ donc :

   $a = \ddot{x} > -\mu_c g\cos(\alpha) - \frac{T_{\max}}{m} + g\sin(\alpha)$
   A.N. : $a_{\min} = 0.24$ m/s^{-2}

   b) Les dimensions sont bien homogènes :
   - Accélération : [a] = m. s^{-2}
   - Coefficient de frottement cinétique, cosinus et sinus : sans dimension.
   - $[g]$ =m . s^{-2}
   - $[T/m]$ = N/kg = m . s^{-2}

   Si $\alpha = \pi/2$ on retrouve la solution du point 1).

Exercice 3 (Toutes sections - 5 points)

Une chaîne flexible de longueur L et de masse M glisse sur une table sans frottement. Initialement, une longueur y_0 de la chaîne pend verticalement à partir de l'arête de la table. On note $y(t)$ la longueur de portion de la chaîne qui pend à l'instant t.

1) Quelle est la masse $m(t)$ de la portion pendante de la chaîne à un instant quelconque, en fonction des données de l'énoncé ? (1 point)
2) Etablissez une relation liant $y(t)$, la portion pendante de la chaîne à un instant t quelconque, au module de l'accélération subie par la chaîne à cet instant. (2 points)
   Indication : Vous pourrez considérer le système constitué de la chaîne, lui appliquer la 2ème loi de Newton, et projeter sur un axe vertical. Par ailleurs, notez que la portion de chaîne horizontale n'a pas de composante verticale d'accélération.
3) La relation obtenue au point 2) est-elle plausible ? Considérez deux cas extrêmes pour justifier votre réponse. (1 point)
4) Calculez le module de la vitesse au moment où la chaîne devient complètement verticale. (1 point)
   Indication : Pensez, avant d'intégrer, à écrire l'accélération sous forme : $a_y = \frac{dv_y}{dy}\frac{dy}{dt} = \frac{dv_y}{dy}v_y$

Corrigé :

1) Masse de la chaîne qui pend :
   $m(t) = y(t) \times \lambda$, où $\lambda = M/L$ est la masse linéique. Donc $m(t) = y(t)\frac{M}{L}$

2) Référentiel : du labo, supposé inertiel.
   <u>Première résolution</u> : Système : la chaîne.
   On projette la 2ème loi de Newton sur l'axe vertical (Oy), orienté positivement vers le bas (vous pouvez l'orienter positivement vers le haut, ça ne change rien au final) :
   $\sum F_y = -R + (M - m(t))g + m(t)g = Ma_y(t)$
   avec :
   - $(M - m(t))\vec{g}$: poids de la portion de la chaîne horizontale
   - $\vec{R}$: réaction de la table sur la portion de la chaîne horizontale (dépend aussi du temps)

   Comme la portion de chaîne horizontale n'a qu'une accélération horizontale, cela signifie que, à chaque instant t, on a :
   $(M - m(t))g - R = 0$
   Donc :
   $\sum F_y = m(t)g = Ma_y(t)$
   $y(t)\frac{M}{L}g = Ma_y(t)$
   $a_y(t) = \frac{gy(t)}{L}$
   Remarque : On a ici considéré un système qui change de forme (ce n'est pas un solide). Cependant, toutes les portions de la chaîne ont la vitesse $v = \dot{y}$ et ont l'accélération $\ddot{y}$, c'est pourquoi on peut quand même appliquer la seconde loi de Newton avec cette accélération. On peut aussi le comprendre si, par la pensée, on "redresse" la portion de chaîne qui tombe (verticalement) pour la rendre horizontale (et obtenir ainsi un solide, mais sans changer les forces appliquées), on réalise que l'accélération de la chaine est bien $\ddot{y}(t) = \ddot{x}(t)$ tout au long de la chaîne, c'est pourquoi le raisonnement ci-dessus conduit au bon résultat. Il y a aussi d'autres manières de résoudre l'exercice, voir ci-dessous.

   <u>Autre résolution</u> : vous pouvez considérer deux sous-systèmes : la portion de chaîne posée (de masse $(M - m(t))$ et la portion de chaîne qui pend (de masse $m(t)$).
   (Ox) est un axe horizontal orienté positivement dans la direction du mouvement de la chaîne.
   — 2ème loi de Newton à la portion de la chaîne posée ($\vec{T_1}$ est la tension exercée par la chaîne qui pend sur la chaîne posée) :
   $(M - m(t))\vec{g} + \vec{R} + \vec{T_1} = (M - m(t))\vec{a}$

On projette sur (Ox) :
$T_1 = (M - m(t))a_x$

- 2ème loi de Newton à la portion de chaîne qui pend ($\vec{T_2}$ est la tension exercée par la chaîne posée sur la chaîne qui pend) :
  $m(t)\vec{g} + \vec{T_2} = m(t)\vec{a}$
  On projette sur (Oy), orienté positivement vers le bas :
  $m(t)g - T_2 = m(t)a_y$

Or une chaîne est inextensible, donc la tension est conservée : $T_1 = T_2 = T$.
On a aussi $a_x = a_y$ car la chaîne est inextensible, et par le choix des orientations des axes.
Donc en éliminant T entre les deux projections précédentes :
$m(t)g - (M - m(t))a_y = m(t)a_y$
$m(t)g = Ma_y$
$a_y(t) = m(t)\frac{g}{M} = y(t)\frac{M}{L}\frac{g}{M}$
$a_y(t) = \frac{g}{L}y(t)$

Remarque : Cette résolution n'est pas très rigoureuse, car elle utilise la seconde loi de Newton pour deux sous-systèmes qui changent de masse (la portion horizontale a une masse $M - m(t)$ dépendante du temps, et la portion verticale une masse $m(t)$). Il se trouve que par bonheur la masse perdue par le sous-système 1 (la portion de chaîne horizontale) est gagnée par le sous-système 2 (la portion de chaîne verticale). La bonne manière de traiter ce genre de problème comportant des (sous-) systèmes de masse variable est en fait via le théorème de la quantité de mouvement, voir résolution ci-dessous.

Résolution par le théorème de la quantité de mouvement :

- Système : portion verticale de la chaîne :
  Projetons $\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ sur l'axe (Oy) orienté positivement vers le bas ($\vec{T_2}$ est la tension exercée par la chaîne posée sur la chaîne qui pend) :

$$\begin{aligned} m(t)g - T_2(t) &= \frac{d}{dt}(m(t)\dot{y}(t)) \\ &= m(t)\ddot{y}(t) + \dot{m}(t)\dot{y}(t) \\ &= m(t)\ddot{y}(t) + \frac{M}{L}\dot{y}(t)^2 \qquad (1) \end{aligned}$$

- Système : portion horizontale de la chaîne :
  Projetons $\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ sur l'axe (Ox) orienté positivement dans le sens de

glissement de la chaîne ($\vec{T_1}$ est la tension exercée par la chaîne qui pend sur la chaîne posée) :

$$\begin{aligned} T_1(t) &= \frac{d}{dt}((M - m(t))\dot{x}(t)) \\ &= (M - m(t))\ddot{x}(t) + \frac{d}{dt}(M - m(t))\dot{x}(t) \\ &= (M - m(t))\ddot{x}(t) - \dot{m}(t)\dot{x}(t) \\ &= (M - m(t))\ddot{x}(t) - \frac{M}{L}\dot{y}(t)\dot{x}(t) \end{aligned} \quad (2)$$

Or :

— $T_1(t) = T_2(t)$

— Chaîne inextensible, et par choix des orientations des axes : $\dot{x}(t) = \dot{y}(t)$ et $\ddot{x}(t) = \ddot{y}(t)$.

On additionne les Eq. 1 et 2 :

$$\begin{aligned} m(t)g &= M\ddot{y}(t) \\ y(t)\frac{M}{L}g &= M\ddot{y}(t) \\ \Rightarrow a_y(t) = \ddot{y}(t) &= \frac{g}{L}y(t) \end{aligned}$$

Résolution par la conservation de l'énergie mécanique :

— La vitesse est égale en tout point de la chaîne (et vaut $v(t) = \dot{y}(t)$) donc l'énergie cinétique vaut :
$E_c = \frac{1}{2}M\dot{y}(t)^2$

— Seule l'énergie potentielle de la partie de la chaîne qui pend varie, elle vaut (à une constante près) :
$E_p = -m(t)g\frac{y(t)}{2} = -(\frac{M}{L}y(t))\ g\frac{y(t)}{2} = -\frac{Mgy(t)^2}{2L}$

— L'énergie mécanique ($E_m = E_c + E_p$) est conservée :

$$\begin{aligned} \frac{dE_m}{dt} &= 0 \\ M\dot{y}(t)\ddot{y}(t) - \frac{Mg}{L}y(t)\dot{y}(t) &= 0 \\ a_y(t) = \ddot{y}(t) &= \frac{g}{L}y(t) \end{aligned}$$

(si on exclut la solution triviale $\dot{y}(t) = 0$ donc $y(t)$ =cte qui correspond à la chaîne au repos).

3) Notez que l'accélération dans le plan horizontal a est la même que l'accélération dans le plan vertical a_y car la chaîne est inextensible. Quand $y = 0$, $a = 0$ (la chaîne n'a pas commencé à tomber). Quand $y = L$, $a = g$ (chute libre).

4) $a_y = \frac{dv_y}{dy} v_y = \frac{gy}{L}$

On sépare les variables : $v_y dv_y = \frac{gy}{L} dy$

En intégrant entre l'état initial ($y = y_0$, $v = 0$) et l'état final ($y = L$, $v = v_{yf}$)

$\int_0^{v_{yf}} v_y dv_y = \int_{y_0}^{L} \frac{gy}{L} dy$

$v_{yf}^2 = \frac{g}{L}(L^2 - y_0^2)$

$v_{yf} = \sqrt{\frac{g}{L}(L^2 - y_0^2)}$

Examen de Physique Générale – PHYS-F110
Partie Exercices

Année 2020-2021 - Examen de janvier 2021

Nom :

Prénom :

N° de carte d'étudiant :

Section (entourer) : Chimie — Math-Bio — Math-Ph — Physique — Sciences (Polyvalente)

Consignes générales :

1. Ecrivez immédiatement vos prénom, nom, numéro de carte d'étudiant et section.
2. Vérifiez que votre énoncé comporte bien **7 feuilles (6 questions)**.
3. Ne dégrafez pas les pages.
4. **Ne répondez qu'aux questions qui concernent votre section. Barrez les autres.**
5. Essayez de répondre à toutes les sous-questions, elles sont souvent indépendantes les unes des autres.
6. **Les réponses doivent toutes être clairement justifiées et les unités doivent être indiquées pour les résultats numériques.**
7. Les GSM, tablettes, smartwatches et autres moyens de communication sont interdits. Ils doivent être éteints et rangés le long du mur. En aucun cas vous ne pouvez avoir un GSM (ou autre moyen de communication) à portée de main, même éteint.
8. Vous pouvez consulter votre aide mémoire (une feuille A4 recto-verso manuscrite). Celui-ci doit porter votre nom et ne peut pas être prêté.
9. Vous pouvez demander des feuilles blanches supplémentaires pour répondre. Inscrivez-y votre nom et prénom et insérez-les dans votre énoncé agrafé quand vous rendrez votre copie.
10. Les calculatrices ne peuvent pas être prêtées.
11. Ne répondez pas en rouge, cette couleur étant réservée pour la correction.
12. En cas de besoin, vous prendrez les valeurs de constantes suivantes :
    - — Accélération de la pesanteur à la surface de la Terre : $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$;
13. L'examen dure **2h00**.

Bon travail !

Q1 Tous /5	Q2 Tous /6	Q3 Tous /4	Q4 Tous sauf Math-B /2	Q5 Chim, Sci /3	Q6 M-Phys, Phys /3

1. Toutes sections — 5 points :

Une bille supposée ponctuelle de masse m glisse sans frottements sur une glissière présentant une boucle circulaire de rayon R. On veut que la bille, lâchée en A sans vitesse initiale, arrive en C (au point culminant de la boucle) sans décoller de la glissière, et donc "boucle la boucle". On appelle $v_{\mathrm{C,min}}$ la vitesse minimale que doit avoir la bille en C pour décrire ce cercle sans décoller. On néglige les frottements.

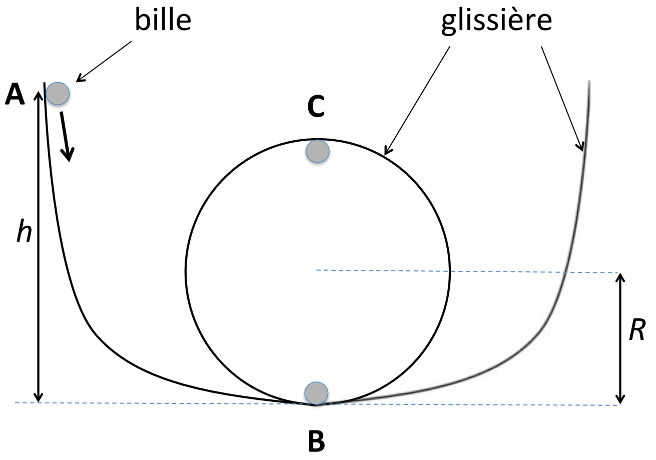
a) Par analyse dimensionnelle, exprimez $v_{\mathrm{C,min}}$ en fonction de (certaines de) ces variables : $\{m, R, g\}$.

b) Représentez (dans le référentiel du laboratoire) les forces agissant sur la bille en B et en C si $v > v_{\mathrm{C,min}}$.

c) Quelle est la condition (impliquant une force) pour que la bille décolle en C ? En déduire l'expression de $v_{\mathrm{C,min}}$.

d) De quelle hauteur minimale h_{min} faut-il lâcher la bille pour qu'elle ne décolle pas en C ? (si vous avez résolu le point précédent, donnez la réponse en fonction des données de l'énoncé $\{m, R, g\}$; sinon, donnez la réponse en fonction des données $\{m, R, g, v_{\mathrm{C,min}}\}$).

Remarque : La figure ci-dessous représente la même bille, dessinée à 3 positions successives A, B puis C.



Solution :

a) $v = C \times g^{\alpha} R^{\beta} m^{\gamma}$
$m^1 s^{-1} = (m)^{\alpha} (s)^{-2\alpha} (m)^{\beta} (kg)^{\gamma}$
d'où :
$\gamma = 0$
$\alpha = \beta = 1/2$
$v = C \times \sqrt{gR}$

b) En B : le poids $\vec{P}$ dirigé vers le bas (point d'application : centre de masse de la bille), la réaction de la glissière $\vec{N}$, dirigée vers le haut (point d'application : interface glissière-bille).
En C si $v > v_{\mathrm{C,min}}$ (donc la bille ne décolle pas) : le poids $\vec{P}$ dirigé vers le bas, la réaction de la glissière $\vec{N}$, dirigée vers le bas, même points d'application que précédemment.

c) La bille décolle si la réaction s'annule : $\vec{N} = \vec{0}$.
Seconde loi de Newton à la bille en C, projetée sur un axe vertical orienté vers le bas :
$mg = mv^2_{C,min}/R$ d'où $v_{C,min} = \sqrt{gR}$

d) Conservation de l'énergie mécanique entre A et C :
$E_c + E_p =$cte
$0 + mgh_{min} = 1/2mv^2_{C,min} + 2mgR$
$h_{min} = 2R + (v^2_{C,min}/(2g))$
$h_{min} = 5/2R$

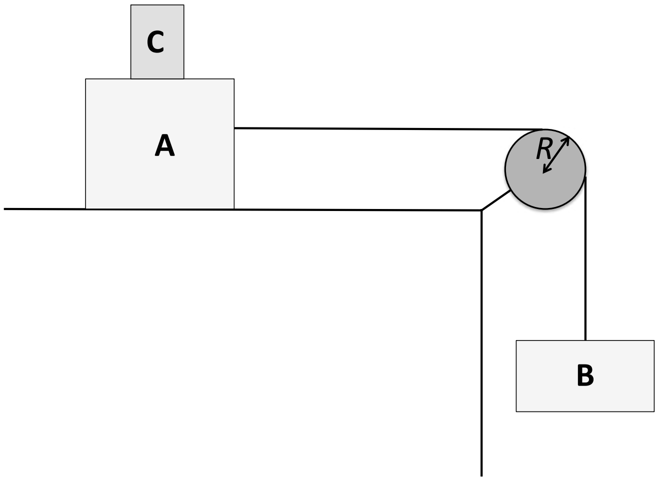
2. Toutes sections — 6 points :
Les blocs A et B, de masses m_A et m_B, sont reliés par un fil inextensible passant par une poulie de masse M et de rayon R. Le bloc C (masse m_C) est posé sur le bloc A. Entre le bloc A et la table, les coefficients de frottement statiques et dynamiques (=cinétiques) sont égaux ($\mu_s = \mu_c = \mu$).

A) On suppose que la poulie a un moment d'inertie négligeable par rapport à son axe de rotation ($I_O = 0$).

  a) Quelle est la masse minimale du bloc C qui empêche le bloc A de bouger ?

  b) On retire le bloc C. Quelle est l'accélération du bloc A ?

B) La poulie possède un moment d'inertie par rapport à son axe de rotation qui vaut $I = MR^2/2$. On retire le bloc C. Quelle est l'accélération du bloc A ? Discutez la pertinence du résultat obtenu.



Solution :

A)
a) Système : bloc B. Seconde loi de Newton projetée sur (Oy), axe vertical orienté vers le bas :
$m_B g - T_B = m_B a_B$
Système : blocs A+C. Seconde loi de Newton projetée sur (Ox), axe horizontal orienté vers la droite :
$T_A - F_f = (m_A + m_C) a_A$.
$T_A = T_B$ car théorème du moment cinétique appliqué à la poulie de moment d'inertie $I = 0$: la somme des moments des forces est nulle : $RT_B - RT_A = 0$
Fil inextensible : $a_B = a_A$ avec le choix de l'orientation des axes. On déduit des deux relations précédentes :
$a = \frac{m_B g - F_{f,d}}{m_A + m_B + m_C}$.
$F_f = \mu N = \mu(m_A + m_C) g$.
Le système ne bouge plus si a=0 donc si $m_B g - \mu(m_A + m_C) g = 0$.
D'où $m_{C,min} = m_B/\mu - m_A$.

b) On soulève le bloc C.
Système : bloc B. Seconde loi de Newton projetée sur (Oy), axe vertical orienté vers le bas :
$m_B g - T_B = m_B a_B$
Système : bloc A. Seconde loi de Newton projetée sur (Ox), axe horizontal orienté vers la droite :
$T_A - F_f = (m_A) a_A$.
$T_A = T_B$ car $I = 0$.
Fil inextensible : $a_B = a_A$ avec le choix de l'orientation des axes. On déduit des deux relations précédentes :
$a = g \frac{m_B - \mu m_A}{m_A + m_B}$.

B) Système : bloc A : $T_A - F_f = T_A - \mu m_A g = m_A a_A$ donc $T_A = m_A a_A + \mu m_A g$.
Système : bloc B : $m_B g - T_B = m_B a_B$ donc $T_B = m_B (g - a_B)$.
Fil inextensible : $a_B = a_A$ avec le choix de l'orientation des axes..
Système : poulie : $-T_A R + T_B R = I\gamma = Ia/R$ (avec γ l'accélération angulaire, positive dans le sens horlogique, donc $a = \gamma R$). Donc $T_B - T_A = Ia/r^2$
En remplaçant par les expressions de T_A et T_B on en déduit : $a = g \frac{m_B - \mu m_A}{m_A + m_B + I/R^2}$
d'où $a = g \frac{m_B - \mu m_A}{m_A + m_B + M/2}$
Discussion :
Si pas de frottements et $m_B \gg m_A$ et M, $a \sim g$ (chute libre).
Si pas de frottements et $M \gg m_A$ et m_B, $a \sim 0$ (l'inertie de la poulie empêche tout mouvement).
Si frottements suffisamment grands, on immobilise le système.

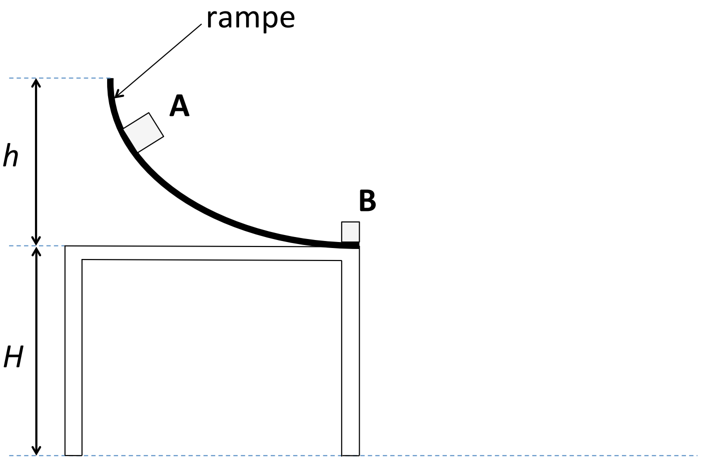
3. Toutes sections — 4 points :
Un cube A de masse m_A glisse sans frottement et avec vitesse initiale nulle depuis le haut d'une rampe de hauteur h et entre en collision avec un second cube B de masse $m_B = m_A/2$ qui est en bas de la rampe. La rampe est posée sur une table à la hauteur H du sol.

a) Calculer v_A, la vitesse du cube A en bas de la rampe (juste avant le choc).

b) Si le choc est totalement inélastique, calculez la vitesse juste après le choc v'_{AB}.

c) Toujours dans l'hypothèse du choc totalement inélastique, à quelle distance horizontale du bord de la table les cubes atterrissent-ils ?

Remarques :
Si vous n'avez pas trouvé la réponse de a), exprimez la réponse de b) en fonction de v_A, sinon, exprimez-la en fonction de certaines données de l'énoncé $\{m_A, g, h, H\}$.
Si vous n'avez pas trouvé la réponse de b), exprimez la réponse de c) en fonction de v'_{AB}.



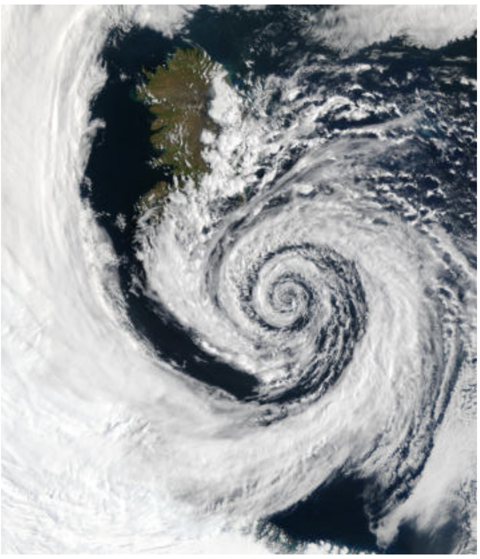
Solution :

a) Conservation de l'énergie mécanique : $Mgh = 1/2Mv_A^2$ donc $v_A = \sqrt{2gh}$.

b) Collision inélastique : conservation de la quantité de mouvement : $m_A v_A = (m_A + m_B)v'_{AB}$
Donc $v'_{AB} = (2/3)v_A$ (pour ceux qui n'ont pas trouvé le a))
et $v'_{AB} = (2/3)\sqrt{2gh}$ (pour ceux qui ont trouvé le a))
(Les deux réponses donnent le maximum de points pour cette sous-question).

c) $y = -(1/2)gt^2 + H$
$y_{sol} = 0$ à l'instant $t_{sol} = \sqrt{2H/g}$
$x_{AB,sol} = v'_{A,B} \times t_{sol}$
Donc $x_{AB,sol} = v'_{A,B}\sqrt{2H/g}$ (pour ceux qui n'ont pas trouvé le a))
et $x_{AB,sol} = 4/3\sqrt{hH}$ (pour ceux qui ont trouvé le a))
(Les deux réponses donnent le maximum de points pour cette sous-question).

4. Toutes sections SAUF Math-Bio — 2 points :



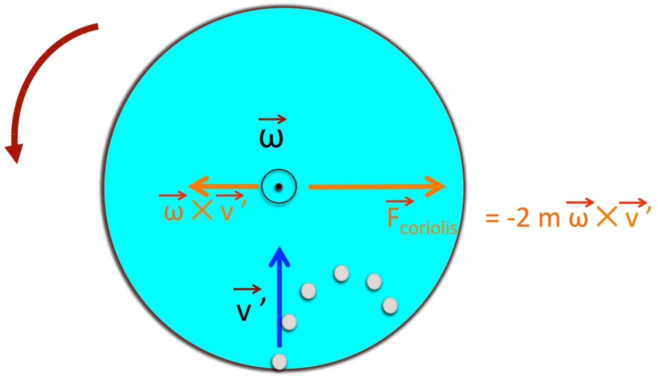
a) La photo ci-dessus représente un cyclone. Quelle force conditionne le sens de rotation du cyclone ? Donnez son expression en fonction de la vitesse angulaire de la Terre ($\vec{\omega}$) et de la vitesse d'un nuage par rapport à la Terre ($\vec{v'}$).

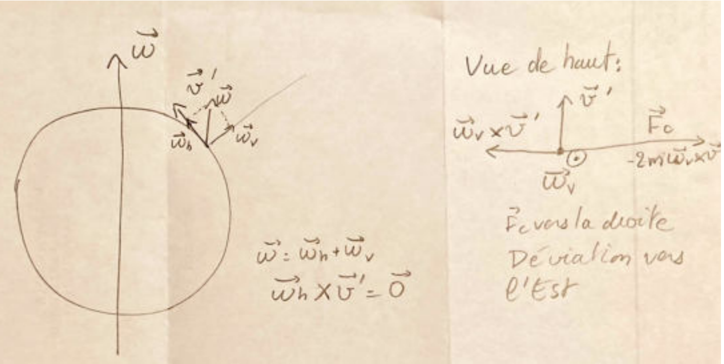
b) Justifiez : faire un schéma clair et expliquer le sens de la déviation des nuages à partir de la formulation obtenue précédemment.

Solution :

a) C'est la pseudo-force de Coriolis qui dévie les nuages. $\vec{F} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v'}$ où $\vec{\omega}$ est la vitesse angulaire de la Terre et $\vec{v'}$ la vitesse d'un nuage de masse m par rapport à la Terre.

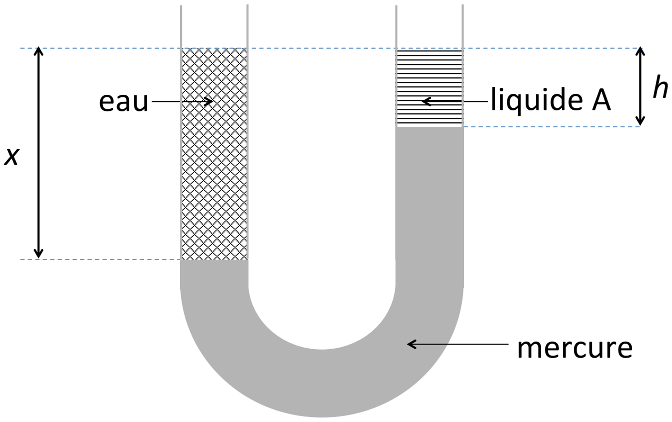
b) Une figure telle que l'une de celles-ci :





5. Uniquement Chimistes et Sciences (Polyvalents) – 3 points :

Un tube en U de section S est rempli de mercure. Dans la branche de droite, on ajoute un liquide A et dans celle de gauche, de l'eau de manière à ce que le niveau de la surface libre de l'eau coïncide avec celui du liquide A (voir figure ci-dessous). Les 3 liquides sont non miscibles (c'est-à-dire qu'ils ne se mélangent pas entre eux). Le liquide A occupe une hauteur h.



Quelle est la hauteur x occupée par l'eau ? Déterminez l'expression littérale puis faites l'application numérique.

Application numérique :
$h = 20\text{cm}$, $S = 2\text{cm}^2$.
Masse volumique du liquide A : $\rho_{\text{A}} = 8.5\ \text{g/cm}^3$.
Masse volumique du mercure : $\rho_{\text{Hg}} = 13.6\ \text{g/cm}^3$.
Masse volumique de l'eau : $\rho_{\text{eau}} = 1\ \text{g/cm}^3$.

Solution :

Soit A un point à l'interface entre l'eau et le mercure, et B un point à l'interface huile-mercure.
$P_A - P_{atm} = \rho_{eau} g x$ (1)
$P_B - P_{atm} = \rho_{\text{liquideA}} g h$ (2)
$P_A - P_B = \rho_{Hg} g(x - h)$ (3)
En remplaçant P_A de (1) et P_B de (2) dans (3), on trouve : $x = h(\rho_{Hg} - \rho_{\text{liquideA}})/(\rho_{Hg} - \rho_{eau})$
A.N. x = 8 cm

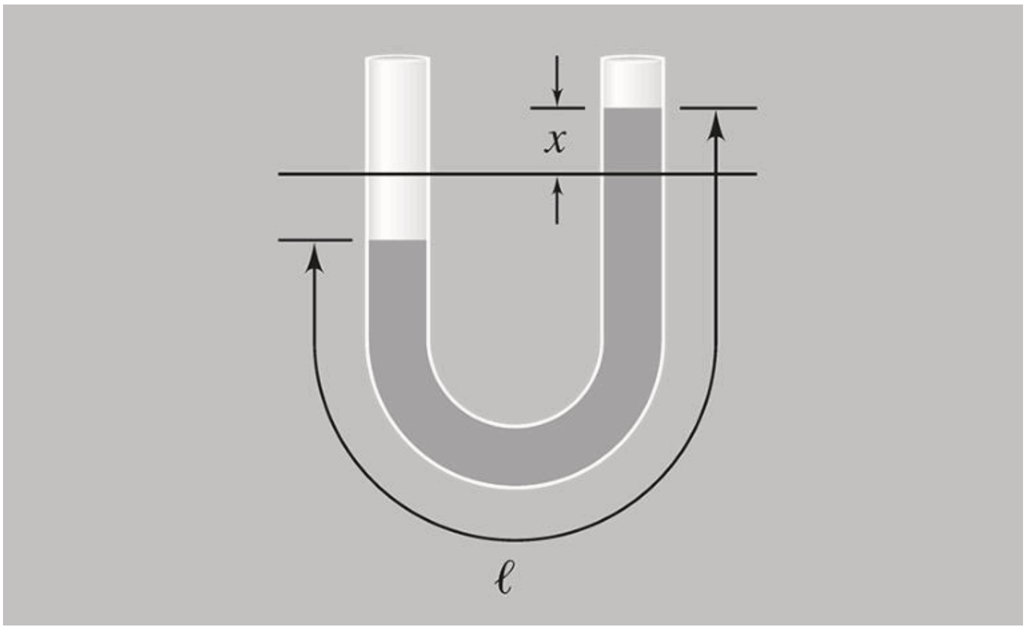
6. Uniquement Math-Physique et Physique — 3 points :

Un tube en U de section S est rempli uniquement d'eau (masse volumique ρ) sur une longueur ℓ. On fait subir à l'eau un léger déplacement puis on la laisse bouger librement. On néglige la viscosité et l'eau est supposée incompressible.

A) En utilisant la conservation de l'énergie mécanique, montrez que le liquide effectue un mouvement harmonique simple. Indications :
   (a) Calculez la masse d'eau
   (b) Calculez l'énergie cinétique de la masse d'eau
   (c) Calculez l'énergie potentielle de l'eau dans la configuration représentée (en considérant le centre de masse de l'eau contenue dans la portion verticale droite et la portion verticale gauche du tube)
   (d) En déduire l'énergie mécanique.

   La dérivée en fonction du temps de l'énergie mécanique doit être nulle.
   Donnez la période des oscillations.

B) Question facultative (bonus) : En utilisant la seconde loi de Newton, retrouvez le résultat du A) et donnez la période des oscillations. Indications : la force de rappel est le poids de la colonne d'eau de hauteur $2x$; appliquez la deuxième loi de Newton à toute la masse d'eau.



Solution :

a) L'eau subit un déplacement x donc la force de rappel est causée par le poids de la colonne d'eau de hauteur $2x$: $-(\rho 2xS)g = M_{tot,eau}a = \rho S\ell a = +\rho S\ell\ddot{x}$
Donc $\ddot{x} + (2g/\ell)x = 0$
C'est l'équation d'un mouvement oscilatoire harmonique de pulsation $\omega = \sqrt{2g/\ell}$ et de période $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{\ell/2g}$.

b) Energie cinétique : $E_c = 1/2\rho S\ell\dot{x}^2$
Energie potentielle : L'énergie potentielle de l'eau dans partie courbée du U ne change pas aux petites oscillations : c'est donc une constante.
Le centre de masse de l'eau dans le tube vertical de gauche (qui au repos a une hauteur h) est à une hauteur : $(h-x)/2$.
La masse de l'eau dans le tube vertical de gauche vaut : $\rho S(h-x)$.
Donc l'énergie potentielle de l'eau dans le tube vertical de gauche vaut : $1/2\rho gS(h-x)^2$.
De même, l'énergie potentielle de l'eau dans le tube vertical de droite vaut : $1/2\rho gS(h+x)^2$.
L'énergie mécanique vaut donc :
$E_m = 1/2\rho gS((h-x)^2 + (h+x)^2) + 1/2\rho S\ell\dot{x}^2$
$\frac{dE_m}{dt} = 1/2\rho gS\dot{x}(-2(h-x) + 2(h+x)) + 1/2\rho S\ell 2\dot{x}\ddot{x} = 0$
Si $\dot{x} \neq 0$, $\ddot{x} + \frac{2g}{\ell}x = 0$.
Mêmes conclusions que précédemment.

Examen de Physique Générale – PHYS-F110

Partie Théorie

Année 2020-2021 - Examen de juin 2021

Nom :

Prénom :

N° de carte d'étudiant :

Section (entourer) : Chimie — Math-Bio — Math-Ph — Physique — Sciences (Polyvalente)

Consignes générales :

1. Ecrivez immédiatement vos prénom, nom, numéro de carte d'étudiant et section.
2. Vérifiez que votre énoncé comporte bien **4 feuilles (3 questions)**.
3. Ne dégrafez pas les pages.
4. **Ne répondez qu'aux questions qui concernent votre section. Barrez les autres.**
5. Essayez de répondre à toutes les sous-questions, elles sont souvent indépendantes les unes des autres.
6. **Les réponses doivent toutes être clairement justifiées.**
7. Vous n'avez droit ni à un aide-mémoire ni à une calculatrice.
8. Les GSM, tablettes, smartwatches et autres moyens de communication sont interdits. Ils doivent être éteints et rangés le long du mur. En aucun cas vous ne pouvez avoir un GSM (ou autre moyen de communication) à portée de main, même éteint.
9. Vous pouvez demander des feuilles blanches supplémentaires pour répondre. Inscrivez-y votre nom et prénom et insérez-les dans votre énoncé agrafé quand vous rendrez votre copie.
10. Ne répondez pas en rouge, cette couleur étant réservée pour la correction.
11. Cette partie Théorie de l'examen dure **1h**.

Bon travail !

Q1	Q2	Q3
/4	/3	/3

1. Toutes sections — 4 points :

On veut démontrer le théorème de la quantité de mouvement.

Soit $\mathcal{R}$ un référentiel inertiel. On considère un système $\mathscr{S}$ de N points matériels de masses m_i placés aux points A_i, $1 \leq i \leq N$.

a) Rappelez la définition de la quantité de mouvement (ou impulsion) $\vec{p_i}$ d'un des points matériels A_i.

b) Enoncez le théorème de la quantité de mouvement.

c) Démontrez le théorème de la quantité de mouvement. On définira chaque terme et on justifiera soigneusement chaque étape de la démonstration.

d) Pourquoi peut-on raisonnablement considérer que la quantité de mouvement est conservée lors d'une collision ?

Solution 1:
Slides 154-156

2. Toutes sections — 3 points :

Soit un objet composé d'un grand nombre N de particules. La position de la i-ème particule par rapport à l'origine O d'un référentiel inertiel est notée $\vec{r_i}$; elle est notée $\vec{r'}_i$ par rapport au centre de masse.

a) Donnez l'expression du moment cinétique $\vec{J}_{CM}$ par rapport au centre de masse.

b) Donnez l'expression du moment cinétique $\vec{J}_O$ par rapport à l'origine O, en fonction de $\vec{J}_{CM}$.

c) Démontrez cette relation.

Solution 2:
Slides 171-172

3. Attention, barrez les questions qui ne vous concernent pas :

Toutes sections sauf Math-Bio — 3 points

a) Enoncez le principe d'Archimède.

b) Démontrez-le, en prenant l'exemple d'un corps plongé intégralement dans un fluide.

c) Lorsque la coque d'un bateau flottant sur l'eau est inclinée, (i) soit elle reviendra à sa position d'équilibre initial; il s'agit alors d'une position d'équilibre stable, (ii) soit elle s'en écartera de plus en plus; il s'agit alors d'une position d'équilibre instable. Faites deux schémas illustrant ces deux situations (i) et (ii), en indiquant bien les forces (nom, point d'application, direction) agissant sur le bateau. Expliquez pourquoi la situation (ii) est instable.

Math-Bio : — 3 points

a) Donnez l'expression du travail dW d'une force de rappel d'un ressort de constante de raideur k exercée le long d'un déplacement infinitésimal $d\vec{\ell}$.

b) Déduisez-en l'expression du travail exercé par la force de rappel entre deux points A et B.

c) Déduisez-en l'expression de la différence d'énergie potentielle entre A et B. Comment appelle-t-on les forces qui satisfont à une telle relation entre travail et différence d'énergie potentielle ?

Solution 3:
Toutes sections sauf Math-Bio : Slides 270, 271, 273
Math-Bio : Slides 109, 119, 120.

Examen de Physique Générale – PHYS-F110
Partie Exercices

Année 2020-2021 - Examen de juin 2021

Nom :

Prénom :

N° de carte d'étudiant :

Section (entourer) : Chimie — Math-Bio — Math-Ph — Physique — Sciences (Polyvalente)

Consignes générales :

1. Ecrivez immédiatement vos prénom, nom, numéro de carte d'étudiant et section.
2. Vérifiez que votre énoncé comporte bien **7 feuilles (6 questions)**.
3. Ne dégrafez pas les pages.
4. **Ne répondez qu'aux questions qui concernent votre section. Barrez les autres.**
5. Essayez de répondre à toutes les sous-questions, elles sont souvent indépendantes les unes des autres.
6. **Les réponses doivent toutes être clairement justifiées et les unités doivent être indiquées pour les résultats numériques.**
7. Les GSM, tablettes, smartwatches et autres moyens de communication sont interdits. Ils doivent être éteints et rangés le long du mur. En aucun cas vous ne pouvez avoir un GSM (ou autre moyen de communication) à portée de main, même éteint.
8. Vous pouvez consulter votre aide mémoire (une feuille A4 recto-verso manuscrite). Celui-ci doit porter votre nom et ne peut pas être prêté.
9. Vous pouvez demander des feuilles blanches supplémentaires pour répondre. Inscrivez-y votre nom et prénom et insérez-les dans votre énoncé agrafé quand vous rendrez votre copie.
10. Les calculatrices ne peuvent pas être prêtées.
11. Ne répondez pas en rouge, cette couleur étant réservée pour la correction.
12. En cas de besoin, vous prendrez les valeurs de constantes suivantes :
    - — Accélération de la pesanteur à la surface de la Terre : $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$;
13. L'examen dure **2h00**.

Bon travail !

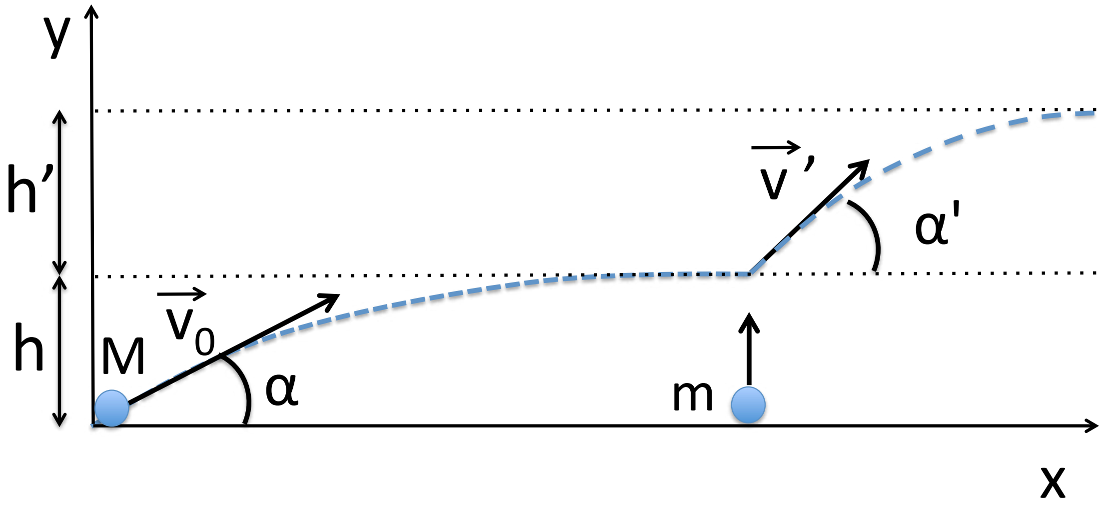
Q1 Tous /4	Q2 Tous /3	Q3 Tous /5	Q4 Tous /5	Q5 Chim, Sci /3	Q6 M-Phys, Phys /3

1. Toutes sections — 4 points :
Un projectile de masse M est lancé depuis le sol avec une vitesse $\vec{v_0}$ faisant avec un angle α non nul avec l'horizontale. Au sommet de sa trajectoire, il entre en collision avec un autre projectile de masse m lancé verticalement depuis le sol ; ce dernier possède la vitesse (verticale ascendante) $\vec{u}$ à l'instant juste avant la collision. Les deux projectiles restent collés l'un à l'autre après la collision.

a) Calculez la hauteur h à laquelle se produit la collision

b) Calculez les composantes v'_x et v'_y de la vitesse $\vec{v}\,'$ après le choc. Discutez le résultat obtenu si m tend vers 0 et l'infini, et si M tend vers 0 et l'infini.

c) Calculez h', la hauteur additionnelle atteinte suite au choc. (Si vous n'avez pas résolu le b), vous pouvez exprimer le résultat en fontion de v' ou de ses composantes).



Solution 1:

a) Hauteur à laquelle se produit la collision : c'est la hauteur du sommet de la trajectoire. Pour la trouver, on projette la 2ème loi de Newton sur un axe vertical (Oy), puis on intègre :

$$\begin{aligned}\Sigma\vec{F} &= M\vec{a}\\ -Mg &= M\ddot{y}\\ a_y &= -g\\ v_y &= -gt+v_0\sin\alpha\\ y &= -\frac{1}{2}gt^2+v_0\sin\alpha t+0\end{aligned}$$

Au sommet de la trajectoire, la vitesse est horizontale donc $v_y = 0$, ce qui conduit à $t = v_0 \sin\alpha/g$. Donc :

$$\begin{aligned}h &= -\frac{1}{2}g(v_0\sin\alpha/g)^2+v_0\sin\alpha(v_0\sin\alpha/g)\\ &= \frac{(v_0\sin\alpha)^2}{2g}\end{aligned}$$

b) Le choc est inélastique, on applique la conservation de la quantité de mouvement entre l'instant juste avant le choc, et l'instant juste après le choc.

$$\begin{aligned}Mv_x &= (m+M)v'_x\\ mu_y &= (m+M)v'_y\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}v'_x &= \frac{M}{m+M}v_x\\ v'_y &= \frac{m}{m+M}u_y\end{aligned}$$

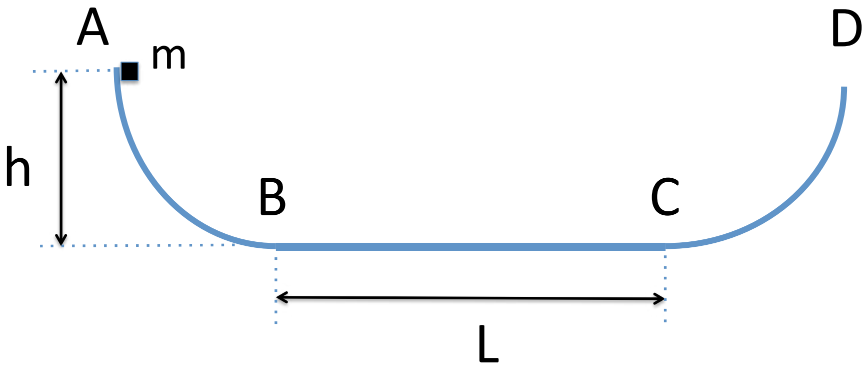
Si m tend vers 0, la collision n'a pas lieu, la vitesse horizontale est inchangée, et aucune vitesse verticale n'est communiquée lors de l'impact.
Si m tend vers l'infini, la vitesse devient uniquement verticale après impact.
Si M tend vers 0, la masse m continue sa trajectoire purement verticale sans perturbation.
Si M tend verds l'infini, la masse M continue sa trajectoire sans être perturbée.

c) On peut utiliser le résultat du a), mais avec une vitesse initiale $\vec{v}'$ et un angle α' :

$$\begin{aligned}h' &= \frac{(v'\sin\alpha')^2}{2g}\\ &= \frac{v_y'^2}{2g}\\ &= \frac{1}{2g}\left(\frac{m}{m+M}u_y\right)^2\end{aligned}$$

2. Toutes sections — 3 points :
Une particule de masse m glisse le long d'une piste dont la forme est illustrée ci-dessous. Les portions courbes de la piste sont sans friction tandis que la partie horizontale, longue de $L = 2{,}0$ m, présente un coefficient de frottement cinétique $\mu_c = 0{,}2$. On libère la particule au point A (situé à une hauteur $h = 1{,}0$ m au-dessus de la portion horizontale de la piste).

Localisez, sur la piste, l'endroit où la particule s'immobilisera, et justifiez votre raisonnement.



Solution 2:

Entre A et B, il n'y a pas de frottement, donc l'énergie mécanique est conservée.

$$1/2mv_B^2 \quad = \quad mgh$$

Calculons la distance D que peut parcourir la particule sur la portion horizontale avant de s'arrêter. Pour cela on applique le théorème de l'énergie cinétique entre B et C : $\Delta E_{cin} = W_{\text{total}} = W_C + W_{NC}$.

Le travail du poids est nul (car il est perpendiculaire au déplacement entre B et C). Donc seul le travail de la force de frottement est non nul entre B et C.

Cette force vaut $F_f = \mu_c mg$. (Pour trouver cela, on applique, sur la portion BC, la 2ème loi de Newton, que l'on projette sur un axe vertical (Oy) : $R - mg = ma_y = 0$, où $\vec{R}$ est la réaction du sol. Le second membre est nul car la composante verticale de l'accélération (a_y) est nulle, puiqu'on a un mouvement rectiligne. La force de frottement cinétique est $F_f = \mu_c R$ donc $F_f = \mu_c mg$).

Donc

$$\begin{aligned}
\Delta E_{\text{cin}} &= W_{F_f} \\
0 - 1/2\ mv_B^2 &= \int_0^D \vec{F_f}\ .\ \vec{dl} = \vec{F_f}\ .\ \int_0^D \vec{dl} = -\mu_c mgD \\
mgh &= \mu_c mgD \\
D &= \frac{h}{\mu_c}
\end{aligned}$$

(on a utilisé le fait que $\vec{F_f}$ de $\vec{dl}$ sont anti-colinéaires).

A.N. : On trouve $D = 5$ m

Comme $D > L = 2$m, la particule arrive pour la première fois en C avec une vitesse $v_{C,1}$ non nulle. Elle monte donc jusqu'à une certaine hauteur h' (telle que $1/2mv_{C,1}^2 = mgh'$, mais peu importe) sur la partie courbe CD. Comme toutes les forces sont conservatives entre C et D (pas de frottement sur la partie courbe), l'énergie potentielle qu'elle emmagasine lors de la montée sera intégralement restituée lors de la descente. Donc lorsqu'elle repasse en C à la descente, elle a une vitesse $v_{C,2}$ identique à celle de l'aller ($v_{C,2} = v_{C,1}$). Le trajet sur la partie courbe est donc une "opération blanche" du point de vue de la vitesse de la particule.

La particule parcourt encore 2m entre C et B, en ralentissant puisqu'il y a des frottements. Elle arrive en B avec une vitesse non nulle (puisqu'elle est capable de parcourir 5m sur la surfave rugueuse). Elle monte sur la portion BA jusqu'à une certaine hauteur (peu importe laquelle), puis repasse par B avec exactement la même vitesse qu'à la montée, puisqu'il n'y a pas de frottements entre B et A, donc tout l'énergie cinétique qu'elle possède à l'aller en A est restituée au retour en A.

La particule peut encore parcourir 1m sur la portion avec frottements avant de s'arrêter. par conséquent, elle s'immobilise au milieu du segment [BC].

3. Toutes sections — 5 points :
Une tige de longueur L et de masse M est maintenue au sol par une rotule qui est fixée en O. Elle est initialement en équilibre verticalement (schéma, étape a.) puis tombe sur le sol en pivotant autour de O (schéma, étape b.).

Le moment d'inertie d'une tige par rapport à son extrémité vaut $I = ML^2/3$.

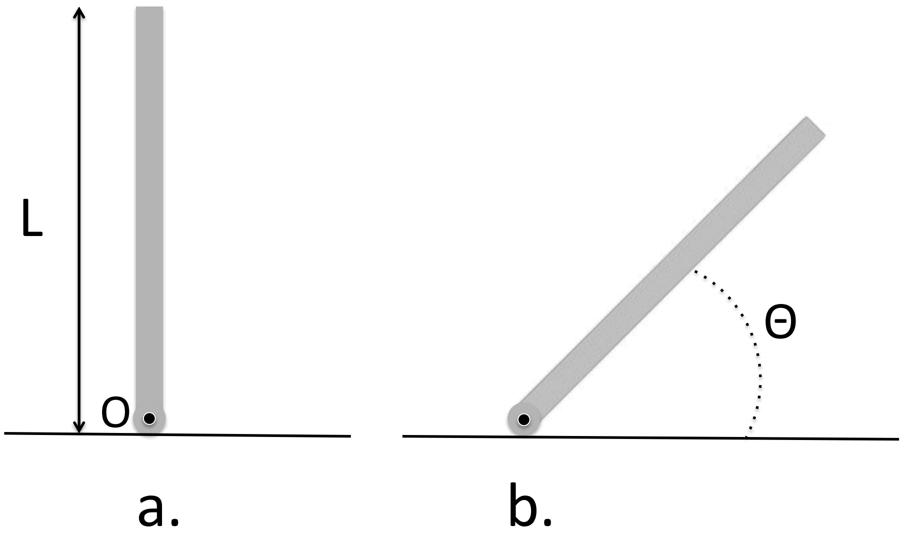
a) Représentez les forces agissant sur la tige quand l'angle entre la tige et le sol vaut θ, $0 < \theta < \pi/2$.

b) Calculez le travail des forces agissant sur la tige pendant la chute. Justifiez.

c) Calculez les moments exercés par ces forces par rapport à O lorsque l'angle entre la tige et le sol vaut θ. Représentez ce(s) vecteur(s) sur le schéma.

d) Quelle est l'accélération angulaire de la tige lorsqu'elle fait un angle θ avec le sol ? Vous pourrez utiliser le théorème du moment cinétique par rapport à O.

e) Quel est le module de l'accélération tangentielle de l'extrémité libre de la tige juste avant qu'elle ne touche le sol ? Comparez avec l'accélération d'un objet en chute libre.



Solution 3:

a) Forces :

- le poids $\vec{P}$, direction : verticalement ; sens : vers le sol ; point d'application : centre de masse de la barre.

- la réaction du pivot $\vec{R}$: direction : en oblique ; sens : vers le haut ; point d'application : O.

b) Travail de la réaction du pivot : le point d'application de la force ne se déplace pas, donc $W(\vec{R}) = 0\ \ \text{J}$.

Travail du poids : $W(\vec{P}) = Mg(y_{\text{final}} - y_{\text{initial}}) = MgL/2$.

c) $\vec{\mathcal{M}}_{\vec{R},O} = \vec{0}$ puisque la réaction $\vec{R}$ passe par O.

$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{P},O} = \vec{OG} \times M\vec{g} = -(L/2)Mg\cos\theta\ \vec{u}_z$, où on aura défini le trièdre orthornormé $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ tel que $\vec{u}_x$ soit horizontal et orienté positivement vers la droite, $\vec{u}_y$ soit vertical et orienté positivement vers le haut, et $\vec{u}_z$ sorte de la feuille.

d) Théorème du moment cinétique :

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{\mathcal{J}}_O}{dt} &= \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_{\text{ext}},O} \\
I\ddot{\theta} &= \frac{L}{2}Mg\cos\theta \\
\frac{ML^2}{3}\ddot{\theta} &= \frac{L}{2}Mg\cos\theta \\
\ddot{\theta} &= \frac{3}{2}\frac{g}{L}\cos\theta
\end{aligned}$$

en projetant sur (Oz), axe perpendiculaire à la feuille.

e) Lorsque la barre est horizontale, $\theta = 0$ donc $\ddot{\theta} = 3g/2L$. L'accélération tangentielle au bout de la barre vaut $a_t = L\ddot{\theta} = 3g/2 > g$.

Donc l'extrémité libre de la barre tombe plus vite qu'un objet en chute libre, ce qui est un peu contre-intuitif.

4. Toutes sections — 5 points :

Quand on veut construire le miroir d'un télescope, polir une galette de verre massif pour lui donner une forme parabolique parfaite (ce qui permet de focaliser les rayons lumineux au foyer du télescope) est très coûteux. La technique des miroirs liquides est parfois utilisée : du mercure liquide est contenu dans un large récipient cylindrique qui est mis en rotation autour de son axe (Oy) à vitesse angulaire constante ω. La surface d'un bain de liquide en rotation uniforme est parfaitement parabolique. Cet exercice a pour but de le prouver.

Considérons une masse infinitésimale $\mathrm{d}m$ de mercure à la surface du bain de mercure (voir schéma). On considère que la résultante des forces de pression du mercure environnant sur cet élément de mercure est une force $\vec{R}$ perpendiculaire à la surface du bain de mercure. On néglige la tension de surface. A l'équilibre, cette masse se déplace sur un cercle de rayon x à la vitesse angulaire constante ω.

On note $\vec{g}$ le vecteur accélération de la pesanteur.

a) L'équation de la surface du miroir liquide est (à deux dimensions) $y(x) = f(\omega, g)\ x^2$. Trouvez $f(\omega, g)$ par analyse dimensionnelle.

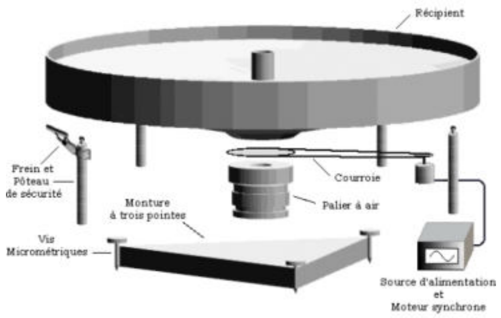
Nous allons maintenant prouver que la surface du miroir liquide prend effectivement une forme parabolique.

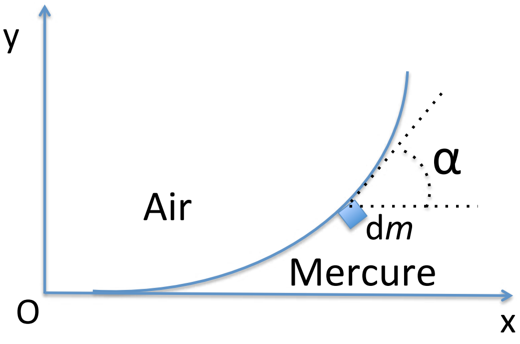
b) Quelles forces subit la masse de liquide $\mathrm{d}m$ dans le référentiel fixe du laboratoire ? Représentez-les soigneusement sur un dessin.

c) En utilisant la deuxième loi de Newton, exprimer $\tan\alpha$ en fonction de ω, x et g. On note α l'angle entre la tangente à la surface du miroir et l'horizontale (Ox)(voir schéma).

d) On note $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ les déplacements infinitésimaux selon les coordonnées x et y le long de la courbe $y(x)$. Exprimez $\tan\alpha$ en fonction de $\mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}x$. En déduire l'équation différentielle liant les variables x et y.

e) Intégrez cette équation différentielle pour trouver $y(x)$ en fonction de x.





Solution 4:

a) Si C est une constante sans dimension, on a :

$$\begin{aligned} y &= C\ f(\omega, g)\ x^2 \\ L &= (T^{-1})^a\ (LT^{-2})^b\ L^2 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} 1 &= b+2 \\ 0 &= -a-2b \end{aligned}$$

Donc $b=-1$ et $a=2$. Par conséquent : $y(x) = C\ \frac{\omega^2}{g}\ x^2$

b) L'élément de masse dm subit son poids $\vec{P}$ (vertical, orienté vers le bas, point d'application centre de masse de dm) et la résultante des forces de pression $\vec{R}$ (normale à la surface du miroir, orientée vers les y croissants, point d'application : on accepte n'importe quel point de dm qui est de toute façon un élément infinitésimal).

c)

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$$

Sur (Ox) : $-R\sin\alpha = -\mathrm{d}m\ \frac{v^2}{x} = -\mathrm{d}m\ \omega^2\ x$.
car l'élément de masse dm est en mouvement circulaire uniforme sur un cercle de rayon x, à la vitesse angulaire constante ω, donc l'accélération est uniquement normale et vaut $v^2/x = \omega^2 x$.
Sur (Oy) : $R\cos\alpha - \mathrm{d}m\ g = 0$
Donc :

$$\tan\alpha = \frac{\omega^2 x}{g}$$

d)

$$\tan\alpha = \frac{dy}{dx}$$

Donc les deux équations précédentes donnent :

$$\begin{aligned} dy &= \frac{\omega^2}{g}\ x\ dx \\ y(x) &= \frac{\omega^2}{2g}\ x^2 \end{aligned}$$

On a bien l'équation d'une parabole.

5. Uniquement chimistes et polyvalents — 3 points :

Pour effectuer des mesures précises de masse à l'aide d'une balance à ressort, il faut faire une correction tenant compte de la poussée d'Archimède.

a) Expliquez pourquoi la poussée d'Archimède nécessite de corriger la mesure de la masse déduite de la balance à ressort.

b) Si la balance à ressort indique une valeur M pour la masse d'une barre en cuivre, quelle est la masse réelle de cette barre ?

Application numérique :
M=200,000 g (= 200 grammes).
Masse volumique du cuivre à 20°C : $\rho_c = 8960$ kg m^{-3}.
Masse volumique de l'air à 20°C : $\rho_{\text{air}} = 1{,}2900$ kg m^{-3}.

Solution 5:

a) La poussée d'Archimède F_p est la résultante des forces exercées par le fluide environnant sur un corps solide immergé. Elle est égale au poids du volume que le fluide occuperait à la place du solide si on retirait ce dernier. Son module est donné par $F_p = \rho_f V g$, où ρ_f est la masse volumique du fluide.

L'objet suspendu à la balance à ressort subit une poussée d'Archimède vers le haut, exercée par l'air environnant, qui vient s'additionner (vectoriellement) à son poids, et modifier la mesure indiquée par la balance.

b)

$$\begin{aligned} F_p &= \rho_{\text{air}} V_{\text{barre}} g \\ &= \rho_{\text{air}} (M/\rho_c) g \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \Delta M &= F_p/g \\ &= (\rho_{\text{air}}/\rho_c) M \end{aligned}$$

Masse réelle de la barre : $M_{\text{réelle}} = M + \Delta M = M(1 + \rho_{\text{air}}/\rho_c)$.
A.N. :
$\Delta M = 0.029$ g.
$M_{\text{réelle}} = 200.029$ g.

6. Uniquement Math-Physique et Physique — 3 points :
En imagerie médicale, on utilise le battement produit entre l'onde émise par une source sonore (ultrasons) à une fréquence f et l'onde réfléchie par les globules rouges pour déterminer la vitesse de l'écoulement sanguin (donc des globules rouges) v_{gr}. On suppose que le vaisseau sanguin est dans l'axe de l'émetteur, et que le globule rouge se déplace vers l'émetteur. On suppose que la vitesse du son dans le corps humain, v_{son}, est constante.

a) Donnez l'expression de la fréquence f' des ultrasons réfléchis par le globule rouge.

b) Donnez l'expression de la fréquence f'' des ultrasons réfléchis par le globule rouge et tels que reçus par un détecteur au repos placé à côté de l'émetteur (exprimez cette fréquence en fonction des données de l'énoncé et calculez sa valeur numérique).

c) Expliquez le phénomène de battement qui se produit et comment, en mesurant ce battement, on a accès à la vitesse de l'écoulement sanguin (il n'est pas nécessaire de faire le calcul explicite).

Application numérique :
$v_{\text{gr}} = 20$ cm/s.
$v_{\text{son}} = 1{,}540$ m/s
$f = 5$ MHz

Solution 6:

a) Le globule est l'observateur. On est dans le cas où la source est au repos et l'"observateur" (le globule rouge) est en mouvement et se rapproche de la source. Donc :

$$f' = \frac{v_{\text{son}} + v_{\text{gr}}}{v_{\text{son}}} f \tag{1}$$

b) Le détecteur est l'"observateur". On est dans le cas où la source est en mouvement et se rapproche de l'"observateur". Donc :

$$f'' = \frac{v_{\text{son}}}{v_{\text{son}} - v_{\text{gr}}} f' \tag{2}$$

Donc :

$$f'' = \frac{v_{\text{son}} + v_{\text{gr}}}{v_{\text{son}} - v_{\text{gr}}} f \tag{3}$$

A.N. : $f'' = 6.49$ MHz.

c) Les battements sont un phénomène d'interférence se produisant lors de la superposition de deux ondes de fréquences différentes (ici f et f''). En un point fixe de l'espace, on mesurera alors une onde de fréquence constante $(f + f'')/2$ dont l'amplitude est modulée à la fréquence $(f - f'')/2$. Des "battements" (définis comme les instants où l'amplitude de l'onde résultante est nulle[1]) se produisent deux fois par période, donc la fréquence des battements est double : $f_b = f - f''$.

Donc si on mesure f_b, on connait $f - f''$. Avec l'Eq. 3, ceci fournit un système de 2 équations à 2 inconnues (v_{gr}, f''). On peut donc en déduire v_{gr}.

---

[1] On peut, de manière identique, les définir comme les instants où l'amplitude de l'onde résultante est maximale.

Interro de Physique Générale – PHYS-F110
Théorie

Année 2021-2022 - Novembre 2021

Nom :

Prénom :

N° de carte d'étudiant :

Section (entourer) : Chimie — Math-Bio — Math-Ph — Physique — Sciences (Polyvalente)

Consignes générales :

1. Ecrivez immédiatement vos prénom, nom, numéro de carte d'étudiant et section.
2. Vérifiez que votre énoncé comporte bien **3 feuilles (2 questions)**.
3. Ne dégrafez pas les pages.
4. Essayez de répondre à toutes les sous-questions, elles sont souvent indépendantes les unes des autres.
5. **Les réponses doivent toutes être clairement justifiées.**
6. Vous n'avez droit ni à un aide-mémoire ni à une calculatrice.
7. Les GSM, tablettes, smartwatches et autres moyens de communication sont interdits. Ils doivent être éteints et rangés le long du mur. En aucun cas vous ne pouvez avoir un GSM (ou autre moyen de communication) à portée de main, même éteint.
8. Vous pouvez demander des feuilles blanches supplémentaires pour répondre. Inscrivez-y votre nom et prénom et insérez-les dans votre énoncé agrafé quand vous rendrez votre copie.
9. Ne répondez pas en rouge, cette couleur étant réservée pour la correction.

Bon travail !

Q1 /3	Q2 /3

1. Théorie — 3 points :

a) Définissez une force conservative.

b) Donnez une expression entre une force conservative et l'énergie potentielle associé.

c) Quelle est l'énergie potentielle associée à la force de rappel d'un ressort idéal ? Démontrez-le.

d) Soit l'énergie potentielle d'un système donnée par $U(x) = ax^2 - bx$, où a et b sont des contantes. Déterminez F_x, la composante selon x de la force associée à cette fonction énergie potentielle.

Solution 1:

a) Slide 123

b) Slide 123 et/ou slide 132

c) Slide 109 et 119

d) Slide 137

e) $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, U$ donc $F_x = -\frac{dU}{dx}$. Par conséquent $F_x = -2a + b$.

2. Théorie — 3 points :

a) Enoncez le théorème du centre de masse pour un système de n points matériels.
b) Démontrez-le.

Solution 2:
Slide 140-141

Interro de Physique Générale – PHYS-F110
Exercices

Année 2021-2022 - Novembre 2021

Nom :

Prénom :

N° de carte d'étudiant :

Section (entourer) : Chimie — Math-Bio — Math-Ph — Physique — Sciences (Polyvalente)

Consignes générales :

1. Ecrivez immédiatement vos prénom, nom, numéro de carte d'étudiant et section.
2. Vérifiez que votre énoncé comporte bien **5 feuilles (4 questions)**.
3. Ne dégrafez pas les pages.
4. Essayez de répondre à toutes les sous-questions, elles sont souvent indépendantes les unes des autres.
5. **Les réponses doivent toutes être clairement justifiées.**
6. Vous avez droit à un aide-mémoire.
7. Les GSM, tablettes, smartwatches et autres moyens de communication sont interdits. Ils doivent être éteints et rangés le long du mur. En aucun cas vous ne pouvez avoir un GSM (ou autre moyen de communication) à portée de main, même éteint.
8. Vous pouvez demander des feuilles blanches supplémentaires pour répondre. Inscrivez-y votre nom et prénom et insérez-les dans votre énoncé agrafé quand vous rendrez votre copie.
9. Ne répondez pas en rouge, cette couleur étant réservée pour la correction.
10. Valeur numérique : Accélération de la pesanteur à la surface de la Terre : $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$

Bon travail !

Q1	Q2	Q3	Q4
/2	/3	/4	/5

1. Exercice – 2 points :

La surface d'une étoile est animée d'un mouvement de vibration qui renseigne en particulier sur sa composition chimique. La fréquence de vibration d'une étoile dépend de plusieurs paramètres. La cohésion d'une étoile étant assurée par les forces de gravitation, on s'attend à devoir faire intervenir :

a) Le rayon R de l'étoile

b) La masse M de l'étoile

c) La constante G de gravitation universelle.

Déterminer, par analyse dimensionnelle et à un facteur multiplicatif près, l'expression de la fréquence de vibration f en fonction de R, M et G.

Solution 1:

Si k, a, b et c sont des constantes :

$$\begin{aligned} f &= kR^aM^bG^c \\ T^{-1} &= L^aM^b(L^3T^{-2}M^{-1})^c \end{aligned}$$

En effet, on trouve les dimensions de G par la force gravitationnelle : comme $|\vec{F}| = Gm_1m_2/r^2$. On retrouve facilement (en utilisant $|\vec{F}| = ma$) que l'unité d'une force, le Newton, est donné en unités fondamentales par $[N] = MLT^{-2}$.

On a donc :

$MLT^{-2} = [G]M^2/L^2$

Donc :

$[G] = L^3T^{-2}M^{-1}$.

D'où, en identifiant les puissances des temps, longueurs et masses :

[T] : $-1 = -2c$

[L] : $0 = a + 3c$

[M] : $0 = b - c$

Par conséquent, $c = 1/2$, $b = 1/2$ et $a = -3/2$. Donc, si k est une constante sans dimension :

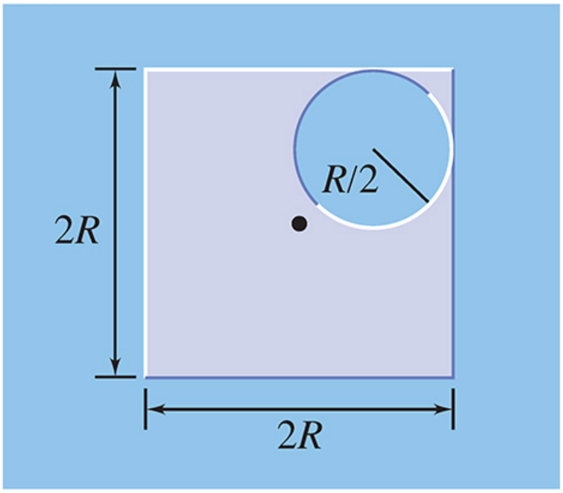
$$f = kR^{-3/2}M^{1/2}G^{1/2} = k\sqrt{\frac{MG}{R^3}}$$

2. Exercice – 3 points :

Un carré homogène de côté $2R$ est percé d'un trou circulaire de rayon $R/2$. Le centre du trou est situé en $(R/2, R/2)$ par rapport au centre du carré.

a) Exprimez la masse du carré troué en fonction de la masse surfacique σ et de R.

b) Trouvez la position du centre de masse par rapport au centre du carré pris comme origine des coordonnées.



Solution 2:

a) Le carré est homogène de masse surfacique σ.
Masse du carré plein : $m_1 = \sigma 4R^2$
On attribue au trou une masse surfacique négative. Ainsi, en superposant le carré plein de masse surfacique σ et un disque de masse surfacique opposée $-\sigma$, on obtient la forme voulue.
Masse du trou : $m_2 = -\sigma\pi R^2/4$
Masse du carré évidé : $m_1 + m_2 = \sigma R^2(4 - \pi/4)$.

b) L'énoncé nous propose de choisir l'origine du repère au centre de masse du carré plein. On choisit les axes (Ox) (resp., (Oy)) parallèles aux côtés horizontaux (resp., verticaux) du carré.
Le centre de masse du carré plein a pour coordonnées $x_1 = y_1 = 0$.
Le centre de masse du trou a pour coordonnées $x_2 = y_2 = R/2$.

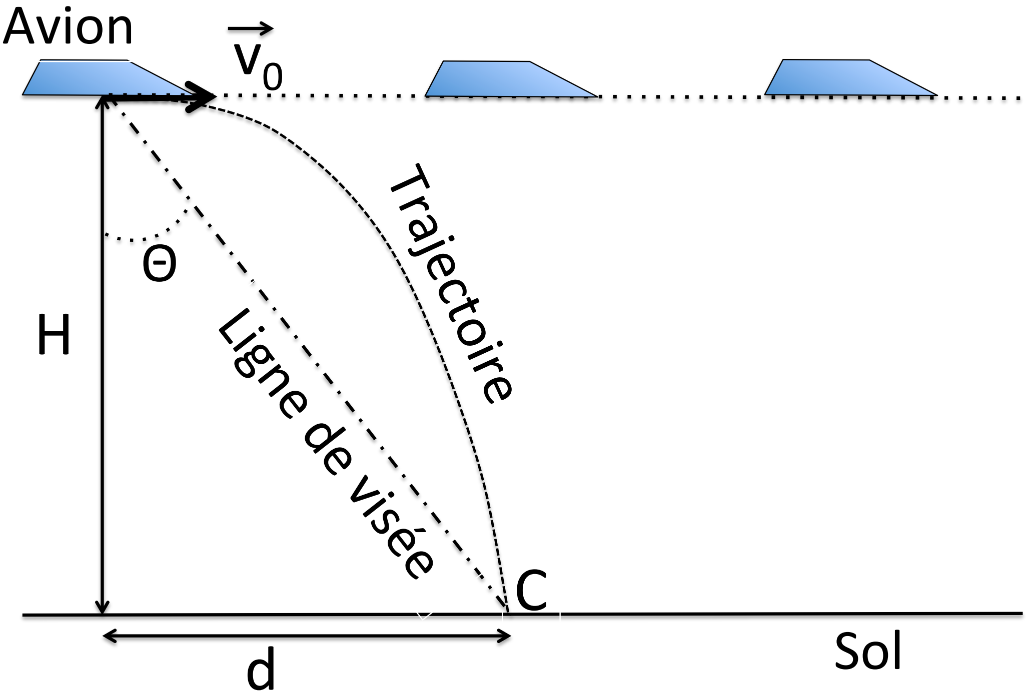
$$\begin{aligned}
x_{CM} &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \\
&= \frac{m_1 \times 0 + (-\sigma\pi R^2/4)(R/2)}{\sigma R^2(4 - \pi/4)} \\
&= -\frac{\pi R}{2(16 - \pi)} \\
&= -0.122R
\end{aligned}$$

Par symétrie, $y_{CM} = -0.122R$.

3. Exercice – 4 points :
Un avion vole horizontalement à une altitude $H = 5.0$ km et veut larguer une boîte de vivres sur une cible C. Sa vitesse, constante, est de $v_0 = 500$ km/h. On néglige la résistance de l'air.

a) Déterminez l'angle θ (angle, mesuré à partir de la verticale, avec lequel le pilote voit la cible lorsqu'il ouvre la soute et laisse tomber la boîte ; voir figure).

b) La trajectoire de la boîte de vivres, vue de l'avion, apparaît-elle parabolique ? Expliquez.



Solution 3:

a) Référentiel : lié au sol, référentiel supposé inertiel.
Système : la boîte de vivres.
Forces : Force de pesanteur. On néglige les frottements, puisque l'énoncé ne les mentionne pas.
Repère : La situation se passe dans un plan vertical. On choisit une base orthonormée (Oxy). L'axe (Oy) est vertical, orienté positivement vers le haut et son origine est au niveau du sol. L'axe (Ox) est horizontal, orienté positivement vers la droite et son origine est l'abscisse à laquelle l'avion largue la boîte.
On applique au système la 2eme loi de Newton : $\vec{F} = m\vec{a}$. La seule force exercée sur la boîte est le poids $m\vec{g}$. On projette sur les axes (Ox) et (Oy) :

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= -mg \\ m\ddot{x} &= 0 \end{aligned}$$

En intégrant, et comme $v_{0y} = 0$ et $v_{0x} = v_0$:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -gt + 0 \\ \dot{x} &= v_0 \end{aligned}$$

En intégrant, et comme $y_0 = H$ et $x_0 = 0$:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + H \tag{1}$$

$$x = v_0 t \tag{2}$$

La boîte touche le sol quand $y = 0$. L'Eq. 1 nous indique que lorsque $y = 0$, on a $t = \sqrt{2H/g}$.
L'Eq. 2 donne qu'à cet instant, $x = v_0\sqrt{2H/g}$.
$\tan\theta = x/H = v_0\sqrt{2/gH}$. Donc $\theta = \arctan(v_0\sqrt{\frac{2}{gH}})$.
A.N. : $v_0 = 500$ km/h $= 500 \times 1000/3600$ m/s
$g = 9.81$ m s^{-2}
$H = 5000$ m
$\theta = \arctan(0.89) = 42°$

b) Vu de l'avion, le mouvement de la boîte apparaît comme un mouvement rectiligne uniformément accéléré (accélération g vers le bas). La trajectoire, vue de l'avion, n'est donc pas parabolique mais rectiligne. En effet, la composante selon (Ox) de la vitesse de la boîte, v_0, n'est pas apparente depuis l'avion puisque celui-ci se déplace dans la même direction à la même vitesse horizontale v_0.

4. Exercice – 5 points :

Un véhicule parcourt sans déraper, à vitesse constante v, une piste circulaire de rayon R relevée d'un angle θ par rapport à l'horizontale. On note μ le coefficient de frottement statique entre les pneus du véhicule et la route.

a) Comment appelle-t-on le mouvement du véhicule ? Dans le cas d'un tel mouvement, caractérisez l'accélération $\vec{a}$ du véhicule (donnez sa direction, son sens, ainsi que son module en fonction des données de l'énoncé).

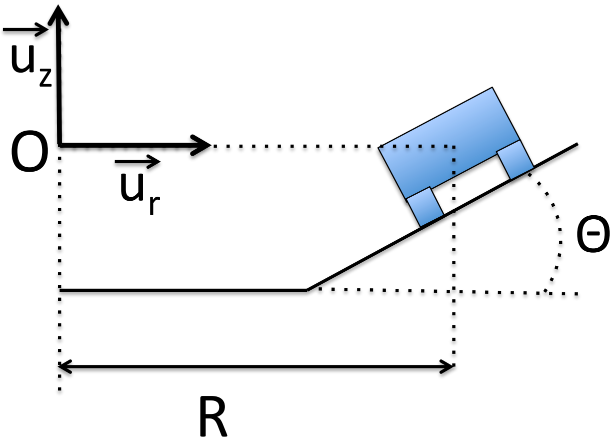
b) Expliquez pourquoi on doit considérer un coefficient de frottement statique et non cinétique (dynamique) entre les pneus du véhicule et la route.

c) Décrivez et dessinez les forces s'exerçant sur le véhicule dans le plan $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$. On ne considérera qu'une unique force de frottement s'exerçant sur le véhicule (c'est la résultante des 4 forces de frottement s'exerçant sur les 4 pneus ; cette force empêche le véhicule de déraper vers l'extérieur du virage). Attention à la direction et surtout au sens cette force de frottement résultante lorsque vous la représentez.

d) Montrez que le module de la vitesse maximale possible pour que le véhicule ne dérape pas vers l'extérieur du virage est :

$$v_{\max} = \sqrt{R\ g\ \frac{\mu + \tan\theta}{1 - \mu\tan\theta}}$$

Image source: Daimler Global Media Site



Solution 4:

a) Le véhicule est en mouvement circulaire uniforme autour de l'axe (Oz). Son accélération est donc normale (perpendiculaire à la trajectoire circulaire), dirigée horizontalement vers le centre de la piste circulaire, et son module vaut $|\vec{a}| = \frac{v^2}{R}$. On a donc $\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\vec{u}_r$.

b) Le véhicule roule sans déraper, il n'y a donc pas de glissement.

Expliquons d'abord le roulement sans glissement dans le cas d'un véhicule suivant une trajectoire rectiligne avec une force de frottement qui est donc opposée à la vitesse. Si on considère un pneu, chaque point P_P du pneu roule sans glisser par rapport à la route, il n'est en contact qu'un court instant avec un point P_R de la route, ensuite c'est le point suivant de la circonférence du pneu $P_{P'}$ qui sera en contact avec le point $P_{R'}$ de la route. Donc la vitesse de P_P par rapport à P_R est nulle à chaque instant. (Dans ce raisonnement, on a considéré le pneu parfaitement circulaire, de manière à ce qu'il n'y ait qu'un point tangent à la route, en donc en contact avec elle, à chaque instant. En pratique, le pneu s'écrase un peu, mais la vitesse entre les points du pneu en contact avec la route et la route elle-même reste nulle de toute façon).

Considérons maintenant la situation de l'exercice. Le véhicule risque de déraper radialement, vers l'extérieur du virage, si sa vitesse est trop importante. Tant qu'il ne dérape pas radialement, c'est que, comme précédemment, la vitesse de chaque point du pneu en contact avec la route est nulle par rapport à la route elle-même.

Le frottement statique est le frottement qui s'exerce entre deux objets qui ne glissent pas (qui n'ont pas de vitesse) l'un par rapport à l'autre, c'est donc celui-là qu'il faut considérer.

c) Référentiel : du circuit, supposé inertiel.
Système : le véhicule.
Force s'exerçant dans le plan $(0, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$:

- le poids du véhicule : $\vec{P} = -mg\ \vec{u}_z$
- la réaction normale de la route sur le véhicule : $\vec{N} = -N\sin\theta\ \vec{u}_r + N\cos\theta\ \vec{u}_z$
- la résultante des forces de frottements statiques, parallèle à la route, dirigée vers le bas : $\vec{F}_{fs} = -F_{fs}\cos\theta\ \vec{u}_r - F_{fs}\sin\theta\ \vec{u}_z$ Cette résultante de frottement est dirigée vers le bas car elle empêche la voiture de déraper vers l'extérieur.

(N.B. : Par ailleurs, il doit aussi exister des frottements opposés à la vitesse, pour que la voiture avance, mais ils sont perpendiculaires au plan $(0, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$, donc on ne les demandait pas).

En projetant la 2eme loi de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$ sur l'axe horizontal (la seule accélération est normale) :

$$-N\sin\theta - F_{fs}\cos\theta = -m\frac{v^2}{R}$$

En projetant la 2eme loi de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$ sur l'axe vertical (l'accélération verticale est nulle) :

$$N\cos\theta - F_{fs}\sin\theta - mg = 0$$

La force de frottement statique s'exprime comme $F_{fs} \leq \mu N$. A la limite du dérapage, cette force atteint sa valeur maximale et on a donc $F_{fs} = \mu N$ lorsque $v = v_{\text{max}}$. Les deux équations précédentes deviennent donc :

$$\begin{aligned} -N\sin\theta - \mu N\cos\theta &= -m\frac{v_{\text{max}}^2}{R} \\ N\cos\theta - \mu N\sin\theta - mg &= 0 \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned} N(\sin\theta + \mu\cos\theta) &= m\frac{v_{\text{max}}^2}{R} \\ N(\cos\theta - \mu\sin\theta) &= mg \end{aligned}$$

En divisant la première équation par la seconde et en simplifiant le terme de gauche par $N\cos\theta$ en haut et en bas (on suppose donc que $\theta \neq \pi/2$) :

$$\frac{\tan\theta + \mu}{1 - \mu\tan\theta} = \frac{v_{\max}^2}{Rg}$$

D'où :

$$v_{\max} = \sqrt{Rg\frac{\mu + \tan\theta}{1 - \mu\tan\theta}}$$

Examen de Physique Générale – PHYS-F110
Partie Théorie

Année 2021-2022 - Examen de janvier 2022

Nom :

Prénom :

N° de carte d'étudiant :

Section (entourer) : Chimie — Math-Bio — Math-Ph — Physique — Sciences (Polyvalente)

Consignes générales :

1. Ecrivez immédiatement vos prénom, nom, numéro de carte d'étudiant et section.
2. Vérifiez que votre énoncé comporte bien **4 feuilles (3 questions)**.
3. Ne dégrafez pas les pages.
4. **Ne répondez qu'aux questions qui concernent votre section. Barrez les autres.**
5. Essayez de répondre à toutes les sous-questions, elles sont souvent indépendantes les unes des autres.
6. **Les réponses doivent toutes être clairement justifiées.**
7. Vous n'avez droit ni à un aide-mémoire ni à une calculatrice.
8. Les GSM, tablettes, smartwatches et autres moyens de communication sont interdits. Ils doivent être éteints et rangés le long du mur. En aucun cas vous ne pouvez avoir un GSM (ou autre moyen de communication) à portée de main, même éteint.
9. Vous pouvez demander des feuilles blanches supplémentaires pour répondre. Inscrivez-y votre nom et prénom et insérez-les dans votre énoncé agrafé quand vous rendrez votre copie.
10. Ne répondez pas en rouge, cette couleur étant réservée pour la correction.
11. Cette partie Théorie de l'examen dure **50 minutes**.

Bon travail !

Q1	Q2	Q3
/4	/3	/3

1. Toutes sections — 4 points :

a) Enoncez la première et la deuxième loi de Newton. Définissez bien vos notations.

b) Donnez l'expression de la loi de la gravitation universelle (la force gravitationnelle entre deux masses ponctuelles). Définissez bien vos notations et faites un schéma.

c) Considérez un satellite de masse m en orbite circulaire (de rayon r et de période orbitale T) autour de la Terre de masse M. Par analyse dimensionnelle, trouvez la relation $r = f(T, G, M)$ à un facteur multiplicatif près. Détaillez chaque étape de votre raisonnement.

d) En considérant toujours ce satellite en orbite circulaire, exprimez la vitesse v du satellite en utilisant la deuxième loi de Newton. En déduire la troisième loi de Kepler.

Solution 1:

Slides 67, 68, 73, 88

Analyse dimensionnelle :

Si C est une constante, on recherche :

$$\begin{aligned} r &= CM^aG^bT^c \\ L &= M^a\ (L^3T^{-2}M^{-1})^b\ T^c \end{aligned}$$

où on a trouvé les unités de G par la loi de la gravitation universelle : $[G]$ =N m^2 kg^{-2} donc en exprimant les Newton en unités SI, on a : $[G]$ = (kg m s^{-2}) m^2 kg^{-2} = m^3 s^{-2} kg^{-1} = $L^3T^{-2}M^{-1}$.

On a donc un système de 3 équations à 3 inconnues :

$$\begin{aligned} 1 &= 3b \\ 0 &= a - b \\ 0 &= -2b + c \end{aligned}$$

On trouve $a = b = 1/3$ et $c = 2/3$. Donc $r = CM^{1/3}T^{2/3}G^{1/3}$, avec C une constante sans dimensions.

2. Toutes sections — 3 points :

On veut démontrer le deuxième théorème de König, qui permet de calculer l'expression de l'énergie cinétique d'un système de particules.

Soit $\mathcal{R}$ un référentiel inertiel d'origine O. On considère un système $\mathcal{S}$ de N points matériels de masses m_i, $1 \leq i \leq N$. Les positions des points matériels dans $\mathcal{R}$ pourront être notées $\vec{r_i}$ et leurs vitesses $\vec{v_i}$.

a) Enoncez le deuxième théorème de König.

b) Démontrez-le, en définissant bien les symboles utilisés.

c) Supposez que le référentiel inertiel est un repère lié aux étoiles du voisinage solaire (c'est-à-dire proches du Soleil) et que le système $\mathcal{S}$ considéré est la Terre. Expliquez qualitativement, dans ce cas, quelles sont les contributions à l'énergie cinétique totale de la Terre.

Solution 2:

Slides 154

c : Energie cinétique du centre de masse de la Terre, due à la rotation de la Terre autour du Soleil, et énergie cinétique relative due à la rotation de la Terre autour de l'axe des pôles. Comme on supposé que le référentiel lié aux étoiles proches (et donc qui tourne très lentement, avec ces étoiles proches, autour du centre galactique) était inertiel, on n'a pas besoin de considérer l'énergie cinétique de rotation du Soleil autour du centre galactique.

3. Attention, barrez les questions qui ne vous concernent pas :

Math-Bio : — 3 points

a) Expliquez ce qu'est la vitesse de libération.

b) En considérant une fusée qui décolle de la Terre, et en supposant la conservation de son énergie mécanique, démontrez l'expression de la vitesse de libération de la fusée.

Chim et Poly — 3 points

a) Enoncez le principe d'Archimède.

b) Soit un corps solide de volume V_S et de masse volumique ρ_S totalement immergé dans un fluide de masse volumique ρ_f. On note $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur. Quelle est la résultante des forces extérieures $\vec{F_{\text{ext}}}$ exercées sur le solide (en fonction des données de l'énoncé) ?

c) Quelle est la condition de flottaison (pour que le solide monte vers la surface) ? Justifiez.

d) On suppose que le solide flotte ; quel est le volume du solide qui est immergé (dans le fluide) V_F ? Justifiez.

Phys et Math-Phys — 3 points

On suppose que deux ondes sinusoïdales, notées $y_1(x,t)$ et $y_2(x,t)$, de même amplitude A et de pulsation légèrement différentes ω_1 et ω_2, se propagent dans le même sens. On prendra comme conditions initiales $y_1(0,0) = y_2(0,0) = 0$.

a) Donnez l'expression de $y_1(x,t)$ et $y_2(x,t)$.

b) Décrivez qualitativement ce qui se produit en un point fixe de l'espace lorsque ces deux ondes se superposent. Comment s'appelle le phénomène observé ?

c) Décrivez mathématiquement ce phénomène.

Solution 3:

Math-Bio : Slides 138
Chim et Poly : Slides 275, 277
Phys et Math-Phys : Slides 399, 400

Examen de Physique Générale – PHYS-F110
Exercices

Année 2021-2022 - Janvier 2022

Nom :

Prénom :

N° de carte d'étudiant :

Section (entourer) : Chimie — Math-Bio — Math-Phys — Physique — Sciences (Polyvalente)

Consignes générales :

1. Ecrivez immédiatement vos prénom, nom, numéro de carte d'étudiant et section.
2. Déposez votre carte d'étudiant sur votre table pour la prise des présences.
3. Vérifiez que votre énoncé comporte bien **6 feuilles (5 questions)**.
4. **Barrez immédiatement les questions qui ne concernent pas votre section**.
5. Ne dégrafez pas les pages.
6. Essayez de répondre à toutes les sous-questions, elles sont souvent indépendantes les unes des autres.
7. Les réponses doivent toutes être clairement justifiées.
8. Vous avez droit à un aide-mémoire.
9. Les GSM, tablettes, smartwatches et autres moyens de communication sont interdits. Ils doivent être éteints et rangés le long du mur. En aucun cas vous ne pouvez avoir un GSM (ou autre moyen de communication) à portée de main, même éteint.
10. Vous pouvez demander des feuilles blanches supplémentaires pour répondre. Inscrivez-y votre nom et prénom et insérez-les dans votre énoncé agrafé quand vous rendrez votre copie.
11. Ne répondez pas en rouge, cette couleur étant réservée pour la correction.
12. Cette partie Exercices de l'examen dure **2h10**.

Bon travail !

Q1	Q2 - Math-Bio	Q3	Q4 - Tous sauf Math-Bio	Q5 - Phys, Math-Phys
/5	/4	/4	/4	/2

1. Exercice – Tous – 5 points :

Une bille sphérique homogène de masse m et de rayon r roule sans glisser depuis le sommet A d'un hémisphère de rayon R. On suppose la vitesse initiale négligeable. Elle décolle de la sphère en B ; l'angle θ (= angle entre OA et OB) vaut alors θ_B.

On note $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur.

a) Détaillez les forces agissant sur la bille lorsqu'elle se trouve entre A et B et représentez-les sur le schéma (ou un schéma séparé, au choix).

b) Détaillez les forces agissant sur la bille lorsqu'elle se trouve en B et représentez-les sur un schéma séparé.

c) Quel type de mouvement le centre de masse de la bille suit-il entre A et B ?

d) En appliquant la 2ème loi de Newton que vous projetterez sur un axe adéquat, donnez l'expression de la vitesse v_B du centre de masse de la bille en B (quand la bille décolle) en fonction, en particulier, de l'angle θ_B.

e) Donnez l'expression de l'énergie mécanique en A.

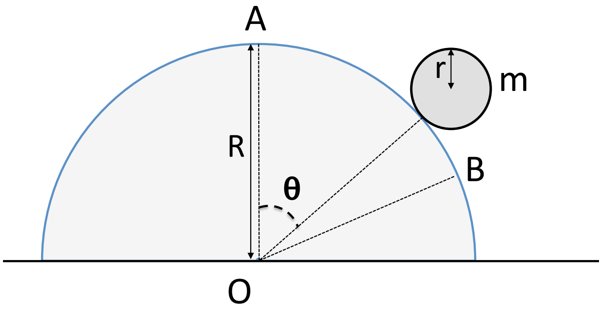
f) Donnez l'expression de l'énergie mécanique en B.

g) Le frottement entre la bille et la sphère est-il statique ou cinétique ? La force de frottement entre la bille et la sphère effectue-t-elle un travail ? Justifiez. Que peut-on en déduire quant à la conservation de l'énergie mécanique entre A et B ?

h) En déduire la valeur numérique de l'angle θ_B.

i) Donnez l'expression de v_B, la vitesse du centre de masse de la bille, quand celle-ci quitte la sphère, en fonction (de certaines) des données de l'énoncé : m, r, R, g.

Donnée : Moment d'inertie d'une sphère de masse m et de rayon r par rapport à son centre de masse : $I = \frac{2}{5}mr^2$.



Solution 1:

a) $m\vec{g}$, appliqué au centre de masse de la bille, vertical, orienté vers le bas.
$\vec{N}$, réaction de l'hémisphère sur la bille, appliquée au point de contact sphère-bille, dirigée selon la droite joignant le centre de la sphère au centre de la bille, orientée vers le haut.
$\vec{F_{\text{frott}}}$, force de frottement statique, tangente à la bille au point de contact avec l'hémisphère, orientée vers le haut.

b) $m\vec{g}$

c) Le centre de masse suit un mouvement circulaire accéléré.

d) En projetant la 2eme loi de Newton sur la droite joignant les centres des deux sphères, et orientée positivement vers O :

$$m\frac{v^2}{R+r} = mg\cos\theta - N$$

En B la bille décolle, $\vec{N} = \vec{0}$.

$$\begin{aligned} m\frac{v_B^2}{R+r} &= mg\cos\theta_B \\ v_B &= \sqrt{(R+r)g\cos\theta_B} \end{aligned}$$

e) En A : $E_m = E_c + E_p = 0 + mg(R+r)$

f) On note ω la vitesse angulaire de la bille. Attention à ne pas oublier l'énergie cinétique de rotation.
En B : $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mg(R+r)\cos\theta_B$.

g) Roulement sans glissement donc frottement statique ; le point d'application de la force de frottement ne se déplace pas ; donc cette force n'effectue pas de travail. L'énergie mécanique est donc conservée entre A et B.

h) Comme on a un roulement sans glissement, on a $v = \omega r$.
Comme $I = \frac{2}{5}mr^2$,

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{5}r^2\omega^2 + mg(R+r)\cos\theta_B \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{5}mv^2 + mg(R+r)\cos\theta_B \\ &= \frac{7}{10}mv^2 + mg(R+r)\cos\theta_B \end{aligned}$$

Par conservation de l'énergie mécanique :

$$\frac{7}{10}mv^2 = mg(R+r)(1-\cos\theta_B)$$

En éliminant v^2 :

$$\begin{aligned} \frac{10}{7}(1-\cos\theta_B) &= \cos\theta_B \\ \cos\theta_B &= \frac{10}{17} \end{aligned}$$

Donc $\theta_B = 54°$.

i) $v_B = \sqrt{\frac{10}{7}g(R+r)}$

2. Exercice – Uniquement Math-Bio - 4 points :

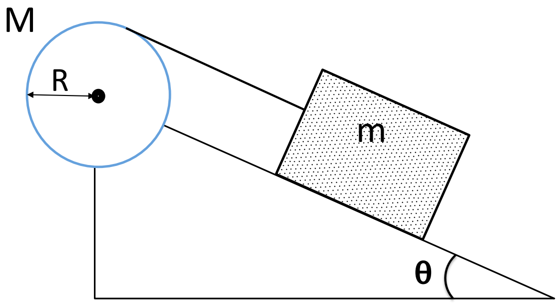
Un bloc de masse m peut glisser sans frottement vers le bas d'un plan incliné faisant un angle θ avec l'horizontale. Il est relié par une corde inextensible à une poulie de masse M et de rayon R, assimilable à un disque. La corde ne glisse pas sur la poulie lorsque la poulie tourne.

a) Représentez les forces agissant sur le bloc ; précisez leur point d'application.

b) Quelle est la relation entre l'accélération angulaire de la poulie et l'accélération linéaire du bloc ?

c) Déterminer l'accélération angulaire de la poulie en fonction (de certaines) des données de l'énoncé : θ, m, M, R, g.

Remarque : le moment d'inertie d'un disque de masse M et de rayon R est $\frac{1}{2}MR^2$.



Solution 2:

a) $m\vec{g}$, appliquée au centre de masse du bloc, vers le bas.
La réaction $\vec{N}$ du plan incliné, appliquée à l'interface plan/bloc, perpendiculaire au plan, vers le haut.
Le tension dans la corde $\vec{T}$, appliquée au point d'attache de la corde sur le bloc, le long de la corde, vers le haut.

b) Comme la corde ne glisse pas, on a : $a_y = R\gamma$, a_y accélération linéaire, γ accélération angulaire.

c) 2eme loi de Newton appliquée au bloc, projetée sur l'axe (Oy) le long du plan incliné, orienté vers le bas :

$$mg\sin\theta - T = ma_y$$

Théorème du moment cinétique appliqué à la poulie, par rapport au centre de masse de la poulie :

$$RT = 1/2MR^2\gamma$$

En éliminant T entre ces deux équations :

$$\begin{aligned} mg\sin\theta - 1/2Ma_y &= ma_y \\ a_y &= \tfrac{m}{m+M/2}g\sin\theta \\ \gamma &= \tfrac{m}{m+M/2}\tfrac{g}{R}\sin\theta \end{aligned}$$

3. Exercice – Tous – 4 points :

Une balle de fusil de masse m est tirée verticalement avec une vitesse v vers un bloc de bois de masse M, initialement au repos et situé juste au-dessus. On suppose que la balle heurte le bloc à la vitesse v (on néglige la distance entre le fusil et le bloc de bois).

Calculez h, la hauteur maximale atteinte par le bloc de bois lorsque la balle se sera encastrée dedans. On suppose pour simplifier que la balle s'immobilise instantanément dès qu'elle s'est encastrée sur la face inférieure du bloc.

Si certaines quantités physiques sont conservées, on expliquera systématiquement lesquelles, et pourquoi.

Solution 3:

Il faut procéder en deux temps :

a) Collision totalement inélastique. Conservation de la quantité de mouvement, projetée sur un axe vertical :
$mv = (m+M)v'$

b) Conservation de l'énergie mécanique entre l'instant juste après le choc et le moment où le bloc atteint sa hauteur maximale :

$$\begin{aligned} 1/2(m+M)v'^2 + 0 &= 0 + (m+M)gh \\ v' &= \sqrt{2gh} \end{aligned}$$

donc

$$h = \frac{1}{2g}(\frac{m}{m+M}v)^2$$

4. Exercice – Tous sauf Math-Bio - 4 points :

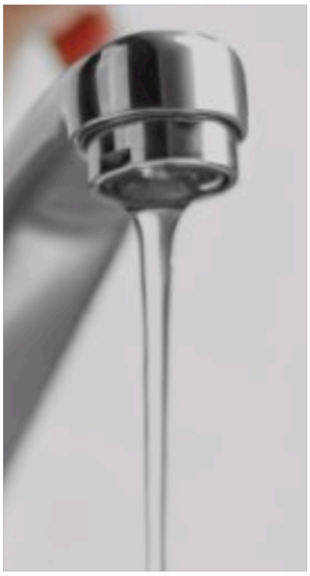
Le diamètre d'un jet d'eau (de masse volumique ρ constante) s'écoulant d'un robinet diminue au fur et à mesure de sa chute. Considérons le point A (quand l'eau sort du robinet) et le point B (position la plus basse). Soient :

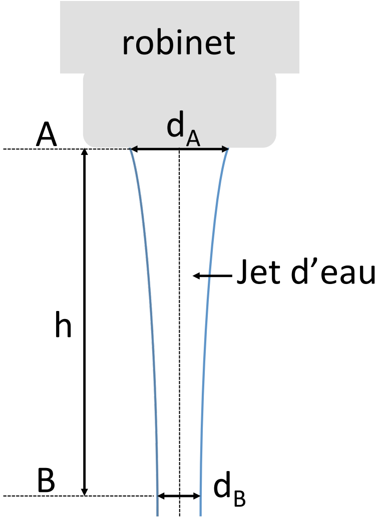
- d_A et d_B les diamètres du jet en A et en B
- v_A et v_B les vitesses d'écoulement en A et en B
- h la hauteur du jet
- g l'accélération de la gravité

a) Ecrivez l'équation de continuité entre les points A et B, en fonction des données de l'énoncé. Vous préciserez les éventuelles hypothèses.

b) Exprimez le rapport d_B/d_A en fonction de v_A, h et g.
Justifiez bien les éventuelles hypothèses et simplifications.
Commentez : le résultat (concernant d_B/d_A) est-il qualitativement conforme à l'observation ?

c) Quelle(s) hypothèse(s) risquent de ne pas être entièrement vérifiées en pratique ?





Solution 4:

a) L'équation de continuité donne :

$$\rho_A v_A \pi (\frac{d_A}{2})^2 = \rho_B v_B \pi (\frac{d_B}{2})^2$$

Comme $\rho_A = \rho_B = \rho$, on a :

$$v_B = v_A (\frac{d_A}{d_B})^2$$

b) Le théorème de Bernouilli nécessite de faire les hypothèses suivantes, qu'on suppose d'application :

- Le fluide est incompressible ($\rho = \text{cte}$)
- Ecoulement stationnaire
- Ecoulement laminaire
- Fluide parfait (non visqueux, donc pas de frottements, donc conservation de l'énergie mécanique)

$$p_A + 1/2\rho v_A^2 + \rho g h = p_B + 1/2\rho v_B^2 + 0$$

Le jet est à l'air libre donc $p_A = p_B = p_{\text{atm}}$.

$$\begin{aligned} v_A^2 + 2gh &= v_A^2(\tfrac{d_A}{d_B})^2 \\ \frac{d_B}{d_A} &= \left(\frac{v_A^2}{v_A^2+2gh}\right)^{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

Plus h augmente, plus $d_B < d_A$ donc le jet s'amincit.

c) L'écoulement peut présenter une certaine viscosité. L'écoulement pourrait devenir turbulent et donc ne plus être laminaire à partir d'une certaine hauteur de chute. En pratique, il se trouve qu'avant même d'atteindre cette turbulence, l'écoulement devient tellement mince que des effets de tension de surface à l'interface eau/air (instabilités de Rayleigh) déstabilisent l'écoulement et le séparent en gouttelettes. En effet, lorsque le jet s'amincit, la surface par élément de volume augmente, ce qui coûte de l'énergie. Finalement, la solution la moins "énergivore" est de séparer l'écoulement en gouttelettes.

5. Exercice – Uniquement Physique et Math-physique – 2 points :

Une masse m, suspendue à un ressort de constante de raideur k, peut :

— soit osciller verticalement (avec la période T_{v})

— soit osciller latéralement, à la manière d'un pendule (avec la période T_{p})

mais on suppose qu'elle ne fait pas les deux à la fois.

On se place, dans tous les cas, dans le régime des oscillations de faible amplitude.

Soit ℓ_{eq} la longueur du ressort lorsque la masse y est attachée et qu'elle est au repos. Soit ℓ_0 la longueur à vide du ressort et $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur.

a) Exprimez ℓ_{eq} en fonction de ℓ_0 et des données de l'énoncé.

b) Par analyse dimensionnelle, exprimer (à un facteur multiplicatif près) T_{v} en fonction de la masse m et de la constante de raideur k.

c) Par analyse dimensionnelle, exprimer (à un facteur multiplicatif près) T_{p} en fonction de la longueur du pendule et de g.

d) En supposant que les deux facteurs multiplicatifs précédents sont égaux, calculez $T_{\text{p}}/T_{\text{v}}$. Quelle période d'oscillation est la plus longue ?

Solution 5:

a) A l'équilibre :

$$\begin{aligned} mg &= k(l_{\text{eq}} - l_0) \\ l_{\text{eq}} &= l_0 + mg/k \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} T_{\text{v}} &= m^a k^b \\ s^1 &= kg^a (kg\ s^{-2})^b \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} 0 &= a + b \\ 1 &= -2b \end{aligned}$$

Donc $b = -1/2$ et $a = 1/2$. Donc (si C_1 est une constante) :

$$T_{\text{v}} = C_1 \sqrt{\frac{m}{k}}$$

c)

$$\begin{aligned} T_{\text{p}} &= L^a g^b \\ s^1 &= m^a (ms^{-2})^b \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} 0 &= a + b \\ 1 &= -2b \end{aligned}$$

Donc $b = -1/2$ et $a = 1/2$. Donc (si C_2 est une constante) :

$$\begin{aligned} T_{\text{p}} &= C_2 \sqrt{\frac{L}{g}} \\ &= C_2 \sqrt{\frac{l_0 + mg/k}{g}} \end{aligned}$$

d) Donc comme $C_1 = C_2 (= 2\pi)$: $T_\text{p}/T_\text{v} = \sqrt{\frac{l_0/g+m/k}{m/k}} = \sqrt{1+\frac{l_0 k}{mg}} > 1$

Donc $T_\text{p} > T_\text{v}$.

Math-f104

Ce cours est plutôt une aide à la réussite qu'un cours. Effectivement, il va vous aider à démontrer des choses et à avoir un esprit plus logique. Je n'ai pas grand chose à dire sur ce cours si ce n'est qu'il n'est pas très dur donc c'est toujours chouette d'avoir 10 crédits de « gagnés ». Beaucoup de gens disent qu'aller à ces tps ne sert à rien mais je trouve qu'il est fort intéressant d'y aller quand même. Il n'y a pas vraiment d'examen à proprement parler pour ce cours mais les interrogations sont vraiment pas très dures.

Cercle des Sciences