Cercle des Sciences

Année académique 2022-2023

Recueil d'examens

Géologie

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES

Introduction

Hello à toi, futur.e géologue :)
Tu viens de rentrer à l'unif et t'es un peu déboussolé.e par tous les changements, les nouveaux cours et la manière de préparer tes examens ? Alors ce recueil te sera sans doute plus qu'utile.
Dans les pages qui suivront, tu trouveras les descriptions de chaque cours + les examens des années précédentes (corrigés mais parfois, quelques fautes s'y sont glissées). Je te conseille fort fort de consulter ce recueil avant un examen pour te préparer au mieux, une fois que tu auras étudié la matière.

Pour t'expliquer un petit peu, les matières du Q1 et du Q2 sont assez différentes.
En BA1, tu seras bassiné.e de sciences (45 crédits): math, bio, chimie, physique. Alors accroche-toi vraiment sans te demander pourquoi tu as choisi de faire des études en géologie. Tu auras une base scientifique solide qui t'aidera plus tard et surtout, le meilleur reste à venir :)
En novembre, des tests facultatifs en sciences te seront proposés. Si tu les rates, rien n'est comptabilisé. Si tu les réussis, ces notes compteront pour 20-25% de ta note de janvier. Et crois-moi, ça peut vraiment te sauver ! Alors même si tu t'amuses à fond pendant l'année (ce que je te souhaite plus que tout), je te conseille vraiment de les faire, c'est QUE du bonus ! Autre chose qui peut te sauver BA1, c'est que si tes examens de janvier ne se passent pas bien, tu peux les repasser en juin (et en août en seconde sess, comme pour tous les exams).
Quoi qu'il arrive, ne baisse pas les bras et dis-toi vraiment que le meilleur reste à venir ! N'hésite pas aussi à demander de l'aide à d'autres étudiant.e.s en géo de ton année ou des années supérieures. On est une petite famille donc autant en profiter pour rester solidaires ;)

Nina Nemry, cooptée géo 2022-2023

Table des matières

Chim-F101 / 20 crédits

Ce cours te suivra toute l'année. C'est sans doute un des cours voire LE cours le plus compliqué de BA1.
Les cours théoriques sont intéressants pour bien comprendre la matière parce que les slides ne sont pas toujours bien clairs et complets. Je te conseille d'y aller. Quant aux séminaires (les séances d'exos) je te conseille vraiment vraiment d'y aller ! Les assistant.e.s font des récaps au début de chaque séance pour t'aider un max à résoudre les exos. Si tu te sens un peu perdu.e ou que tu ne comprends pas tout, n'hésite pas à aller en guidance :)
En tout début d'année, il y a des tests en ligne (travaux personnels) qui sont une sorte de remise à niveau par rapport à la matière généralement vue en secondaire. Tu peux gagner un point bonus en janvier (1/20 !!) en les réussissant et en validant une des questions de l'exam de janvier. Puis il y a les tests de novembre dont je t'ai un peu déjà parlé. Essaie de gratter un max de points comme ça déjà !!
Tu te doutes bien, les examens sont généralement plus difficiles que les séminaires. Donc avant d'essayer de faire un exam, je te conseille de refaire tous tous tous les exos des séminaires. Puis de t'entraîner avec un max d'exams !
L'examen de janvier est divisé en deux parties : la théorique et les exercices. Celui de juin, seulement exercices. Janvier et juin, c'est 50/50. D'ailleurs, la partie exercice (janvier comme juin) est à cours ouvert donc prends avec toi les séminaires les plus complets possibles, des anciens exams,... Bref tout ce qui pourra te sauver !
En juin, tu auras aussi un oral, qui comptera pour une partie de de tes points de chimie.
Aussi, au Q1, tu auras des labos (4-5 en tout). En décembre, tu auras un exam de labo divisé en deux parties. Une partie théorique (sous forme de test écrit) qui reprend quelques concepts de labos (des formules avec unités, calculs d'erreur,...). Puis une partie pratique où tu devras réaliser un titrage, dilution et calcul d'erreur. Si tu es allé.e à tous les labos et que tu te les remémores bien avant dans tous les détails, ça devrait le faire !

Questionnaire n°400

Faculté des Sciences

Année académique 2014/2015

PREMIERE ANNEE DE BACHELIER EN SCIENCES BIOLOGIQUES, CHIMIQUES, GEOGRAPHIQUES, GEOLOGIQUES, PHYSIQUES, EN SCIENCES DE L'INGENIEUR (ORIENTATION BIOINGENIEUR), MATHEMATIQUES (ORIENTATION BIOLOGIE), PREMIERE ANNEE POLYVALENTE EN SCIENCES

INTERROGATION DE CHIMIE du 5 janvier 2015

Première partie - Théorie

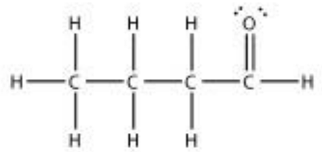
NOM, Prénom: ....

Section et numéro de matricule : 1

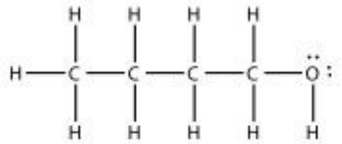
QUESTION 1 *(15 points).*

Considérez trois corps purs :

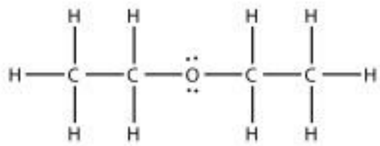
- le butanal (CH_3-CH_2-CH_2-CHO)



- le butan-1-ol (CH_3-CH_2-CH_2-CH_2-OH)



- l'éthoxyéthane (CH_3-CH_2-O-CH_2-CH_3)



a) Classez ces composés dans l'ordre croissant de leur température d'ébullition.

b) Justifiez ce choix sur base des interactions existant entre les molécules de ces composés.

Questionnaire n°400

Interrogation de chimie – CHIM-F-101 – 05 janvier 2015 – Théorie

NOM, Prénom: .... ________________

Section et numéro de matricule : ....

Question 2 *(20 points)*

- Définissez le terme « adiabatique ».

- Expliquez comment évoluera la vitesse moyenne des particules d'un gaz si l'on augmente le volume de manière adiabatique.

- Quel sera l'effet de cette opération sur la température du gaz ?

Considérez la détente isotherme d'un gaz.

- Existe-t-il un transfert de chaleur entre l'environnement et le système ? Justifiez.

- La vitesse moyenne des molécules est-elle modifiée ? Justifiez.

Considérez la détente isotherme de deux récipients de volume identique. L'un contient de l'argon et l'autre du diazote. Existe-t-il une éventuelle variation de l'entropie de l'environnement suite à l'opération ? Si oui, pour quel récipient cette variation serait-elle la plus forte et quel serait le signe de celle-ci ? Justifiez votre réponse.

Deux récipients de 2,241 L sont portés à la température de 0°C. L'un contient 1,000 mol d'argon et l'autre 1,000 mol d'ammoniac.

- Expliquez à quel gaz l'équation d'état des gaz parfaits s'applique le mieux.

- Pour quel récipient la pression mesurée est-elle la plus élevée ? Justifiez et estimez la valeur de celle-ci (sans machine).

Questionnaire n°400

Interrogation de chimie – CHIM-F-101 – 05 janvier 2015 – Théorie

NOM, Prénom: .... ________________

Section et numéro de matricule : 3

Question 3 *(20 points)*

Face à l'évolution des cours et des réserves de pétrole, certains acteurs de la pétrochimie ont développé des unités de production de carburant liquide synthétisé à partir d'un mélange de CO(g) + H_2(g) en présence d'un catalyseur.

1) Ecrivez l'équation chimique équilibrée de la réaction qui produit de l'octane (C_8H_{18}) et de la vapeur d'eau.
2) Prédisez le signe de la variation d'entropie de la réaction. Justifiez.
3) La réaction étant spontanée dans les conditions de la synthèse, quelle conclusion pouvez-vous tirer sur le signe de $\Delta_r H$? Justifiez votre réponse.
4) Existe-t-il une température d'inversion pour cette réaction ? Justifiez.

Questionnaire n°400

Interrogation de chimie – CHIM-F-101 – 05 janvier 2015 – Théorie

NOM, Prénom: .... ____________________

Section et numéro de matricule : 4

Question 4 *(10 points)*

Soit la configuration électronique complète d'une molécule à l'état fondamental :

$$(\sigma_{1s})^2\ (\sigma_{1s}^{\ *})^2\ (\sigma_{2s})^2\ (\sigma_{2s}^{\ *})^2\ (\pi_{2p})^2\ (\pi_{2p})^2\ (\sigma_{2p})^2\ (\pi_{2p}^{\ *})^1$$

a) A quelle molécule – CO, O_2, N_2, NO ou F_2 – correspond-elle ?
b) Comparez les longueurs de liaison de cette molécule avec celles de son cation monovalent et justifiez votre réponse.
c) Cette molécule est-elle para- ou diamagnétique? Expliquez.

(Les symboles des éléments de la deuxième période sont dans l'ordre Li, Be, B, C, N, O, F, Ne.)

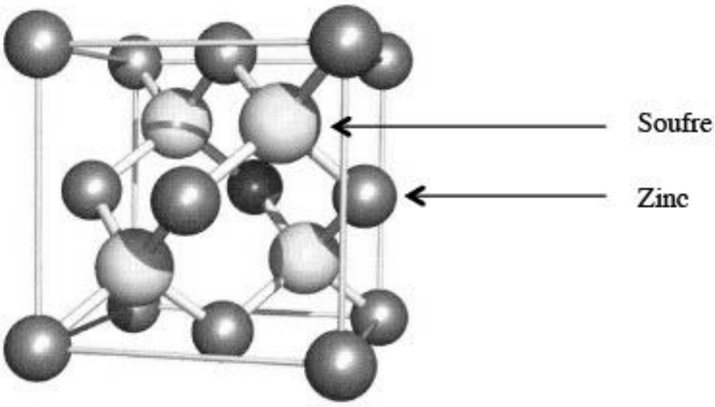
NOM, Prénom: ....

Section et numéro de matricule : ....

5

QUESTION 5 *(15 points)*

La figure ci-dessous représente la maille cristalline d'un minéral constitué d'atomes de zinc et de soufre.



a) Sur base d'un décompte d'atomes, identifiez la formule brute de ce composé.

b) Le soufre et le zinc appartiennent à la 3ème et à la 4ème période, respectivement. Expliquez pourquoi on a représenté les atomes de soufre plus volumineux que les atomes de zinc.

Faculté des Sciences

Année académique 2014/2015

PREMIERE ANNEE DE BACHELIER EN SCIENCES BIOLOGIQUES, CHIMIQUES, GEOGRAPHIQUES, GEOLOGIQUES, PHYSIQUES, EN SCIENCES DE L'INGENIEUR (ORIENTATION BIOINGENIEUR), MATHEMATIQUES (ORIENTATION BIOLOGIE), PREMIERE ANNEE POLYVALENTE EN SCIENCES

INTERROGATION DE CHIMIE du 5 janvier 2015

Seconde partie - Exercices

NOM, Prénom: .... ________________

Section et numéro de matricule : 1

QUESTION 1 *(25 points). La réussite de cette question validera, le cas échéant, les travaux personnels des étudiants en sciences physiques.*

L'alliage Sn/Pb est souvent utilisé en soudure car ce mélange fond à basse température (183°C). Quand 5,00 g de cet alliage sont plongés dans une solution aqueuse de chlorure d'hydrogène en excès, un gaz se dégage et il y a apparition d'un précipité blanc de masse 2,55 g.
Les états d'oxydation des deux métaux sont de +2 en fin de réaction.

a) Ecrivez les équations ioniques nettes des processus chimiques observés lorsque l'alliage est plongé dans la solution de chlorure d'hydrogène.
b) Quelle est la fraction massique de l'étain dans cet alliage ?
c) Quel est le volume du gaz dégagé à température et pression normales ?

Questionnaire n°400

Interrogation de chimie – CHIM-F-101 – 05 janvier 2015 – Exercices

NOM, Prénom: .... ____________________

Section et numéro de matricule : 2

QUESTION 2 *(25 points)*

La vélocité d'un électron éjecté d'une surface métallique par un photon est de $6{,}201.10^2$ km/s.

a) Quelle est la longueur d'onde associée au mouvement de l'électron éjecté ?

b) Que vaut le travail d'extraction si la fréquence du rayonnement pour éjecter un électron est de $1{,}100.10^{15}$ Hz ?

c) Dans quelle partie du spectre électromagnétique se situe l'énergie utilisée pour arracher l'électron ?

d) Quelle est l'incertitude minimale sur la position de l'électron sachant que sa vitesse est connue à $\pm$ 0,1 km/s ?

Questionnaire n°400

Interrogation de chimie – CHIM-F-101 – 05 janvier 2015 – Exercices

NOM, Prénom: .... ____________________

Section et numéro de matricule : 3

QUESTION 3 *(25 points)*

L'indium est un métal gris brillant à bas point de fusion (156 °C). Sa récente utilisation massive, notamment dans les écrans plats, a fait passer son prix de 80 €/kg à 800 €/kg entre 2001 et 2005. La pénurie actuelle en fait une matière première minérale d'un enjeu socio-économique majeur.
Un industriel veut faire fondre 1,000 kg d'indium pur pour en faire un lingot. Pour cela, il utilise un dispositif qui permet la combustion complète d'un mélange gazeux de méthane et d'éthane. À la fin de la réaction, 5,342 g de dioxyde de carbone et d'eau (liquide) ont été produits. La température initiale de l'indium est de 25°C ; son enthalpie de fusion est de 3,270 $kJ.mol^{-1}$ et sa capacité calorifique est de 26,75 $J.mol^{-1}.K^{-1}$.

a) Ecrivez les réactions de combustion des deux gaz.

b) Quel volume du mélange de gaz à 25 °C sous 1,000 atm est nécessaire pour réaliser cette opération ?

(*Considérez l'absence de toute perte calorifique et la capacité calorifique constante dans la plage de température mentionnée. Négligez la variation de l'enthalpie molaire de réaction avec la température.*)

NOM, Prénom: ....

Section et numéro de matricule : ....

4

QUESTION 4 *(25 points)*

Une expérience de diffraction des rayons X (λ = 0,1541 nm) d'un cristal donne un angle de diffraction de premier ordre de 29,32° pour le plan (002). La substance a une masse volumique de 10,22 g/cm^3 et ses atomes adoptent une structure cristalline de type cubique centré.

a) Représentez en trois dimensions une maille élémentaire du cristal et indiquez-y les axes et le plan (002).

Au moyen des données, répondez aux questions suivantes :

b) Quelle est la masse molaire de cet élément ?
c) Combien d'atomes un plan (001) d'une surface de 1,000 cm^2 traverse-t-il ?

Questionnaire n°001

ULB

Faculté des Sciences

Année académique 2014/2015

PREMIERE ANNEE DE BACHELIER EN SCIENCES BIOLOGIQUES, CHIMIQUES, GEOGRAPHIQUES, GEOLOGIQUES, PHYSIQUES, EN SCIENCES DE L'INGENIEUR (ORIENTATION BIOINGENIEUR), PREMIERE ANNEE POLYVALENTE EN SCIENCES

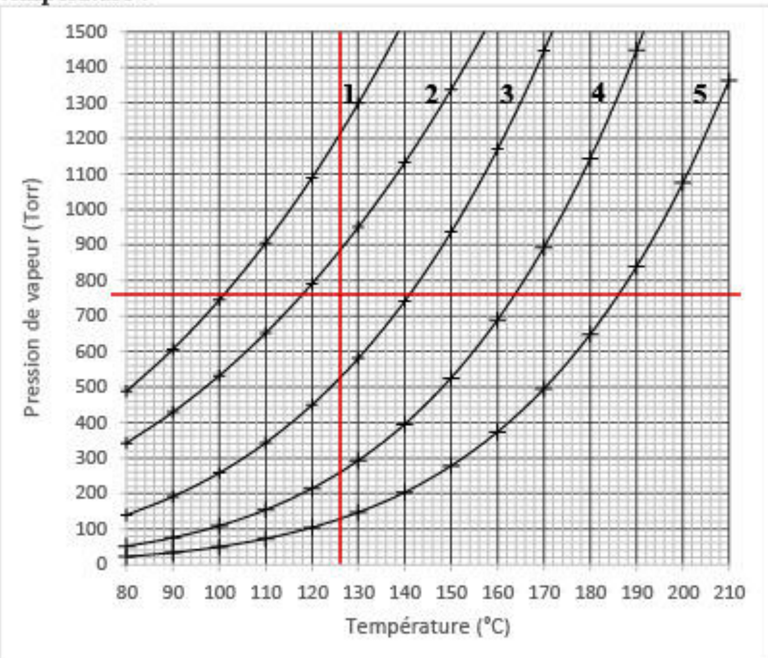
EXAMEN DE CHIMIE du 26 mai 2015

NOM, Prénom: ....

Section et numéro de matricule : 1

QUESTION 1 *(20 points). Une feuille supplémentaire est fournie pour répondre à cette question*

Les pressions de vapeur de différents acides carboxyliques ont été mesurées en fonction de la température :



1) HCOOH

2) CH_3COOH

3) CH_3CH_2COOH

4) $CH_3(CH_2)_2COOH$

5) $CH_3(CH_2)_3COOH$

a) Complétez le tableau ci-dessous. Détaillez vos calculs sur la feuille supplémentaire fournie.

	Acide propanoïque	Acide pentanoïque
Formule chimique	CH_3CH_2COOH	$CH_3(CH_2)_3COOH$
$T_{ébul}$ (°C) (à P atmosphérique)	141	186
ΔH^0_{vap} (kJ/mol)	33.8	45.9

b) À 126°C, l'acide propanoïque et l'acide pentanoïque forment un mélange idéal. On considère un mélange au-dessus duquel la pression totale au-dessus du mélange est égale à 330 Torr. Calculer les fractions molaires des deux acides dans la phase liquide et la phase gazeuse.

c) Dessinez, en utilisant les valeurs calculées, l'isotherme du mélange à 126 °C sur le graphique situé au bas de la feuille fournie.

Questionnaire n°001

NOM, Prénom: .... ____________________

....

Section et numéro de matricule : 1

---

a) Exemple de données sur le graphique

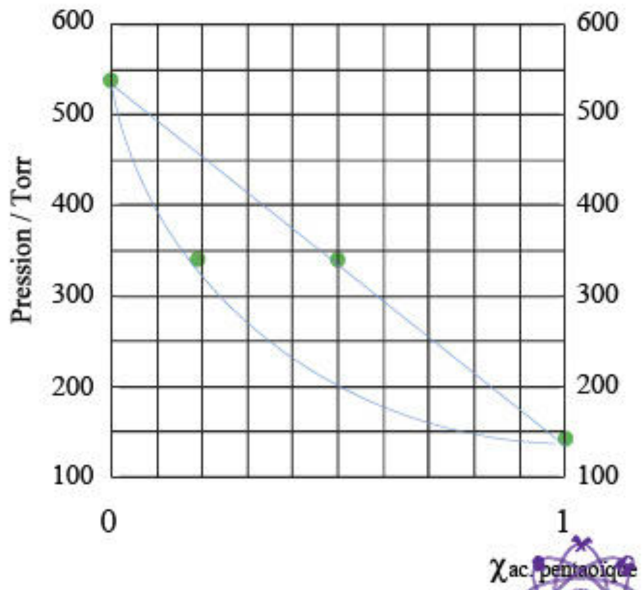
	T/°C	T/K	P/Torr
Acide propanoïque	170 100	443,15 373,15	1450 260
Acide pentanoïque	210 120	483,15 393,15	1360 100

Acide propanoïque : $\Delta H^0_{vap} = + 33{,}8 \text{ kJ.mol}^{-1}$
Acide pentanoïque : $\Delta H^0_{vap} = + 45{,}8 \text{ kJ.mol}^{-1}$

b) Acide propanoïque seul : $P^0_{126°C} = 530$ Torr
Acide pentanoïque seul : $P^0_{126°C} = 130$ Torr

c)

$$\chi^L_{Ac.propanoïque} = \frac{200}{400} = 0{,}500 \rightarrow \chi^L_{Ac.pentanoïque} = 1\text{- } 0{,}500 = 0{,}500$$
$$\chi^V_{Ac.propanoïque} = \frac{0{,}500.530}{330} = 0{,}803 \rightarrow \chi^V_{Ac.pentanoïque} = 1\text{- } 0{,}0803 = 0{,}197$$



Questionnaire n°001

Examen de chimie – CHIM-F-101 – 26 mai 2015

NOM, Prénom: .... ____________

Section et numéro de matricule : 2

Question 2 *(20 points)*

a) Des ions sulfures sont progressivement ajoutés à une solution contenant des ions cadmium, ferreux et ferrique. La concentration de chaque ion est égale à 10^{-6} mol.L^{-1}. Déterminez et justifiez la séquence d'apparition des précipités.

b) Calculez la solubilité du sulfure de cadmium dans une solution aqueuse saturée de H_2S à 0,1 mol.L^{-1} ajustée à pH = 2,0 à 25°C.

a)

La séquence d'apparition des précipités suit l'ordre croissant des concentrations en ions sulfures calculées :

$Fe_2S_3(s)$ puis CdS(s) puis FeS(s)
1 2 3

b)

$[Cd^{2+}] = 1{,}4.10^{-13}$ mol.L^{-1}

a) $S^{2-} + Fe^{3+} \rightleftharpoons Fe_2S_3(s)$; $K_S = \frac{1}{[Fe^{3+}][S^{2-}]}$ $\Leftrightarrow$ $[S^{2-}] = \frac{1}{[Fe^{3+}]K_S} = 1.10^{91}$

Pareil pour CdS : $[S^{2-}] = 7{,}14\ 10^{34}$
FeS : $[S^{2-}] = 6{,}29.10^{24}$

$\}$ Celui qui a besoin d'une concentration plus petite precipite d'abord.

Questionnaire n°001

Examen de chimie – CHIM-F-101 – 26 mai 2015

NOM, Prénom: .... ________________

Section et numéro de matricule : 3

QUESTION 3 *(20 points)*

Soit la pile à 298K :

Fe (s)	|	Fe^{3+} (aq) = 0,600 mol.L^{-1}; V= 1,00 L	||	$[CuCl_4]^{2-}$ (aq) = 0,600 mol.L^{-1} $[CuCl_2]^{-}$ (aq) = 0,300 mol.L^{-1} Cl^{-} (aq) = 3,00 mol.L^{-1}; V= 1,00 L	|	Pt (s)

a) Ecrivez les équations des demi-réactions qui se produisent à la cathode et à l'anode, ainsi que l'équation de la réaction globale.

b) A l'aide des constantes de complexation des ions Cu(I) et Cu(II) et de la table des potentiels standard en solution aqueuse acide, calculez le potentiel standard de la cathode.

c) Calculez la force électromotrice de cette pile.

d) Quelle masse fer sera déposée sur l'électrode de fer si ce système est soumis à une électrolyse opérée avec un courant de 3,00 A pendant 90,0 minutes ? Que vaudra la force électromotrice après l'électrolyse ?

a)

anode : $Fe(s) \rightleftharpoons Fe^{3+}(aq) + 3\ e^-$

cathode : $[CuCl_4]^{2-}(aq) + 1\ e^- \rightleftharpoons [CuCl_2]^-(aq) + 2\ Cl^-(aq)$

équation globale : $Fe(s) + 3\ [CuCl_4]^{2-}(aq) \rightleftharpoons Fe^{3+}(aq) + 3\ [CuCl_2]^-(aq) + 6\ Cl^-(aq)$

b) $\rightarrow E° = 0{,}726 V$

c) $E_{pile} = E_{cathode} - E_{anode} = +\ 0{,}729\ V$

d) $\Delta E = +0{,}763\ V$

Questionnaire n°001

Examen de chimie – CHIM-F-101 – 26 mai 2015

NOM, Prénom: ....

Section et numéro de matricule : 4

QUESTION 4 *(20 points)*

a) On dispose de deux solutions aqueuses :
- de l'acide maléique HOOC-CH=CH-COOH à 0,300 $mol.L^{-1}$
- de l'hydroxyde de sodium à 0,200 $mol.L^{-1}$. Calculez le pH du deuxième point d'équivalence du titrage de 20,0 mL de la solution acide par la base forte. Écrivez les deux équations de neutralisation de ce diacide. Mentionnez un indicateur approprié.

b) On dispose des deux solutions suivantes :
- une solution aqueuse de maléate de sodium à 0,100 $mol.L^{-1}$
- une solution aqueuse de chlorure d'hydrogène à 0,100 $mol.L^{-1}$.

Quels volumes des deux solutions faut-il mélanger pour obtenir 1,00 litre d'une solution tampon de pH égal à 6,00. Ecrivez la réaction chimique qui se produit lors du mélange.

c) Quel sera le pH après avoir rajouté à la solution tampon 1,00 litre de solution de NaCl à 0,100 $mol.L^{-1}$?

posons HOOC-CH = CH-COOH(aq) = $H_2A(aq)$

a)

→ pOH = 4,529 pH= 9,47

b)

→ Acide chlorhydrique : 0,350L

→ Maléate de sodium : 0, 650L

c) Le NaCl (aq) n'a aucune activité acido-basique. On dilue un mélange tampon, ce qui n'affecte pas le pH de celui-ci.

a) $HOOC-CH=CH-COOH + OH^{(-)} \rightleftharpoons HOOC-CH=CH-COO^{(-)} + H_2O$

$HOOC-CH=CH-COO^{(-)} + OH^{(-)} \rightleftharpoons {}^{(-)}OOC-CH=CH-COO^{(-)} + H_2O$

20 ml = 6.10^{-3} mol -> on a besoin 2 fois de 6.10^{-3} mol d'acide forte -> 0,03L × 2

V_{TOT} = 0,08 L

$OH = \sqrt{K_{b_2} . M} = \sqrt{\frac{10^{-14}}{Ka_2} \cdot \frac{6.10^{-3}}{0,08}} = 3,1 . 10^{-5}$ => pOH = 4,5

b) $^{(-)}OOC-COOH + H^+ \rightleftharpoons HOOC-COOH$

$n_a \quad n_b \quad -$

$n_a - x \quad n_b - x \quad x$

(maleate simplifié)
n: nre de moles
V: volume

1) $Va + Vb = 1$

$\frac{n_a}{0{,}100} + \frac{n_b}{0{,}100} = 1$

① $n_a + n_b = 0{,}100$

2) $pH = 6 \rightarrow [H^+] = 10^{-6} = n_b - x$ ②

$\frac{1}{Ka_2} = \frac{[HOOC-COOH]}{[H^+][^{(-)}OOC-COOH]}$

$Ka_2 = \frac{[H^+][^{(-)}OOC-COOH]}{[HOOC-COOH]}$

$Ka_2 = \frac{(10^{-6})(n_a - x)}{x}$

$8{,}57 \cdot 10^{-7} x = 10^{-6} n_a - 10^{-6} x$

$1{,}857 \cdot 10^{-6} x = 10^{-6} n_a$

$x = \frac{n_a}{1{,}857}$ ③

3) ③ en ②

$10^{-6} = n_b - \frac{n_a}{1{,}857}$

$1{,}857 \cdot 10^{-6} = 1{,}857 n_b - n_a$ ④

4) ④ et ①

$1{,}857 \cdot 10^{-6} = 1{,}857 n_b - (0{,}100 - n_b)$

$1{,}857 \cdot 10^{-6} = 1{,}857 n_b - 0{,}100 + n_b$

$0{,}1 = 2{,}857 n_b$

$n_b = 0{,}035 \text{ mol} \rightarrow V_b = \frac{n_b}{0{,}100} = \boxed{0{,}350 \text{ L} \quad \text{et } V_a = 0{,}650 \text{ L}}$

NOM, Prénom: ....

Section et numéro de matricule : 5

QUESTION 5 *(20 points)*

Dans le corps humain (37°C) l'éthanol est dégradé en éthanal dans le foie par le biais d'une enzyme (alcooldéhydrogénase, ADH):

$$CH_3CH_2OH(aq) + NAD^+(aq) \xrightarrow{ADH} CH_3CHO(aq) + NADH(aq) + H^+(aq)$$

Dans son laboratoire, un scientifique étudie cette réaction en mesurant la variation du pH au cours du temps à partir d'une solution à pH = 3,00 contenant $4{,}37.10^{-2}$ mol.L^{-1} d'éthanol.

t (h)	0,0	2,00	5,50	9,00	13,0	15,0	18,0
pH	3,00	2,12	1,72	1,52	1,35	1,35	1,35

a) Déterminez graphiquement l'ordre partiel de réaction par rapport à l'éthanol ainsi que la valeur de la constante cinétique.

b) Combien de temps faut-il pour décomposer 50% d'éthanol à partir d'une solution contenant 3,00 g.L^{-1} d'éthanol.

a)

t (h)	0,0	2,00	5,50	9,00	13,0	16,5	19,0
pH	3,00	2,12	1,72	1,52	1,35	1,35	1,35
$[H^+]$	1.10^{-3}	$7{,}586.10^{-3}$	$1{,}905.10^{-2}$	$3{,}020.10^{-2}$	$4{,}467.10^{-2}$	$4{,}467.10^{-2}$	$4{,}467.10^{-2}$
$[H^+]$ formé	0	$6{,}586.10^{-3}$	$1{,}805.10^{-2}$	$2{,}920.10^{-2}$	$4{,}367.10^{-2}$	$4{,}367.10^{-2}$	$4{,}367.10^{-2}$
[EtOH]	$4{,}37.10^{-2}$	$3{,}71.10^{-2}$	$2{,}56.10^{-2}$	$1{,}45.10^{-2}$	$3{,}16.10^{-5}$	$3{,}16.10^{-5}$	$3{,}16.10^{-5}$

Ordre 0

b) $t_{1/2}$ = 10,0 heures

On trouve la constante graphiquement et le temps avec $t_{1/2} = \frac{1}{2}\frac{A_0}{k}$

MVN

Chimie : Mai 2015

①

Q2

a) $S^{2-}_{(aq)} + Cd^{2+}_{(aq)} \rightarrow CdS_{(s)}$ $\quad \frac{1}{k_S} = \sim 10^{29} = k_1$

$S^{2-}_{(aq)} + Fe^{2+}_{(aq)} \rightarrow FeS_{(s)}$ $\quad \frac{1}{k_S} = \sim 10^{19} = k_2$

$S^{2-}_{(aq)} + Fe^{3+}_{(aq)} \rightarrow Fe_2S_3{(s)}$ $\quad \frac{1}{k_S} = 10^{85} = k_3$

On voit ici que le Fe_2S_3 va précipiter le plus rapidement puis le CdS puis le FeS car la constante de précipitation du Fe_2S_3 est plus grande que les autres.

$k_3 > k_1 > k_2 \quad \rightarrow Fe_2S_3 > CdS > FeS$

b) $H_2S_{(aq)} \rightleftharpoons HS^-_{(aq)} + H^+_{(aq)} \quad k_{A1} = 9{,}1 \cdot 10^{-8}$

$HS^-_{(aq)} \rightleftharpoons S^{2-}_{(aq)} + H^+_{(aq)} \quad k_{A2} = 1{,}1 \cdot 10^{-12}$

$\rightarrow H_2S_{(aq)} \rightleftharpoons S^{2-}_{(aq)} + 2H^+_{(aq)} \quad K_T = K_{A1} \cdot K_{A2} = 1{,}001 \cdot 10^{-19}$

$$K_T = \frac{[H^+]^2 \cdot [S^{2-}]}{[H_2S]} \rightarrow [S^{2-}] = \frac{K_t \cdot [H_2S]}{[H^+]^2} = \frac{1{,}001 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}1 \text{ mol/L}}{(10^{-2})^2}$$

$\rightarrow [S^{2-}] = 1{,}001 \cdot 10^{-16}$ mol/L

$$k_S = [Cd^{2+}][S^{2-}] \rightarrow [Cd^{2+}] = \frac{k_S}{[S^{2-}]} = \frac{1{,}40 \cdot 10^{-29}}{1{,}001 \cdot 10^{-16}} = 1{,}40 \cdot 10^{-13} \text{ mol/L}$$

Q_3

$$Fe_{(s)} \left| \begin{array}{l} Fe^{3+}_{(aq)} = 0{,}6\,mol/L \\ V = 1\,L \end{array} \right\| \begin{array}{l} [CuCl_4^{2-}]_{(aq)} = 0{,}6\,mol/L \\ [CuCl_2^-]_{(aq)} = 0{,}3\,mol/L \\ Cl^-_{(aq)} = 3\,mol/L \\ V = 1\,L \end{array} \left| Pt_{(s)} \right.$$

a) $Fe_{(s)} \rightleftharpoons Fe^{3+}_{(aq)} + 3\,e^{\ominus}$

$\left([CuCl_4]^{2-} + 1\,e^{\ominus} \rightleftharpoons [CuCl_2]^- + 2\,Cl^-_{(aq)}\right) \times 3$

Équation globale :

$$Fe_{(s)} + 3\,[CuCl_4]^{2-}_{(aq)} \rightleftharpoons Fe^{3+}_{(aq)} + 3\,[CuCl_2]^-_{(aq)} + 6\,Cl^-_{(aq)}$$

b) $Cu^+_{(aq)} + 2\,Cl^-_{(aq)} \rightleftharpoons [CuCl_2]^-_{(aq)}$ $\quad K_1 = 5.10^4$

$Cu^{2+}_{(aq)} + 4\,Cl^-_{(aq)} \rightleftharpoons [CuCl_4]^{2-}_{(aq)}$ $\quad K_2 = 1.10^5$

$Cu^{2+}_{(aq)} + 1\,e^{\ominus} \rightleftharpoons Cu^+_{(aq)}$ $\quad K_3 = e^{\frac{nF\Delta E^\circ_{Cu^{2+}/Cu^+}}{RT}}$

$[CuCl_4]^{2-}_{(aq)} + 1\,e^{\ominus} \rightleftharpoons [CuCl_2]^-_{(aq)}$ $\quad K_T = K_1 \cdot \frac{1}{K_2} \cdot K_3 = 193{,}48$

on sait que : $K_T = K = e^{\frac{nF\Delta E^\circ_{complexe}}{RT}} \rightarrow \Delta E^\circ_{complexe} = \frac{\ln K \cdot RT}{nF} = 0{,}135\,V$

c) $\Delta E = \Delta E_{cath} - \Delta E_{Anode} = 0{,}137\,V$

$\Delta E_{cath} = 0{,}135 - \frac{8{,}314 \cdot 298}{96485} \cdot \ln\left(\frac{[Cl^-]^2 \cdot [CuCl_2]}{[CuCl_4^{2-}]}\right) = 0{,}096\,V$

$\Delta E_{Anode} = -0{,}037 - \frac{8{,}314 \cdot 298}{3 \cdot 96485} \cdot \ln\left(\frac{1}{[Fe^{3+}]}\right) = -0{,}041\,V$

d) $n_{e^{\ominus}} = \frac{Q}{F} = \frac{it}{F} \rightarrow n_{e^{\ominus}} = \frac{3 \cdot 5400}{96485} = 0{,}168\,mol$

	$Fe^{3+}_{(aq)}$	$+\ 3\,e^{\ominus}$	$\rightleftharpoons Fe_{(s)}$
i	$n = 0{,}6$	$0{,}168$	0
f	$n = 0{,}6 - \frac{0{,}168}{3} = 0{,}544\,mol$	0	$\frac{0{,}168}{3} = 0{,}056\,mol$

$m_{Fe} = (0{,}056 \cdot 55{,}845)\,g = 3{,}13\,g$

MVM

Chimie Mai 2015

1 bis

$$[CuCl_2]^-_{(aq)} + 2\,Cl^-_{(aq)} \rightarrow [CuCl_4]^{2-}$$

i : 0,3 mol — 3 mol — 0,6

⇌ 0,3 − 0,168 = 0,132 mol — 3 − (2 · 0,168) = 2,664 mol — 0,6 + 0,168 = 0,768 mol

$$\Delta E = E'_{Cath} - E'_{Anode} = 0{,}172\ V$$

$$E'_{Cath} = 0{,}135 - \frac{8{,}314 \cdot 298}{1 \cdot 96485} \cdot \ln\left(\frac{[Cl^-]^2_{\rightleftharpoons} \cdot [CuCl_2]^-_{\rightleftharpoons}}{[CuCl_4]^{2-}_{\rightleftharpoons}}\right) = 0{,}130\ V$$

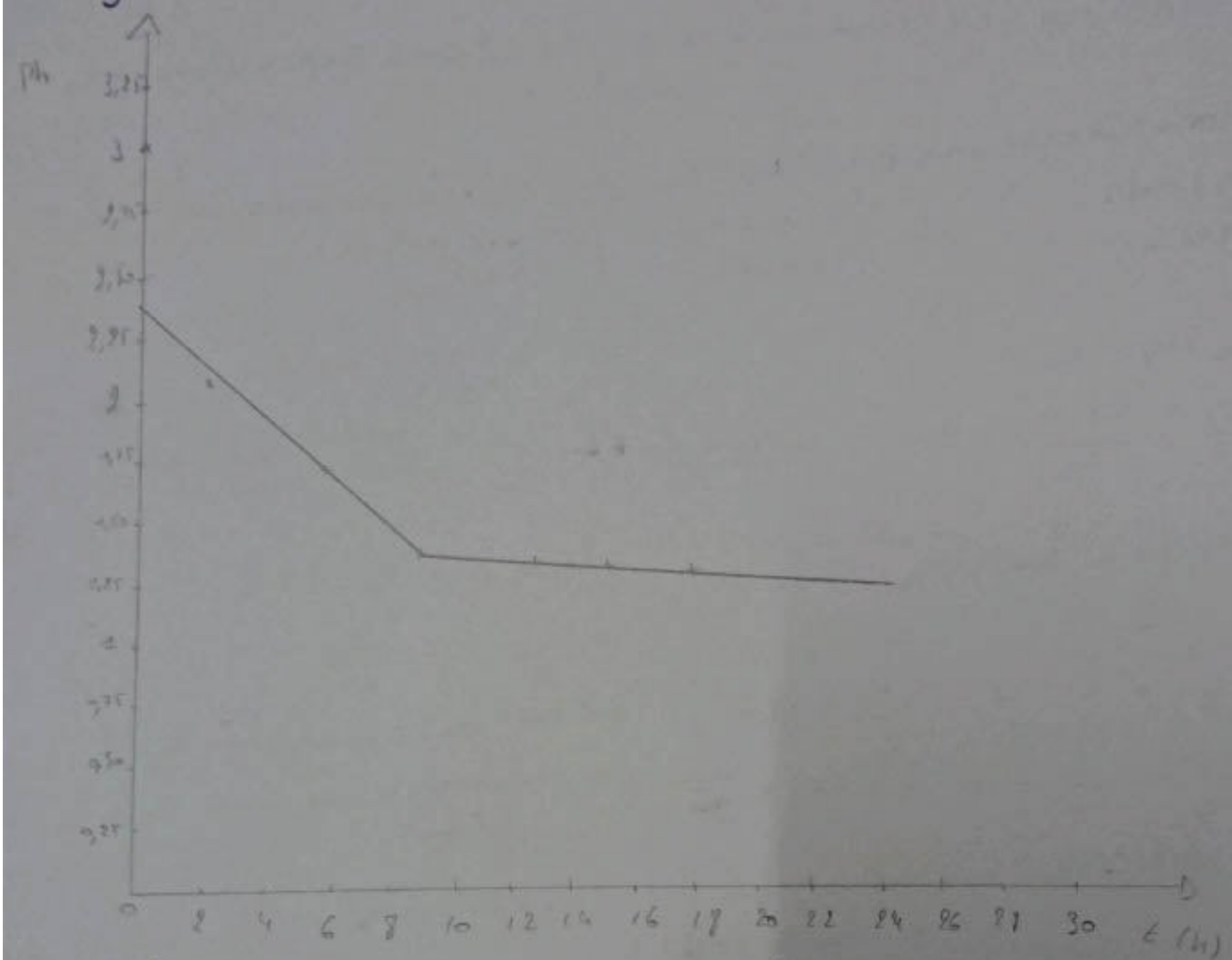
$$E'_{Anode} = -0{,}037 - \frac{8{,}314 \cdot 298}{3 \cdot 96485} \cdot \ln\left(\frac{1}{[Fe^{3+}]_{\rightleftharpoons}}\right) = -0{,}042\ V$$

MVM

Chimie : Mai 2015

②

Q5



a) la Courbe décline puis se stagne. Ce type de graphique correspond à l'ordre 0

b) 50% éthanol = $t_{1/2}$

$\frac{[Eth] - [Eth]}{18h - 0h}$ | $\frac{[Eth] - [Eth]}{8h - 0h}$

Par graphique je trouve $k = 1,95 \cdot 10^{-3}$ mol/L.h | $k_2 = 3,24 \cdot 10^{-3}$ mol/L.h

$[Eth]_0 = \frac{C}{m} = \frac{3\,g/L}{46\,g/mol} = 0,065$ mol/L

$t_{1/2} = \frac{[Eth]_0}{k_1} \cdot \frac{1}{2} = 10,02$ h

1 Q_4

a) $HOOC-CH=CH-COOH_{(aq)} + NaOH_{(aq)} \rightleftharpoons HOOC-CH=CH-COONa_{(aq)} + H_2O_{(aq)}$

$HOOC-CH=CH-COONa_{(aq)} + NaOH_{(aq)} \rightleftharpoons OOC-CH=CH-COONa_2 + H_2O$

$\rightarrow HOOC-CH=CH-COOH_{(aq)} + 2\,NaOH_{(aq)} \rightleftharpoons OOC-CH=CH-COONa_{2\,(aq)} + 2H_2O$

$C = 0,3$ mol/L
$V = 0,02$ L

$C = 0,2$ mol/L
$V = 0,06$ L

$n = C.V$ (de l'acide)
$= 6.10^{-3}$ mol

$V_t = (0,06 + 0,02)$ L
$= 0,08$ L

$C = \frac{6.10^{-3}\text{ mol}}{0,08\text{ L}} = 0,075$ mol

$C_1 . V_1 = C_2 . V_2$

$\rightarrow \frac{V_2}{2} = \frac{C_1 . V_1}{C_2} = 0,03L \rightarrow V_2 = 0,06L$

$pH = 14 + \log\sqrt{K_{b_2} . C_b}$
$= 9,47$

b) $pH = 6 \rightarrow [H^+] = 10^{-6}$ on sait aussi que $[H^+] = K_{A_2}\frac{C_a}{C_b}$

$\rightarrow \frac{[H^+]}{K_{A_2}} = \frac{C_a}{C_b} \rightarrow 1,167 = \frac{n_a}{n_b}$ (on peut ramener $C_a \rightarrow n_a$ car le V_t est le même)

ON SAIT : $n_a = 0,1 . V_A$ et que $n_b = 0,1 V_b - 0,1 V_A$

$- V_b + V_A = 1 \Rightarrow V_b = -V_A + 1$

$\Rightarrow 1,167 = \frac{0,1 . V_A}{0,1 - 0,1 V_A - 0,1 V_A}$ $\Rightarrow 0,117 = 0,333 V_A$

$\Rightarrow V_A = 0,350$ L

$V_b = 1 - V_A = 0,650$ L

B → maléate de Sodium
A → HCl

c) Ça n'aura aucun effet car NaCl est un élément inactif car Na^+ acide inactif et Cl^- base inactif.

Mvn

Chimie : Mai 2015

③

Q1

a)

	Acide propanoïque	acide pentanoïque
formule :	CH_3CH_2COOH	$CH_3(CH_2)_3COOH$
$T_{éb}$:	141 °C	186 °C
① ΔH_{vap} :	33,8	45,9

① Formule Clapeyron : $\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \frac{-\Delta H_{vap}}{R} \cdot \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)$

b) à 126 °C $\longrightarrow$ mélange idéal

$P_T = P_A^\circ \cdot \chi_A^L + P_B^\circ \cdot \chi_B^L \Rightarrow 330 = 520x + 130(1-x)$

$\rightarrow x = \frac{330-130}{390} = 0,513$

où $P_T = 330$ torr $\quad 1 = x + y$

$x = \chi_A^L \quad 1 - x = y$

$y = \chi_B^L$

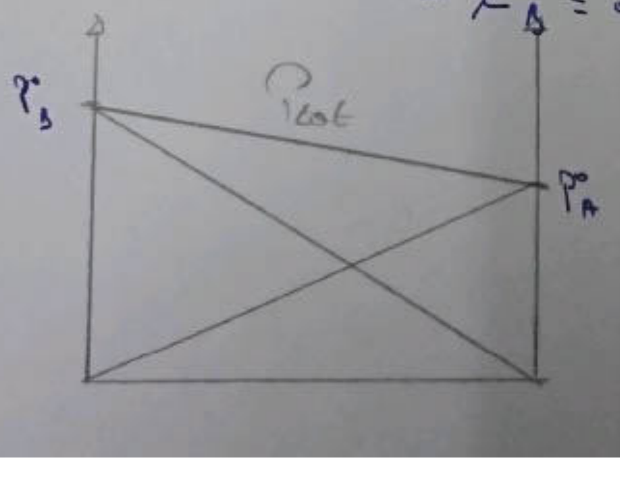
$\rightarrow \chi_A^L = 0,513$ et $\chi_B^L = 0,487$

$\chi_A^V = \frac{P_A^\circ \cdot \chi_A^L}{P_A^\circ \cdot \chi_A^L + P_B^\circ \cdot \chi_B^L} = 0,808$

$1 - \chi_A^V = \chi_B^V$

$\rightarrow \chi_B^V = 0,192$

c)



ULB

Faculté des Sciences

Année académique 2015/2016

PREMIERE ANNEE DE BACHELIER EN SCIENCES BIOLOGIQUES, CHIMIQUES, GEOGRAPHIQUES, GEOLOGIQUES, PHYSIQUES, EN SCIENCES DE L'INGENIEUR (ORIENTATION BIOINGENIEUR), MATHEMATIQUES (ORIENTATION BIOLOGIE), PREMIERE ANNEE POLYVALENTE EN SCIENCES

INTERROGATION DE CHIMIE du 4 janvier 2016

I. Théorie

NOM, Prénom: ....

Section et numéro de matricule : 1

<u>QUESTION 1</u> *(10 points)*

Voici différentes propositions de configuration électronique pour des atomes.

1) Identifiez, à l'aide d'une croix, celles qui sont correctes.
2) Parmi les configurations correctes, identifiez de la même manière si la configuration est celle de l'état fondamental ou celle d'un état excité de l'atome.
3) Donnez la position dans le tableau périodique (numéro ou nom de la famille, numéro de la période) des configurations correctes.

	Correcte	État fondamental	État excité	Famille	Période
$1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 3d^{10}\ 4s^2\ 4p^4$					
$1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 4s^2\ 3d^{10}\ 4p^5\ 5s^1$					
$1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 4s^1$					
$1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 4s^2$					
$1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^7\ 4s^2$					

Interrogation de chimie - janvier 2016 - Théorie

NOM, Prénom: ....

Section et numéro de matricule : 2

QUESTION 2 *(25 points)*

Remplissez le tableau suivant, qui liste un ensemble de propriétés moléculaires. L'oxygène et le soufre appartiennent tous deux à la 6e famille des groupes principaux, tandis que l'iode et le chlore sont des halogènes (famille VIIa).

	HIO_3	SCl_2
Nomenclature		
Structure(s) de Lewis		
Charges formelles		
Géométrie		
Types d'interactions intermoléculaires possibles		

À votre avis, laquelle de ces deux molécules a l'enthalpie de vaporisation standard ($\Delta_{vap}H°$) la plus élevée ? Justifiez sur base des réponses apportées dans le tableau ci-dessus.

Interrogation de chimie - janvier 2016 - Théorie

NOM, Prénom: .... ________________

Section et numéro de matricule : 3

<u>QUESTION 3</u> *(20 points)*

La molécule de difluor (nombre atomique *Z*=9) est diamagnétique, alors que celle de dioxygène (*Z*=8) est paramagnétique. Justifiez cette différence en faisant appel à la structure électronique fondamentale de ces deux molécules, telle que donnée par la théorie des orbitales moléculaires. Sur la base de ces mêmes configurations, déterminez à laquelle de ces deux molécules est associée l'énergie de liaison la plus élevée.

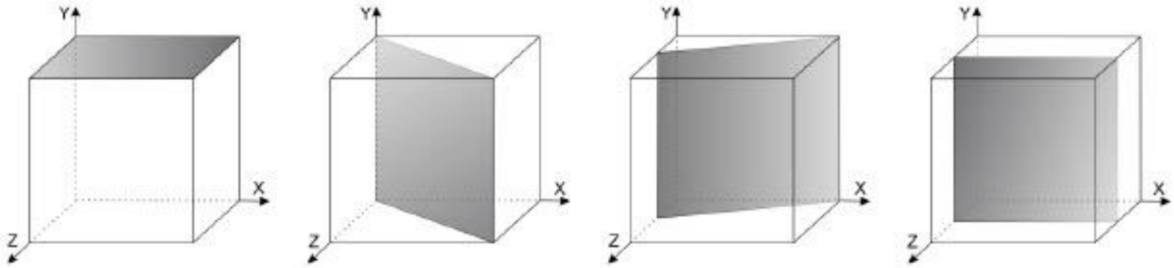
Interrogation de chimie - janvier 2016 - Théorie

NOM, Prénom: .... __________________

Section et numéro de matricule : 4

QUESTION 4 *(8 points)*

Déterminez les indices de Miller (h,k,l) des plans suivants, faisant partie d'un réseau cubique :



QUESTION 5 *(7 points)*

On observe souvent qu'un gaz réel suit l'équation des gaz parfaits pour une certaine température T_B, appelée la « température de Boyle ». Obtenez une expression pour cette température en fonction des paramètres a et b de l'équation de van der Waals

$$P = \frac{RT}{V_m - b} + \frac{a}{V_m^2},$$

dans laquelle V_m est le volume molaire du gaz, maintenu constant. Notez qu'avec cette notation, l'équation des gaz parfaits est donnée par $P = RT/V_m$.

NOM, Prénom: ....

Section et numéro de matricule :   5

QUESTION 6 *(15 points)*

La formation d'acide acétique à partir de ses éléments dans leur état de référence est un processus exothermique dans les conditions standard, que cet acide soit sous forme liquide ou gazeuse :

$$2\ C(s,gr) + 2\ H_2\ (g) + O_2\ (g) \rightarrow CH_3COOH\ (g) \quad \Delta_f H° = -\ 432\ kJ/mol$$

$$2\ C(s,gr) + 2\ H_2\ (g) + O_2\ (g) \rightarrow CH_3COOH\ (l) \quad \Delta_f H° = -\ 484\ kJ/mol$$

a) Quel est le signe de la variation d'entropie pour chacune de ces réactions ? Justifiez.
b) Calculez l'enthalpie de vaporisation de l'acide acétique.
c) Existe-t-il une température d'inversion pour la vaporisation de l'acide acétique ? Justifiez.

Interrogation de chimie - janvier 2016 - Théorie

NOM, Prénom: .... ________________

Section et numéro de matricule : 6

QUESTION 7 *(15 points)*

Vous trouverez ci-dessous une série de questions à choix multiples. Indiquez la seule réponse correcte en noircissant la case correspondante et justifiez votre choix en une ligne maximum.
Pondération : réponse valide et justifiée : 3 points ; réponse valide non justifiée : 1 point ; pas de réponse : 0 point ; réponse incorrecte : - 1 point !

a) Soit deux gaz parfaits de masse molaire M_1 et M_2, respectivement aux températures T_1 et T_2. Laquelle de ces affirmations concernant la vitesse moyenne des particules, v_1 et v_2, est correcte ?

- ○ Si $M_1 > M_2$ et $T_1 < T_2$, alors $v_1 > v_2$
- ○ Si $M_1 < M_2$ et T_1 x= T_2, alors $v_1 = v_2$
- ○ Si $M_1 > M_2$ et $T_1 = T_2$, alors $v_1 < v_2$
- ○ Si $M_1 = M_2$ et $T_1 > T_2$, alors $v_1 < v_2$

Justification :

b) Dans le diagramme des phases d'un corps pur, la variance de Gibbs le long de la courbe correspondant à l'équilibre solide-gaz vaut

- ○ -1
- ○ 0
- ○ 1
- ○ 2

Justification :

c) La capacité calorifique molaire à pression constante d'un certain gaz diatomique à TPN vaut $(7/2)\,R$. Cette valeur peut être attribuée aux degrés de liberté de

- ○ translation et vibration
- ○ rotation et translation
- ○ vibration, translation et rotation
- ○ rotation et vibration

Justification :

d) Une orbitale moléculaire anti-liante

- ○ ne peut jamais contenir d'électrons.
- ○ est caractérisée par une probabilité de présence négative.
- ○ est énergétiquement moins stable que l'orbitale liante correspondante.
- ○ ne joue aucun rôle dans le calcul de l'ordre de liaison d'une molécule diatomique.

Justification :

e) Selon les lois de la thermodynamique, durant toute transformation spontanée

- ○ l'entropie de l'univers augmente.
- ○ l'énergie de l'univers diminue.
- ○ l'enthalpie du système reste constante.
- ○ l'énergie libre de Gibbs du système augmente.

Justification :

ULB

Faculté des Sciences

Année académique 2015/2016

PREMIERE ANNEE DE BACHELIER EN SCIENCES BIOLOGIQUES, CHIMIQUES, GEOGRAPHIQUES, GEOLOGIQUES, PHYSIQUES, EN SCIENCES DE L'INGENIEUR (ORIENTATION BIOINGENIEUR), MATHEMATIQUES (ORIENTATION BIOLOGIE), PREMIERE ANNEE POLYVALENTE EN SCIENCES

INTERROGATION DE CHIMIE du 4 janvier 2016

II. Exercices

NOM, Prénom: ....

Section et numéro de matricule : 1

QUESTION 1 *(25 points). La réussite de cette question validera, le cas échéant, les travaux personnels des étudiants en sciences physiques.*

Le zinc est le quatrième métal le plus utilisé sur terre. Il est extrait d'un minerai contenant du sulfure de zinc. La première étape de la purification du zinc est l'oxydation du sulfure de zinc contenu dans le minerai par le dioxygène de l'air. Cette réaction mène à la formation à 910 °C d'oxyde de zinc solide et de dioxyde de soufre gazeux. Dans un second temps, on effectue une réduction de l'oxyde de zinc à 1300 °C en le faisant réagir avec du monoxyde de carbone. Cette deuxième réaction conduit à la formation de dioxyde de carbone et de zinc métallique gazeux.

a) Écrivez les équations moléculaires des deux réactions mentionnées.
b) Calculez la fraction massique du zinc dans un minerai dont la purification d'un échantillon de 0,500 kg a nécessité 3000 L d'air à 910 °C et à pression atmosphérique.

Les fractions molaires des différents constituants présents dans l'air utilisé sont :
21,0 % d'O_2, 77,8 % de N_2 et 1,20 % de gaz inertes.

NOM, Prénom: .... __________________

Section et numéro de matricule : 2

QUESTION 2 *(25 points)*

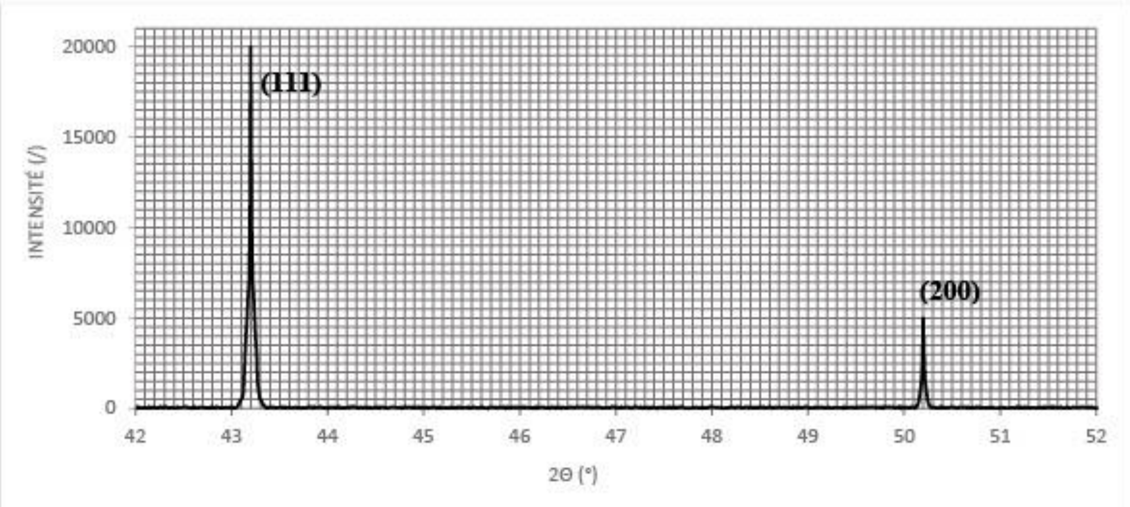
Dans l'eau la pression augmente d'une atmosphère tous les 10 m, au fur et à mesure que l'on descend en profondeur. Les plongeurs en scaphandre autonome doivent respirer le contenu de leur bouteille de plongée à la pression ambiante, c'est-à-dire à la pression qui règne là où ils se trouvent à un moment donné de la descente. Considérons le cas d'un plongeur ayant rempli une bouteille de 10 litres d'air à 25 °C et à une pression de 180 atm. Combien de temps cette bouteille lui permettrait-elle de respirer à une profondeur de 35 mètres et une température de 10 °C, sachant qu'il respire 12 fois par minute et que chaque respiration consomme 0,50 L d'air ?

NOM, Prénom: ....

Section et numéro de matricule : 3

QUESTION 3 *(25 points)*

Soit le graphe de la diffraction de rayons X du cuivre pur (cubique à faces centrées) :



À partir des données tirées de ce graphique, dans lequel les indices de Miller des plans concernés sont indiqués, on vous demande :

a) de calculer le paramètre de maille du cuivre, sachant que la longueur d'onde des rayons X incidents vaut 0,154 nm.

b) de déterminer la valeur de la distance minimale entre deux atomes de cuivre et d'en déduire la valeur du rayon cristallographique d'un atome de cuivre.

Interrogation de chimie - janvier 2016 - Exercices

NOM, Prénom: .... __________________

Section et numéro de matricule : 4

QUESTION 4 *(25 points)*

L'énergie libérée par la combustion d'une bougie de 35,68 g, constituée de pentacosane ($C_{25}H_{52}$), est utilisée pour chauffer une canette en aluminium contenant 330 g d'eau. La combustion de la bougie a lieu sous une pression de 1 bar et la canette vide pèse 13,2 g. La température de l'eau et de la canette est initialement de 20,0 °C et atteint 60,0 °C après chauffage. La bougie est éteinte à ce moment et sa masse finale est alors de 34,49 g.

a) Ecrivez l'équation de combustion du pentacosane.
b) On considère que les pertes calorifiques sont négligeables et que les différentes capacités calorifiques impliquées restent constantes. Dans ces conditions, calculez la valeur de l'enthalpie de formation du pentacosane dans les conditions standard.

Faculté des Sciences

Année académique 2015/2016

PREMIERE ANNEE DE BACHELIER EN SCIENCES BIOLOGIQUES, CHIMIQUES, GEOGRAPHIQUES, GEOLOGIQUES, PHYSIQUES, EN SCIENCES DE L'INGENIEUR (ORIENTATION BIOINGENIEUR), MATHEMATIQUES (ORIENTATION BIOLOGIE), PREMIERE ANNEE POLYVALENTE EN SCIENCES

EXAMEN DE CHIMIE du 23 mai 2016

NOM, Prénom: ....

Section et numéro de matricule : 1

QUESTION 1 *(15 points).*

L'éthanol et le méthanol sont 2 alcools dont les températures d'ébullition normales valent 79 °C et 65 °C respectivement.

a) Que vaut leur tension de vapeur à 75 °C ?

b) Si une solution contient 35,0 g de méthanol et que la pression de la vapeur en équilibre avec cette solution vaut 1,00 atm à 75 °C, quelle masse d'éthanol contient-elle ?

c) Quelles sont les fractions molaires des deux constituants dans la phase vapeur surmontant la solution ?

NOM, Prénom: ....

Section et numéro de matricule : 2

QUESTION 2 *(20 points)*

L'activité des protéines, comme par exemple les enzymes, n'est efficace que dans des domaines de pH limités, qui stabilisent les conformations actives des macromolécules biologiques et optimisent les vitesses de réactions biochimiques. Ainsi, le pH du sang fœtal humain à 37 °C doit être maintenu à 7,3.

Cela est possible grâce, entre autres, au couple acide-base $CO_2(aq)/HCO_3^-(aq)$ qui fait du sang un milieu tamponné. Nous désirons recréer ces conditions en laboratoire.

a) Que vaut le pK_{a1} de l'acide carbonique à 37 °C ?
b) De quel volume d'une solution de $CO_2(aq)$ à 0,20 M avons-nous besoin pour préparer, à partir de 120 mg de $NaOH(s)$, une solution tampon au pH désiré à 37 °C ?

<u>QUESTION 3</u> *(25 points)*

Le chlorure de chromyle, CrO_2Cl_2, est un oxydant puissant qui permet, par exemple, d'oxyder le toluène en benzaldéhyde. Un chercheur veut synthétiser cette molécule via l'oxydation d'ions Cr^{2+} par du dioxygène : $Cr^{2+}(aq) + O_2(aq) \rightleftharpoons CrO_2^{2+}(aq)$. Pour caractériser la cinétique de cette réaction, il étudie dans une première expérience (menée à 25 °C) la vitesse de décomposition de l'ion chromyle :

$$CrO_2^{2+}(aq) \xrightarrow{k_1} Cr^{2+}(aq) + O_2(aq)$$

La réaction a pour constante de vitesse $k_1 = 2{,}5\times10^{-4}\ s^{-1}$. Après 16 minutes et 40 secondes, la concentration en ions CrO_2^{2+} vaut $1{,}5\times10^{-4}\ mol\cdot L^{-1}$.

a) Quel est l'ordre en CrO_2^{2+} de cette réaction ? Que vaut le temps de demi-réaction ?
b) Calculez la concentration initiale en CrO_2^{2+}.

Dans un deuxième temps, il mesure la vitesse initiale, v_0, de la réaction de formation de l'ion chromyle :

$$Cr^{2+}(aq) + O_2(aq) \xrightarrow{k_2} CrO_2^{2+}(aq)$$

Les conditions initiales utilisées sont les suivantes :

	$[Cr^{2+}]$ ($mol\cdot L^{-1}$)	$[O_2]$ ($mol\cdot L^{-1}$)	v_0 ($mol\cdot L^{-1}\cdot s^{-1}$)
Expérience 1	$1{,}5\times10^{-4}$	$1{,}5\times10^{-4}$	3,6
Expérience 2	$6{,}0\times10^{-4}$	$1{,}5\times10^{-4}$	14,4
Expérience 3	$1{,}5\times10^{-4}$	$3{,}0\times10^{-4}$	7,2

c) Déterminez l'ordre global et les ordres partiels de cette deuxième réaction.
d) Déterminez le temps de demi-réaction pour l'Expérience 1 dans le tableau ci-dessus.

NOM, Prénom: ....

Section et numéro de matricule : 4

QUESTION 3 *(suite)*

QUESTION 4 *(20 points)*

On réalise la synthèse du thiosulfate de sodium, $Na_2S_2O_3$(aq), en faisant réagir, à 25 °C et en milieu acide, 50 mL d'une solution aqueuse de sulfite de sodium de concentration $5{,}03\times10^{-1}$ mol·L^{-1} avec 1,46 g de soufre solide rhomboédrique, S(s).

a) Calculez le degré d'oxydation du soufre dans les trois composés mentionnés.
b) Ecrivez les demi-équations redox correspondant aux couples impliqués et la réaction globale, correspondant à la synthèse du thiosulfate de sodium.
c) Sur base des informations thermodynamiques suivantes (prises à 25 °C), calculez la valeur de la constante d'équilibre dans les conditions de l'expérience :

	$\Delta_f H^\circ$ (kJ·mol^{-1})	S° (J·mol^{-1}·K^{-1})
$S_2O_3^{2-}$(aq)	-652,3	67,0
SO_3^{2-}(aq)	-635,5	-29,0

d) Quelle est la composition finale du mélange ?

NOM, Prénom: ....

Section et numéro de matricule : ....

QUESTION 5 *(20 points)*

Au cours d'une manipulation de démonstration, un enseignant étudie la dissolution d'un sel dans l'eau pure à différentes températures. Il note ses conclusions dans le tableau ci-dessous :

Température (°C)	0	20	40	60	80
K_s	$1{,}49\times10^{5}$	$2{,}11\times10^{5}$	$2{,}87\times10^{5}$	$3{,}77\times10^{5}$	$4{,}81\times10^{5}$

a) Déterminez graphiquement l'enthalpie de dissolution de ce sel.

b) Calculez la variation d'entropie et la variation d'énergie libre pour cette dissolution à 20 °C.

c) L'enseignant a préparé 500 mL (à 0,100 $mol\cdot kg^{-1}$) de solution aqueuse du sel, qu'il divise en deux parties. Dans la première moitié il ajoute du nitrate d'argent : on observe la formation d'un précipité. Il congèle la seconde moitié de solution : on observe que sa température de solidification est de -0,38 °C. Sachant que la constante cryoscopique de l'eau vaut 1,86 $K\cdot kg\cdot mol^{-1}$, déterminez si le sel étudié est MgI_2, AlI_3, NH_4I ou NH_4F.

MVM

Chimie Examen Mai 2016

1

Q1 a)

$T_{éb}$ méth $= 65°C$; $T_{éb}$ éth $= 79°C$

$\Delta H_{vap_{éth}} = \Delta_f H_{(g)} - \Delta_f H_{(l)} = 42,59$ kJ/mol

$\Delta H_{vap\,méth} = \Delta_f H_{(g)} - \Delta_f H_{(l)} = 38$ kJ/mol

$P°_{méth}$: $\ln\left(\frac{P_{vap}}{P°}\right) = \frac{-\Delta H_{vap}}{R} \cdot \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T°}\right)$

$P_{vap} = e^{0,389} \cdot 1 atm \rightarrow P_{vap} = 1,48$ atm

$P°_{éth}$: $\ln\left(\frac{P_{vap}}{P°}\right) = \frac{-\Delta H_{vap}}{R} \cdot \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T°}\right)$

$P_{vap} = e^{(-0,167)} \cdot 1 atm \rightarrow 0,85$ atm $= P_{vap}$

$P° = 1$ atm

b) $P_t = P_{éth} + P_{méth}$ et on sait que

$1 = \chi^l_{méth} + \chi^l_{éth}$

$\Rightarrow 1 - \chi^l_{méth} = \chi^l_{éth}$

$\Rightarrow P_t = P°_{éth}\left(1 - \chi^l_{méth}\right) + P°_{méth} \cdot \chi^l_{méth}$

$\Rightarrow 1 = 0,85\left(1 - \chi^l_{méth}\right) + 1,48 \cdot \chi^l_{méth}$

on sait que $\chi^l_{méth} = \frac{n_{méth}}{n_{méth} + n_{éth}}$ et $n_{méth} = \frac{35 g}{32,04 g/mol} = 1,09$ mol

$\Rightarrow 0,24 = \chi^l_{méth} \Rightarrow 0,24 = \frac{1,09}{1,09 + n_{éth}} \Rightarrow n_{éth} = \frac{1,09}{0,262}$

$= 4,17$ mol

$m_{éth} = n_{éth} \cdot MM_{éth} = 191,96 g$

c) $\chi^G_{éth} = \frac{P_{éth}}{P_{éth} + P_{méth}} = \frac{\chi^L_{éth} \cdot P^\circ_{éth}}{\chi^L_{éth} \cdot P^\circ_{éth} + \chi^L_{méth} \cdot P^\circ_{méth}}$

$= \frac{0,85 \cdot 0,79}{0,85 \cdot 0,79 + 1,48 \cdot 0,21} = 0,68$

$1 = \chi^G_{éth} + \chi^G_{méth} \Rightarrow \chi^G_{méth} = 1 - 0,68$
$= 0,32$

Q2

a) $K_A = K$ ici $K = e^{\left(\frac{-\Delta G^\circ}{RT}\right)} = e^{\left(\frac{-\Delta H}{RT}\right)} \cdot e^{\left(\frac{\Delta S}{R}\right)}$

$H_2CO_3\,(aq) \rightleftharpoons H^+_{(aq)} + HCO_3^-\,_{(aq)} \quad K_A$

$\Delta_r H^\circ = \Delta_f H_{HCO_3^-} + \Delta_f H_{H^+} - \Delta_f H_{H_2CO_3} = 7,66$ kJ/mol

$\Delta_r S^\circ = \Delta_f S_{HCO_3^-} + \Delta_f S_{H^+} - \Delta_f S_{H_2CO_3} = 96,2$ J/mol K

$\Delta G^\circ = \Delta H^\circ - T\Delta S^\circ = (7,66 \cdot 10^3 - (310 \cdot 96,2))$ kJ/mol

$\Delta G^\circ = -22,16$ kJ/mol

$K = e^{\frac{+22,16 \cdot 10^3}{8,314 \cdot 310}} = 5425,08$

$pK_A = -\log K_A \Rightarrow pK_A = -3,73$

b) $pH = 7,3 \quad \rightarrow [OH^-] = 10^{-6,7}$ mol/L
$= 1,995 \cdot 10^{-7}$ mol/L

$\rightarrow [OH^-] = K_b \frac{C_b}{C_a} \Rightarrow \frac{[OH^-]}{K_b} = \frac{C_b}{C_a}$ Volume total identique

$\Rightarrow \frac{[OH^-]}{K_b} = \frac{n_b}{n_a} \Rightarrow 8,87 = \frac{n_{NaOH}}{n_A - n_{NaOH}} \Rightarrow 8,87 = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{0,2 \cdot V_A - 3 \cdot 10^{-3}}$

$\rightarrow 1,774\, V_A = 3 \cdot 10^{-3} + 0,02661$

$\rightarrow V_A = \frac{0,02961}{1,774} = 0,017$ L

$V_A = 17$ mL

MVM

Chimie Examen Mai 2016

②

Q_3

a) $CoO_2^{2+}{}_{(aq)} \xrightarrow{k_1} Co^{2+}{}_{(aq)} + O_2\,(aq)$

$k_1 = 2,5 \cdot 10^{-4}\ s^{-1}$; $[A_t] = 1,5 \cdot 10^{-4}$ mol/L

L'ordre est de 1 car comme on peut le voir à partir du k_1 son unité est s^{-1} et il y a que l'ordre 1 où la constante cinétique possède comme unité s^{-1}

$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k_1} = 2772,59\ s$

d)

⚠ Ici l'ordre est de 2 car on prend l'équation globale donc l'ordre global. Et ici l'ordre global est 2

$v_0 = k_2 \cdot [Co^{2+}][O_2] \rightarrow k_2 = \frac{v_0}{[Co^{2+}][O_2]} = 1,6 \cdot 10^{8}$ L/mol.s

$t_{1/2} = \frac{1}{k_2 \cdot [A_0]} = \frac{1}{k \cdot [Co^{2+}]} = 4,17 \cdot 10^{-5}\ s$

b) $\ln[A_t] = \ln[A_0] - kt \rightarrow \ln[A_0] = \ln[A_t] + kt$

$\ln[A_0] = -8,56$

$[A_0] = 1,91 \cdot 10^{-4}$ mol/L

c) l'ordre partiel : ordre 1 pour Co^{2+}

ordre 1 pour O_2

l'ordre global = Σ ordre partiel = 1 + 1 = 2

Q4

a) $Na_2S_2O_3$: $S = +2$

$S_{(s)}$: $S = 0$

$Na\,SO_3$: $S = +4$

b) $S_2O_{3(aq)}^{2-} + 4e^- + 6H^+_{(aq)} \rightleftharpoons 2S_{(s)} + 3H_2O_{(l)}$

$S_2O_{3(aq)}^{2-} + 3H_2O \rightleftharpoons 6H^+_{(aq)} + 2SO_{3(aq)}^{2-} + 4e^-$

$2S_{(s)} + 2SO_{3(aq)}^{2-} \rightleftharpoons 2S_2O_{3(aq)}^{2-}$

$\Rightarrow S_{(s)} + SO_{3(aq)}^{2-} \rightleftharpoons S_2O_{3(aq)}^{2-}$

$\Rightarrow S_{(s)} + Na_2SO_{3(aq)} \rightleftharpoons Na_2S_2O_{3(aq)}$

c) $\Delta_r H = \Delta_f H_{Na_2S_2O_3} - \Delta_f H_{Na_2SO_3} - \Delta_f H_S$

$= (-652,3 + 635,5 + 0)\ kJ/mol = -16,8\ kJ/mol$

$\Delta_r S = \Delta_f S_{Na_2S_2O_3} - \Delta_f S_{Na_2SO_3} - \Delta_f S_S$

$= (67,0 + 29,0 - 31,80)\ J/molK = 64,2\ J/molK$

$\Delta G = \Delta H - T\Delta S = -35,93\ kJ/mol$

$K = e^{\frac{-\Delta G}{RT}} = 2.10^6$

MVM

Chimie Examen Mai 2016

③

Q4 d)

$$S_{(s)} + Na_2SO_{3(aq)} \longrightarrow Na_2S_2O_{3(aq)}$$

	$S_{(s)}$	$Na_2SO_{3(aq)}$	$Na_2S_2O_{3(aq)}$
n_i	$n = \frac{m}{M}$ $= 0{,}0455$ mol	$n = C.V$ $= 0{,}025$ mol	0 mol
	excès	limitant	
$n_{\rightleftharpoons}$	$0{,}0455 - x$	$0{,}025 - x$	$+x$

$V_t = 0{,}05\ L$

On sait que $K = K_c \rightarrow K = \frac{[Na_2S_2O_3]}{[Na_2SO_3]}$

$$\Rightarrow K = \frac{\frac{x}{0{,}05}}{\frac{0{,}025 - x}{0{,}05}} = 1.10^6 - \frac{2x.10^6}{0{,}05} = \frac{x}{0{,}05}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1.10^6 . 0{,}05}{2.10^6} = 0{,}025$$

$n_{\rightleftharpoons}$ pour le $S_{(s)} = 0{,}0205$ mol, $Na_2SO_3 = 0$ mol et pour le $Na_2S_2O_3 = 0{,}025$ mol

Q5

a) $$\frac{\ln(4{,}81.10^{-5}) - \ln(1{,}49.10^{5})}{\left(\frac{1}{353} - \frac{1}{273}\right)} = \frac{\Delta H_{diss}}{R}$$

$\Rightarrow -1411{,}71\ K^{-1} = \frac{\Delta H_{diss}}{R} \Rightarrow \Delta H_{diss} = 11{,}74$ KJ/mol

Par graphique on trouvera ± la même valeur

b) $K_s = K = e^{-\Delta H/RT} \cdot e^{\Delta S/R}$

$\rightarrow \left(\ln K_s + \frac{\Delta H}{RT}\right) \cdot R = \Delta S \rightarrow \Delta S = 141{,}99$ J/mol K

ici j'ai utilisé $K_s = 2{,}11 \cdot 10^5$ et $T = 293$ K

*

c) $\Delta T = i \cdot K_{éb} \cdot b$

$i = \frac{\Delta T}{K_{éb} \cdot b} = -2 \rightarrow i = 2$

- i de $MgI_2 = 3$ car $Mg^{2+} + 2I^-$ du coup $\neq 2$
- i de $AlI_3 = 4$ car $Al^{3+} + 3I^-$ du coup $\neq 2$

il reste plus que NH_4I et NH_4F qui ont tous les 2 un $i = 2$.

Mais on nous dit que la molécule peut précipiter or quand on voit les tables, on remarque NH_4F ne précipite pas du coup le composé utilisé est le NH_4I.

*

$\Delta G = \Delta H - T\Delta S$

$= 11{,}74$ kJ/mol $- (293\,K \cdot 0{,}142$ kJ/mol K$)$

$= -29{,}87$ kJ/mol

Faculté des Sciences

Année académique 2017/2018

PREMIERE ANNEE DE BACHELIER EN SCIENCES BIOLOGIQUES, CHIMIQUES, GEOGRAPHIQUES, GEOLOGIQUES, MATHEMATIQUES, EN SCIENCES DE L'INGENIEUR (ORIENTATION BIOINGENIEUR), PREMIERE ANNEE POLYVALENTE EN SCIENCES

INTERROGATION DE CHIMIE du 30 octobre 2017

NOM, Prénom : ....

Section et numéro de matricule : 1

ATTENTION : Pour toutes les questions, soignez votre écriture ET votre orthographe

QUESTION 1 *(15 points) La réussite de cette question validera, le cas échéant, les travaux personnels.*

Le phosphate d'hydrogène (acide phosphorique) est un composé utilisé dans la fabrication des engrais. Il est également présent en faibles quantités dans les boissons communément appelées « soft ». L'acide peut être préparé en 2 étapes successives :

1) Oxydation du tétraphosphore blanc (P_4) en présence de dioxygène pour former du pentoxyde de diphosphore (P_4O_{10})
2) Réaction du pentoxyde de diphosphore avec l'eau pour former le produit final recherché qu'est l'acide phosphorique.

204 g d'un mélange de tétraphosphore et d'impuretés réagissent avec un excès de dioxygène pour former le pentoxyde de diphosphore. Dans la seconde étape, 550 g d'acide phosphorique (phosphate d'hydrogène) sont récoltés.

a) Écrire les équations de ces réactions.
b) Calculer le pourcentage d'impuretés dans le mélange d'origine.

Informations utiles : masse atomique du phosphore : 30,9738 u ;
masse atomique de l'oxygène : 15,9994 u ; masse atomique de l'hydrogène : 1,0079 u

$P_4(s) + 5O_2(g) \rightarrow P_4O_{10}(s)$

$P_4O_{10}(s) + 6\ H_2O(l) \rightarrow 4\ H_3PO_4\ (l)$

$nH_3PO_4/4 = nP_4O_{10} = nP_4$

$mP_4 = mH_3PO_4\ .\ MP_4/4.\ MH_3PO_4 = 174\ g$

$\%impuretés = (204-174)/204 = 14,8\ \%$

Interro. Chimie – 30 octobre 2017

NOM, Prénom: .... ________________

Section et numéro de matricule : 2

QUESTION 2 *(15 points)*

Le phosphore-33 ($^{33}_{15}P$) est utilisé en laboratoire notamment pour marquer les nucléotides de l'ADN et l'ARN. Il se désintègre en ^{33}S en émettant une particule β^-. Sa demi-vie est de 25,5 jours.

a) Écrire l'équation de désintégration correspondante
b) Donner le nombre de neutrons et protons présents dans le phosphore-33.
c) À partir d'une masse initiale de 5,00 g, quelle sera la masse résiduelle de phosphore-33 après 31 jours ? après 200 jours ?

a)

$$^{33}{}_{15}P \rightarrow {}^{33}{}_{16}S + {}^{0}{}_{-1}e$$

b) ***nombre de neutrons = 33-15 = 18***
nombre de protons = 15

c) $m(t) = m(t=0)e^{-kt}$

$t_{1/2} = \ln 2/k$

$m(t) = 5,00\ e^{-\ln 2 . t/t1/2}$

31 j = 2,15 g
200 j = 2,18 . 10⁻² g

Interro. Chimie – 30 octobre 2017

NOM, Prénom:... ________________

Section et numéro de matricule : 3

Question 3 *(15 points)*

3.1. Le formaldéhyde (méthanal, CH_2O) est un composé organique produit lors de combustions incomplètes. Il se forme également lorsque le dioxygène réagit avec le méthane sous l'action des rayons solaires dans l'atmosphère. C'est encore un contaminant prouvé de l'air confiné dans les habitations.

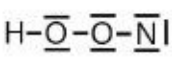
a) Compléter le tableau ci-après concernant les trois éléments présents dans la molécule.
b) Représenter cette molécule en structure de Lewis, et justifier le schéma dessiné.

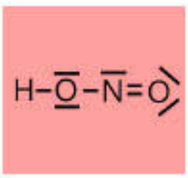
c) Quelle est la structure géométrique de cette molécule ?

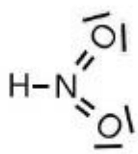
3 liens effectifs : triangulaire plane :

Élément	Hydrogène	Carbone	Oxygène
Structure électronique (état fondamental)	**$1s^1$**	**$1s^2\ 2s^2\ 2p^2$**	**$1s^2\ 2s^2\ 2p^4$**
Nombre d'électrons sur la couche externe	**1**	**4**	**6**
Nombre de doublets non-liants dans la molécule	**0**	**0**	**2**

3.2. Choisissez la bonne représentation de Lewis de HNO_2 parmi les suivantes. Justifiez.







Interro. Chimie – 30 octobre 2017

NOM, Prénom:..

Section et numéro de matricule : 4

<u>QUESTION 4</u> *(15 points)*

Soient les éléments suivants ainsi que leur configuration électronique :

${}_{9}F$: (He)$2s^2 2p^5$

${}_{11}Na$: (Ne)$4s^1$

${}_{35}Br$: (Ar)$3d^{10}4s^2 4p^4 5s^1$

${}_{30}Zn$: (Ar)$3d^{10}4s^2$

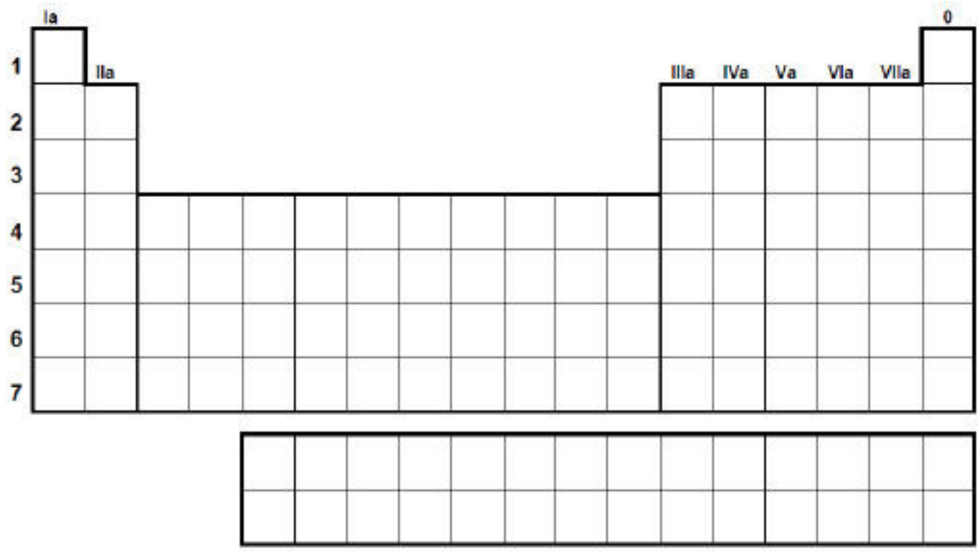
a) Quel(s) est (sont) l'(les) élément(s) dont la configuration électronique donnée n'est pas la configuration électronique fondamentale ?
Na, Br

b) Donner la configuration électronique fondamentale de cet(ces) élément(s).

Na : (Ne)$3s^1$ ou $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^1$

Br : (Ar) $3d^{10}\ 4s^2\ 4p^5$ ou $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 3d^{10}\ 4s^2\ 4p^5$

c) Placer tous les éléments dans le tableau périodique illustré ci-dessous.



d) Classer ces éléments par ordre croissant d'électronégativité. Justifier.

Na – Zn – Br – F : Na, alcalin, extrême gauche du tableau périodique, éléments à l'électronégativité la plus faible ; Zn = métal, éléments à faible électronégativité ; Br : halogène : forte attractivité pour les électrons, colonne 7, lui manque un électron pour l'octet. Fluor, halogène comme le brome, mais « plus haut », donc plus petit, donc la couche de valence plus proche du noyau, donc plus forte attractivité pour les électrons.

Interro. Chimie – 30 octobre 2017

NOM, Prénom:.. ____________________

Section et numéro de matricule :.. 5

QUESTION 5 *(10 points)*

Au laboratoire, un chercheur dispose de deux lasers illuminant respectivement à des longueurs d'onde de 460 nm et 650 nm.

Il souhaite observer un effet photoélectrique sur une surface de potassium.

Sachant que le travail d'extraction d'un électron de la surface est de 2,20 eV,

a) quel laser doit-il utiliser et
b) quelle sera la vitesse de l'électron éjecté ?

Données :

1 eV = $1{,}602176487.10^{-19}$ J, h = $6{,}62606896.10^{-34}$ J.s,

masse de l'électron = $9{,}1093897.10^{-31}$ kg, c = $2{,}99792458.10^{8}$ m/s

a)

travail de sortie, en J = $3{,}52\ 10^{-19}$ J

le laser à 460 nm (1)

car : $hc/\lambda_1 = 4{,}32 \times 10^{-19}$ J et l'énergie du laser 2 (650nm) = $3{,}06 \times 10^{-19}$ J

b) E cin = $hc/\lambda_1 - e\phi = mv^2/2$

$v = 4{,}19 \times 10^5$ m/s

Interro. Chimie – 30 octobre 2017

NOM, Prénom:.. ____________________

Section et numéro de matricule : 6

QUESTION 6 *(30 points)*

6.1. Les électrons peuvent avoir un caractère ondulatoire.

Dans l'équation $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meV}}$, *V* représente :

a) La fréquence
b) La vitesse
c) **La tension d'accélération**
d) Le volume
e) Autre chose (préciser)

Entourer la bonne réponse.

Attention, cette sous-question est de type « QCM » (question à choix multiples). La bonne réponse rapporte des points (+4), une mauvaise réponse retire des points (-4).

6.2. Soient CH_4, NH_3, H_2O, toutes des molécules dans lesquelles les liaisons sont covalentes. Classer ces molécules par angle entre les liens A-H (où A = C, N, O) décroissant. Justifier. ***Attention : soignez votre écriture ET votre orthographe.***

CH_4 – NH_3 - H_2O car CH_4 forme un tétraèdre (4 liens effectifs « purs »), angle de 109 degrés, NH_3 est basé sur un tétraèdre (4 liens effectifs), mais avec 1 doublet non liant qui prend plus de place, ce qui rapproche les 3 liens N-H (107 degrés) et H_2O a aussi 4 liens effectifs, mais deux doublets non liants prenant plus de place, donc l'angle entre les liens O-H est de 104,5 degrés

6.3. Parmi les gaz suivants, lesquels sont des gaz à effet de serre ? Justifier.

Ar, H_2O, N_2, CO_2, CH_4, O_2

H_2O, CO_2, CH_4 car ils peuvent absorber et réémettre les rayonnements infrarouges lors de la vibration. En effet, soit la molécule possède un moment dipolaire permanent (H_2O), soit la molécule, bien que symétrique, présente un moment dipolaire lors d'une vibration antisymétrique (CO_2, CH_4)

QUESTION 6 *(suite)*

6.4. Pourquoi, dans l'élaboration de la structure électronique d'un atome, « remplit-on » l'orbitale 4s avant les orbitales 3d ? Justifier en 5 lignes maximum et, éventuellement, un schéma.

A cause de l'effet de pénétration, l'orbitale 4s présente une probabilité de présence des électrons près du noyau plus importante que l'orbitale 3d. Cette configuration est donc favorisée.

6.5. On prépare une solution aqueuse de NaCl en mélangeant 29,22 g de sel avec 970,88 g d'eau. Le volume total de la solution est de 1,00 L. *(12 points)*

Calculer, pour cette solution : a) la concentration molaire, b) la molalité, c) la fraction molaire en sodium, d) la fraction massique en chlore.

Informations utiles : masse atomique de l'oxygène : 15,9994 u ; masse atomique de l'hydrogène : 1,0079 u ; masse atomique du sodium : 22,9898 u ; masse atomique du chlore : 35,4530 u

M NaCl= 58,44 g.mol^{-1} ; n NaCl=0,5 moles ; M H_2O = 18,0152 g.mol^{-1} , nH_2O = 53,89 moles

a) $C = n/V = 0{,}500/1 = 0{,}500$ ***mol/L***

b) ***molalité = n(soluté)/m (solvant -kg) = 0,500/0,97088 = 0,515 molal***

c) $xNa = nNa/(nNa+nCl+nH_2O) = 0{,}500/(1{,}00+53{,}89) = 9{,}11\ 10^{-3}$

d) $wCl = (0{,}5*35{,}453)/(29{,}22+970{,}88) = 1{,}77\ 10^{-2}$

ULB

Faculté des Sciences

Année académique 2016/2017

PREMIERE ANNEE DE BACHELIER EN SCIENCES BIOLOGIQUES, CHIMIQUES, GEOGRAPHIQUES, GEOLOGIQUES, PHYSIQUES, EN SCIENCES DE L'INGENIEUR (ORIENTATION BIOINGENIEUR), MATHEMATIQUES (ORIENTATION BIOLOGIE), PREMIERE ANNEE POLYVALENTE EN SCIENCES

INTERROGATION DE CHIMIE du 9 janvier 2017

I. Théorie

NOM, Prénom: ....

Section et numéro de matricule : 1

QUESTION 1 *(10 points)*

Le phosphore a le numéro atomique 15. On vous demande :

a) d'écrire la configuration électronique d'un atome de cet élément dans son état fondamental ;
b) d'indiquer tous les nombres quantiques associés à chacun des électrons de valence du phosphore.

a) $1s^2 2s^2 2p^6 \underline{3s^2 3p^3}$

b) 5 électrons de Valence → $3s^2\ 3p_x^1\ 3p_y^1\ 3p_z^1$

$n=3$	$n=3$	$n=3$	$n=3$	$n=3$
$l=0$	$l=0$	$l=1$	$l=1$	$l=1$
$m=0$	$m=0$	$m=0$	$m=1$	$m=-1$
$s=1/2$	$s=-1/2$	$s=1/2$	$s=1/2$	$s=1/2$

QUESTION 2 *(10 points)*

La configuration électronique de l'ion C_2^{n-} est $\sigma_{1s}^2\ \sigma_{1s}^{*2}\ \sigma_{2s}^2\ \sigma_{2s}^{*2}\ \pi_{2px}^2 \pi_{2py}^2 \sigma_{2p}^2$. Quelle est la charge de cet ion et son ordre de liaison, sachant que le numéro atomique du carbone, Z, vaut 6 ?

→ Ordre de liaison = (#e⁻ liant − #e⁻ anti-liant) . $\frac{1}{2}$ = 3

⇒ $n = 2$

Interrogation de chimie - janvier 2017 - Théorie

NOM, Prénom: ....

Section et numéro de matricule : 2

QUESTION 3 *(20 points)*

Six propositions de structures de Lewis de l'ion OCN^- (ion cyanate) sont représentées ci-dessous. Parmi elles, on vous demande d'indiquer celles qui sont incorrectes en justifiant brièvement votre choix.

a) Pour celles qui sont **correctes**, on vous demande de préciser la charge formelle ainsi que l'hybridation des différents atomes. Le carbone est dans le groupe principal IVa, l'azote dans le groupe principal Va, et l'oxygène dans le groupe principal VIa.

		Correcte ? Oui/Non	Justification (si structure incorrecte)	Charge formelle / Hybridation		
				O	C	N
A	$[\langle O{=}C{\equiv}N|]^-$	X		/	/	/
B	$[\langle O{=}C{=}N\rangle]^-$	V				
C	$[|\overline{\underline{O}}{-}C{\equiv}N|]^-$	V	Voire règle de LEWIS + règle charges formelles	Théorie de l'hybridation + Calcul de charges formelles		
D	$[|O{\equiv}C{-}\overline{\underline{N}}|]^-$	V				
E	$[\langle O{=}\overline{C}{-}\overline{\underline{N}}|]^-$	X		/		
F	$[|\overline{\underline{O}}{-}\overline{C}{=}N\rangle]^-$	X		/	/	/

b) Grâce aux structures correctes sélectionnées, déduisez la géométrie de l'ion cyanate, en justifiant votre choix.

-> Géométrie linéaire

-> Justification via Calcule des charges formelles

NOM, Prénom: ....

Section et numéro de matricule : ....

QUESTION 4 *(15 points)*

Soit les trois corps purs suivants : H_2O, H_2S et CO_2. On vous demande :

a) d'énumérer dans un tableau les différents types d'interactions qui s'exercent entre molécules pour chacun de ces trois corps purs pris séparément ;

b) sur cette base, de classer ces trois corps purs par température d'ébullition croissante.

Ia	IVa	VIa
Z=1	Z=6	Z=8
H	**C**	**O**
χ=2,20	χ=2,60	χ=3,50
		Z=16
		S
		χ=2,60

a) H_2O : - liens H
- moment dipolaire permanent
- dp - dp
- dp - di
- di - di

H / O \ H

H_2S : - dp - dp
- dp - di
- di - di

H / S \ H

CO_2 : - di - di
- double liaison

O = C = O

b) $H_2S < CO_2 < H_2O$

Interrogation de chimie - janvier 2017 - Théorie

NOM, Prénom: .... ____________

Section et numéro de matricule : 4

QUESTION 5 *(20 points)*

a) On vous demande de compléter les équations chimiques ci-dessous ainsi que de nommer le type d'énergie impliquée pour chaque transformation.

$O(g) + e^-$	$\rightarrow O^-(g)$	$\Delta_r H^0_1$ = - énergie d'affinité électronique de O(g)
$Mg(s)$	$\rightarrow Mg(g)$	$\Delta_r H^0_2$ = + enthalpie de sublimation du magnésium
$Mg^+(g)$	$\rightarrow 1e^- + Mg^{2+}(g)$	$\Delta_r H^0_3$ = + énergie d'ionisation électronique de $Mg^+(g)$
$O_2(g)$	$\rightarrow 2O(g)$	$\Delta_r H^0_4$ = + énergie de liaison d'O_2(g)
$O^-(g) + e^-$	$\rightarrow O^{2-}(g)$	$\Delta_r H^0_5$ = - énergie d'affinité électronique de O^-(g)
$Mg(g)$	$\rightarrow 1e^- + Mg^+(g)$	$\Delta_r H^0_6$ = + énergie d'ionisation électronique de Mg(g)
$Mg(s) + O_2(g)$	$\rightarrow MgO(s)$	$\Delta_r H^0_7$ = + enthalpie de formation de MgO(s)

b) En combinant ces équations selon la loi de Hess, donnez l'expression du $\Delta_r H^0$ de la réaction suivante (énergie de réseau de MgO(s)) en termes de $\Delta_r H^0_1$, $\Delta_r H^0_2$, $\Delta_r H^0_3$, $\Delta_r H^0_4$, $\Delta_r H^0_5$, $\Delta_r H^0_6$ et $\Delta_r H^0_7$:

$$MgO(s) \rightarrow Mg^{2+}(g) + O^{2-}(g)$$

$$\Delta_{Réaction} H^0 = -\Delta_r H^0_7 + \Delta_r H^0_2 + \frac{1}{2}\Delta_r H^0_4 + \Delta_r H^0_6 + \Delta_r H^0_3 - \Delta_r H^0_1 - \Delta_r H^0_5$$

NOM, Prénom: ....

Section et numéro de matricule : ....

5

QUESTION 6 *(15 points)*

a) Une réaction exothermique est-elle toujours spontanée à température et pression constantes ? Justifiez votre réponse.

-> Exothermique indique un $\Delta_r H$ négatif, or c'est le $\Delta_r G$ qui indique la spontanéité. $\Delta_r G = \Delta_r H - T\Delta_r S$

Donc, un $\Delta_r H \ominus$ n'implique pas forcément une réaction spontanée

b) Qu'est-ce que la température d'inversion ? Quelle est son expression mathématique ?

-> Le concept est basé sur le $\Delta_r G$. En effet, il s'agit de la température limite entre une réaction totale ou partielle (qualitative)

-> Se calcule à $\Delta_r G^0 = 0 = \Delta_r H^0 - T\Delta_r S^0$ (T inv)

c) Que vaut la capacité calorifique à pression constante de I_2 à haute température (considérez que le gaz est parfait) ? Justifiez.

-> I_2 = gaz diatomique => $C_p = \frac{7}{2}R$

$P.V = nRT$

$C_p - C_V = nR$ <=> $\underset{\text{diatomique}}{C_V^{g.p.}} = \frac{5}{2}R$ ~> démontré au cours

(si $n=1$)

d) Combien d'atomes ou d'ions y a-t-il par maille élémentaire dans le système cubique centré ?

2

e) Pour un solide monoatomique cristallisant dans le système cubique à faces centrées, quelle est l'équation reliant le paramètre de maille a et le rayon de l'atome r ? Détaillez votre réponse, éventuellement à l'aide d'un schéma.

Interrogation de chimie - janvier 2017 - Théorie

NOM, Prénom: ....

Section et numéro de matricule : 6

QUESTION 7 *(10 points)*

Indiquez la seule réponse correcte à chacune des questions à choix multiples ci-dessous en noircissant la case correspondante.

Pondération : réponse valide: 2 points ; pas de réponse : 0 point ; réponse incorrecte : - 1 point !

a) Considérons un diagramme de Lennard-Jones représentant les interactions intermoléculaires de van der Waals. Le puits de potentiel de la molécule de CH_4

- ○ est plus profond que celui de la molécule de H_2O.
- ○ est moins profond que celui de la molécule de H_2O.
- ○ a la même profondeur que celui de la molécule de H_2O.
- ○ n'existe pas.

b) Considérons les atomes $^{72}_{30}Zn$, $^{75}_{33}As$, $^{74}_{32}Ge$. Ces atomes ont :

- ○ le même nombre d'électrons.
- ○ le même nombre de protons.
- ○ le même nombre de neutrons.
- ○ le même nombre de protons et le même nombre de neutrons.
- ○ la même masse.

c) L'atome ayant la configuration $4s^2\ 4p^5$ de sa coque valencielle se trouve :

- ○ dans le groupe VIA et la période 5.
- ○ dans le groupe IVB et la période 4.
- ○ dans le groupe VIB et la période 7.
- ○ dans le groupe VIIA et la période 4.
- ○ dans le groupe VIIB et la période 4.

d) Le carbonate de calcium est un solide

- ○ ionique.
- ○ covalent.
- ○ moléculaire.
- ○ métallique.

e) Quel(s) changement(s) d'état est (sont) endothermique(s) ?

1. Fusion 2. Sublimation 3. Vaporisation 4. Condensation 5. Solidification

- ○ uniquement 1 et 2 et 3.
- ○ uniquement 4 et 5.
- ○ uniquement 1.
- ○ uniquement 2 et 3 et 5.
- ○ une autre combinaison.

ULB
Faculté des Sciences

Année académique 2016/2017

PREMIERE ANNEE DE BACHELIER EN SCIENCES BIOLOGIQUES, CHIMIQUES, GEOGRAPHIQUES, GEOLOGIQUES, PHYSIQUES, EN SCIENCES DE L'INGENIEUR (ORIENTATION BIOINGENIEUR), MATHEMATIQUES (ORIENTATION BIOLOGIE), PREMIERE ANNEE POLYVALENTE EN SCIENCES

INTERROGATION DE CHIMIE du 9 janvier 2017

II. Exercices

NOM, Prénom: ....

Section et numéro de matricule : 1

QUESTION 1 *(25 points) La réussite de cette question validera, le cas échéant, les travaux personnels des étudiants en sciences physiques.*

Votre assistante s'est préparé des escargots à l'ail et a décidé de ne pas jeter les coquilles. Après les avoir lavées consciencieusement et laissées sécher plusieurs heures, elle les apporte au laboratoire et vous demande de déterminer la fraction massique en carbonate de calcium dans les coquilles. Lors de la manipulation, vous dissolvez 1,745 g de coquilles dans 20,0 mL d'une solution de chlorure d'hydrogène 3,55 mol/L. La dissolution est totale et on suppose que seul le carbonate de calcium réagit avec l'acide. Au cours de cette réaction, du dioxyde de carbone et de l'eau sont formés. Vous titrez ensuite l'excès d'acide par 25,2 mL d'une solution d'hydroxyde de potassium 2,00 mol/L. On demande :

a) d'écrire les équations moléculaires et ioniques nettes des deux réactions ;
b) de déterminer la fraction massique du carbonate de calcium dans les coquilles.

a) $CaCO_{3(s)} + 2HCl_{(aq)} \rightarrow H_2O_{(l)} + CO_{2(g)} + CaCl_{2(aq)}$

① ↳ $CO_3^{2-} + 2H^+ \rightarrow H_2O + CO_2$

② $HCl_{(aq)} + KOH_{(aq)} \rightleftarrows KCl_{(aq)} + H_2O_{(l)}$

↳ $H^+_{(aq)} + OH^-_{(aq)} \rightleftarrows H_2O_{(l)}$

b) Excès de HCl titré par 25,2 ml de KOH 2,00M

⇒ $n_{KOH} = 25{,}2.10^{-3} . 2{,}00 = 50{,}4.10^{-3}$ mol $= n_{HCl}$

→ Tableau d'avancement.

	$CaCO_3$	$2HCl$	H_2O	CO_2	$CaCl_2$
t_0	x	y	0	0	0
t_f	0	y − 2x	x	x	x

↳ y : 20 ml de HCl 3,55 M ⇒ $y - 2x = 50{,}4.10^{-3}$ mol

→ On isole x = nombre de moles de $CaCO_3$ ...

Interrogation de chimie - janvier 2017 - Exercices

NOM, Prénom: ....

Section et numéro de matricule : 2

QUESTION 2 *(20 points)*

L'huile de coco est composée en grande partie d'acides gras saturés, dont l'acide octanoïque ($C_8H_{16}O_2$), l'acide laurique ($C_{12}H_{24}O_2$) et l'acide myristique ($C_{14}H_{28}O_2$). Après combustion complète de 1,00 g de l'un de ces acides gras, on récupère, à 298 K et dans les conditions standard, 1,47 L de CO_2 et 1,07 g d'eau.

a) Déterminez duquel des trois acides gras il s'agit en justifiant votre réponse.

b) Sachant que la combustion d'une mole de cet acide gras libère 7377,0 kJ, calculez l'enthalpie de formation de ce dernier dans les conditions standard et à 298 K.

a) $X + aO_2 \rightarrow b.CO_2 + cH_2O$

↳ On récupère : - 1,47 L de $CO_2 = V_{CO_2}$ ⇝ $P.V = nRT \Leftrightarrow n = \frac{P.V}{RT}$

- 1,07 g de $H_2O = m_{H_2O}$ ⇝ $n_{H_2O} = \frac{m_{H_2O}}{MM_{H_2O}}$

⚠ P = 1 atm et T = 298 K

↳ $n_{H_2O} = 5,94\ 10^{-2}$ mol // $n_{CO_2} = 6,011 \cdot 10^{-2}$ mol

$m = 1g$
$MM_{C_8H_{16}O_2} = 144$ g/mol ⇔ $n = (1/144)$ mol
$MM_{C_{12}H_{24}O_2} = 200$ g/mol $n = (1/200)$ mol
$MM_{C_{14}H_{28}O_2} = 228$ g/mol $n = (1/228)$ mol

→ Étant donné que la réaction est complète, le coef. stoechiométrique du CO_2 (b) doit correspondre au nombre de C dans l'acide gras. Dès lors, il suffit de multiplier le nombre de mole d'acide gras par le nombre de carbone et de vérifier que l'on obtient bien le même nombre de moles

⇒ $n_{C_{12}H_{24}O_2} = 5.10^{-3}$ mole $* 12 \Rightarrow 6.10^{-2}$ moles $= n_{CO_2}$ □

b) $\Delta_r H = 7377,0$ KJ $= b\Delta_f H_{CO_2} + c\Delta_f H_{H_2O} - a.\Delta_f H_{O_2} - \Delta_f H_{\text{acide gras}}$

→ Les $\Delta_f H$ des autres produits sont dans les tables

□ Il suffit d'isoler $\Delta_f H_{\text{acide gras}}$ ⚠ Coef. stoech

Interrogation de chimie - janvier 2017 - Exercices

NOM, Prénom: .... ______________

Section et numéro de matricule : 3

QUESTION 3 *(15 points)*

Un espoir de production d'énergie repose sur la fusion contrôlée d'un noyau de deutérium (noyau d'hydrogène contenant 1 neutron) avec un noyau de tritium (noyau d'hydrogène contenant 2 neutrons), ce qui génère un noyau d'hélium. Le deutérium se trouve en abondance dans l'eau de mer où sa masse est estimée à $4{,}6 \times 10^{13}$ tonnes. On vous demande :

a) d'écrire la réaction de fusion équilibrée entre le deutérium et le tritium ;

b) de calculer l'énergie libérée par la réaction de fusion si 1,00 kg de deutérium est consommé.

Données : *m*(deutérium) = 2,01355 u ; *m*(tritium) = 3,01550 u ; *m*(hélium) = 4,00150 u

a) $D_{eu} + Trit \rightarrow Hélium \Leftrightarrow H_2^1 + H_3^1 \rightarrow He_4^2 + {}_1^0n$

b) $E = \Delta m . c^2$

$\Leftrightarrow \Delta m = [m_{He} + m_n] - [m_{deu} + m_{Tri}] \rightarrow m_n = 1{,}00866\, u$

$= -1{,}889 . 10^{-2}\, u = -3{,}13676 . 10^{-29}\, Kg$

$[1u = 1{,}6605 . 10^{-27}\, Kg]$

$\Leftrightarrow E = \Delta m . c^2 = -3{,}13676 . 10^{-29} (3.10^8)^2 = -2{,}81932 . 10^{-12}\, J$

$= -17{,}60\, MeV$

⚠ 1 Kg de Deutérium!

→ Pour des noyaux simple

$\Rightarrow n_{deu} = \frac{m_{deu}}{MM_{deu}} = \frac{1000}{2{,}0} = 500$ moles

$\Leftrightarrow N_A = 6.10^{23}$ atomes dans 1 mole $\Leftrightarrow 3.10^{26}$ noyaux!

→ Energie libérée $= 3.10^{26}\ 17{,}60 = 5{,}28 . 10^{27}\, MeV$

Interrogation de chimie - janvier 2017 - Exercices

NOM, Prénom: ....

Section et numéro de matricule : 4

QUESTION 4 *(15 points)*

En analysant un cristal de MgO(s) par diffraction aux rayons X, on trouve que l'angle correspondant au premier ordre de diffraction est égal à 21,44° pour le plan (200) quand les rayons X sont produits par une source de cuivre correspondant à une longueur d'onde λ égale à 1,54 Angström. Que vaudrait l'angle de diffraction au premier ordre si on utilisait une source de molybdène ($\lambda = 71{,}07$ pm) ?

→ Loi de Bragg : $2d \cdot \sin\theta = n\lambda$

⇒ d = distance interréticulaire entre deux plans cristallographiques

↳ Celle-ci est inconnue

① $\lambda^{Cu} = 1{,}54\ \text{Å} = 1{,}54 \cdot 10^{-10}$ m

$n = 1$

$\theta = 21{,}44°$

$\Rightarrow d = \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{1}{\sin\theta} = 2{,}11 \cdot 10^{-10}$ m

② $\lambda^{Mo} = 71{,}07$ pm $= 71{,}07 \cdot 10^{-12}$ m

$n = 1$

$d = 2{,}11 \cdot 10^{-10}$ m

$\Rightarrow \arcsin\left(\frac{\lambda}{2d}\right) = \theta = 9{,}69°$

Interrogation de chimie - janvier 2017 - Exercices

NOM, Prénom: .... ________________

Section et numéro de matricule : 5

QUESTION 5 *(25 points)*

Sous une pression de 1 bar, on ajoute dans un récipient contenant 100,0 g d'eau liquide à 40 °C, une pièce en cuivre de 5,00 g à une température de 85 °C.

a) On vous demande de calculer la température après équilibre thermique.

b) On ajoute ensuite 20,0 g de glace à -5°C dans le récipient. Quelle est la température du système après équilibre thermique ?

Données : $C_{p,m}$(glace) = 38,09 J.mol^{-1}.K^{-1}, $\Delta_{fusion}H^0$ (glace) = 6,006 kJ/mol. Ces données sont supposées constantes dans les intervalles de température considérés.

Remarque : Vous pouvez supposer que la capacité calorifique du récipient ainsi que les pertes calorifiques sont négligeables.

⇒ $Q = C_v \, m \, \Delta T$ = Chaleur

a) Il faut considérer que toute l'énergie du cuivre est transmise à l'eau ⇒ $-C_p^{cuivre} \, n_{moles}^{cuivre} \cdot [T_f - 85°] = C_p^{Eau} \, n_{moles}^{Eau} \cdot [T_f - 40°]$

↳ Le signe moins indique que l'énergie du cuivre est transmise

Il reste à isoler T_f. (C_p^{cuivre} sont dans les tables)

b) Même exercice, sauf qu'il faut considérer le fait que la glace fond

↳ 20,0 g de glace → MM = 18 g/mol ⇒ m_{glace} = 1,11 mol

Energie emmagasinée par la fusion : 1,11 . 6,006 KJ/mol = 6,673 KJ

$$\Rightarrow -C_p^{glace} \cdot n_{moles}^{glace} [T_f - (-5°)] + 6{,}673 \cdot 10^3 J = [C_p^{cuivre} n_{moles}^{cuivre} + C_p^{eau} n_{moles}^{eau}] \cdot [T_f - T_f(a)]$$

ULB

Faculté des Sciences

Année académique 2016/2017

PREMIERE ANNEE DE BACHELIER EN SCIENCES BIOLOGIQUES, CHIMIQUES, GEOGRAPHIQUES, GEOLOGIQUES, PHYSIQUES, EN SCIENCES DE L'INGENIEUR (ORIENTATION BIOINGENIEUR), PREMIERE ANNEE POLYVALENTE EN SCIENCES

EXAMEN DE CHIMIE du 29 mai 2017

NOM, Prénom: ....

Section et numéro de matricule : 1

QUESTION 1 *(15 points)*

L'eau de mer contient, entre autres, des ions Mg^{2+} dont la concentration vaut $6{,}00\times10^{-2}$ mol/L et des ions Ca^{2+} dont la concentration est égale à $1{,}10\times10^{-2}$ mol/L. Pour récupérer les ions magnésium, on les précipite sous forme d'hydroxyde $Mg(OH)_2$, en ajoutant une base forte à un volume donné d'eau de mer. On suppose les variations de volume négligeables.

a) En-dessous de quel pH faut-il maintenir la solution pour précipiter le plus d'ions magnésium possible, sans précipiter les ions calcium sous forme de $Ca(OH)_2$?

b) Dans ces conditions, quelle sera la concentration résiduelle en ions magnésium après précipitation ?

$Mg(OH)_2 : K_s = 5{,}61 \cdot 10^{-12}$
$Ca(OH)_2 : K_s = 4{,}68 \cdot 10^{-6}$

a) $\begin{cases} Mg(OH)_{2(s)} \rightleftharpoons Mg^{2+}_{(aq)} + 2OH^-_{(aq)} & ① \\ Ca(OH)_{2(s)} \rightleftharpoons Ca^{2+}_{(aq)} + 2OH^-_{(aq)} & ② \end{cases}$

① $K = K_s = [Mg^{2+}][OH^-]^2 = 5{,}61 \cdot 10^{-12}$

$\Leftrightarrow [OH^-] = 9{,}67 \cdot 10^{-6}$ Mol/L → à cette concentration les ions Mg^{2+} précipitent

② $K = K_s = [Ca^{2+}][OH^-]^2 = 4{,}68 \cdot 10^{-6}$

$\Leftrightarrow [OH^-] = 2{,}0627 \cdot 10^{-2}$ Mol/L

↳ ① $[OH^-][H_3O^+] = 10^{-14} \Leftrightarrow [H_3O^+] = 4{,}848 \cdot 10^{-13}$
$pH = -\log[H_3O^+] =$ 1[illegible]

b) $[Mg^{2+}]_{rési} = 1{,}378 \cdot 10^{-8}$ Mol/L

Examen de chimie - mai 2017

NOM, Prénom: ....

Section et numéro de matricule : 2

QUESTION 2 *(25 points)*

On veut préparer 500 mL de solution tampon à pH = 7,50, de concentration en ion K^+ égale à 0,500 mol/L. On a à notre disposition de l'eau et les sels suivants : hydrogénophosphate de potassium et dihydrogénophosphate de potassium.

a) Écrivez les équations de dissociation de ces sels dans l'eau.
b) Quelle masse de chacun de ces sels doit-on utiliser pour obtenir la solution tampon voulue ?
c) On ajoute à ce tampon 100 mL d'une solution aqueuse de NaOH de concentration égale à 1,00 mol/L. Quel sera le pH de la solution finale ?

a) $KH_2PO_4 + 2H_2O \rightleftarrows K^+ + PO_4^{3-} + 2H_3O^+$ $\quad K = K_{a2} \cdot K_{a3}$

$K_2HPO_4 + H_2O \rightleftarrows 2K^+ + PO_4^{3-} + H_3O^+$ $\quad K = K_{a3}$

b) $pH = pK_a - \log\left(\frac{C_A}{C_B}\right)$ $\quad \begin{cases} K_{a2} = 6{,}34 \cdot 10^{-8} \\ K_{a3} = 2{,}2 \cdot 10^{-13} \end{cases}$

$= pK_{a2} - \log\left(\frac{m_{H_2PO_4^-}}{m_{HPO_4^{2-}}}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{m_{H_2PO_4^-}}{m_{HPO_4^{2-}}} = 10^{pK_a - pH}$

$= 10^{7{,}1979 - 7{,}5} = 0{,}499$

$\Leftrightarrow m_{H_2PO_4^-} = 0{,}499\, m_{HPO_4^{2-}}$

$\hookrightarrow m_{K^+} = [K^+] V_{K^+} = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$ mol

⚠ $m_{K_2HPO_4} + m_{KH_2PO_4} = 3 m_{K^+}$

$= m_{HPO_4^{2-}} + m_{H_2PO_4^-}$

$m_{H_2PO_4^-} = \left[3m_{K^+} - m_{HPO_4^{2-}} = m_{HPO_4^{2-}} \cdot 0{,}499\right]$

$\Leftrightarrow m_{HPO_4^{2-}} = 0{,}500$ mol

$\Leftrightarrow m_{H_2PO_4^{2-}} = 0{,}250$ mol

NOM, Prénom: ....

Section et numéro de matricule : 3

QUESTION 2 *(suite)*

(1) $m_{K_2HPO_4} = n_{HPO_4^{2-}} \cdot MM_{K_2HPO_4}$

(2) $m_{KH_2PO_4} = n_{H_2PO_4^-} \cdot MM_{KH_2PO_4}$

C) $pH_{initial} = 7{,}50 \Leftrightarrow pH = -\log[H_3O^+]^{ini} \Leftrightarrow [H_3O^+]^{ini} = 10^{-pH}$

$= 3{,}16 \cdot 10^{-8}\ M$

$[H_3O^+]^{ini}[OH^-]^{ini} = 10^{-14}$

$\Leftrightarrow [OH^-]^{ini} = \frac{10^{-14}}{[H_3O^+]^{ini}} = 3{,}16 \cdot 10^{-7}\ M$

$\Leftrightarrow n_{OH^-}^{ini} = V_{solution\ initial} \cdot [OH^-] = 1{,}58 \cdot 10^{-7}\ mol$

$+\ 100\ ml\ NaOH\ [OH^-]\ 1{,}00\ M \Rightarrow n_{OH^-}^{ajouté} = V_{ajouté} \cdot 1{,}00 = 0{,}1\ mol$

$NaOH \rightarrow Na^+ + OH^-$

$\Rightarrow n_{tot\ OH^-} = 0{,}1 + 1{,}58 \cdot 10^{-7} = 1{,}0 \cdot 10^{-1}\ mol$

$V_{tot} = 600\ ml$

$\Leftrightarrow [OH^-]^{final} = 1{,}66 \cdot 10^{-1}\ M$

$\rightarrow pH = 14 + \log[OH^-]^{final}$

Examen de chimie - mai 2017

NOM, Prénom: ....

Section et numéro de matricule : 4

QUESTION 3 *(25 points)*

Un étudiant doit préparer une pile au laboratoire. La température est maintenue constante à 298 K. Il dispose du matériel suivant, qu'il utilise dans son intégralité :

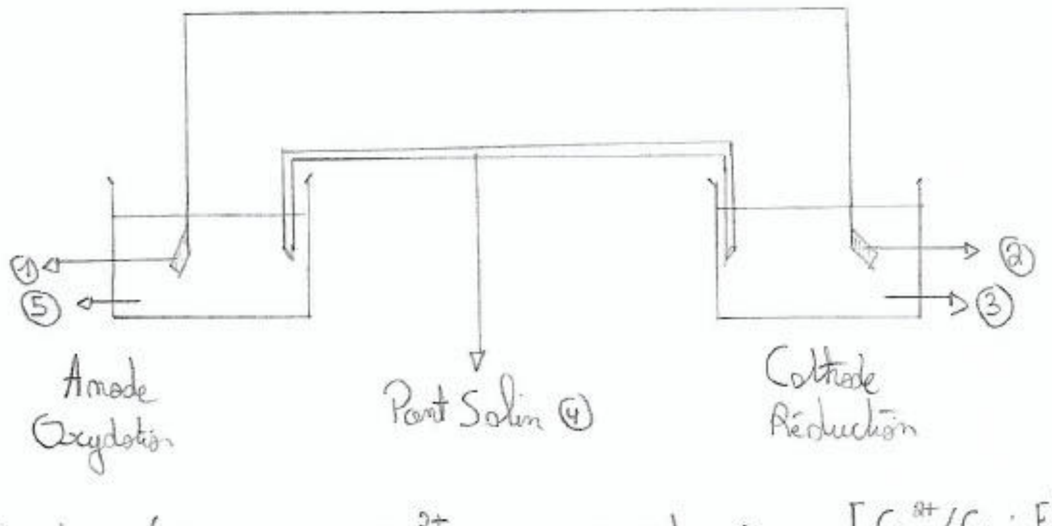
- une lamelle de cuivre de 5,00 g (1)
- une électrode de platine (2)
- 200 mL d'une solution aqueuse dont le pH vaut 2,00 et contenant du permanganate de potassium et du sulfate de manganèse, de concentrations égales respectivement à 0,300 mol/L et à 0,0750 mol/L (3)
- une solution aqueuse saturée en nitrate de potassium (4)
- 200 mL d'une solution aqueuse de sulfate de cuivre (II) de concentration égale à 0,300 mol/L (5)

a) Représentez le schéma de la pile en indiquant la position de l'anode et de la cathode. (*Justifiez votre réponse.)*

b) Écrivez l'équation ionique nette globale correspondant à la réaction chimique du fonctionnement de la pile et calculez la constante d'équilibre de celle-ci.

c) Que vaut la force électromotrice de cette pile ?

a)



b) Anode. $(Cu_{(s)} \rightleftharpoons Cu^{2+}_{(aq)} + 2e^-) \times 5$ $[Cu^{2+}/Cu : E^\circ = 0,34V]$

Cathode. $(MnO_4^-{}_{(aq)} + 8H^+_{(aq)} + 5e^- \rightleftharpoons Mn^{2+}_{(aq)} + 4H_2O_{(l)}) \times 2$ $[Mn^{7+}/Mn^{2+} : E^\circ = 1,51]$

Somme

$\Rightarrow 5Cu_{(s)} + 2MnO_4^-{}_{(aq)} + 16H^+_{(aq)} \rightleftharpoons 5Cu^{2+}_{(aq)} + 2Mn^{2+}_{(aq)} + 8H_2O_{(l)}$

[Équation ionique nette globale]

$\rightarrow K = e^{\left(\frac{n.F\Delta E}{RT}\right)}$ ⇝ Il faut donc recalculer notre ΔE

QUESTION 3 *(suite)*

$\Delta E^\circ = E^\circ_{cath} - E^\circ_{anode}$ $\Leftrightarrow$ $\Delta E = E_{cath} - E_{anode}$

$\rightarrow$ Il faut utiliser Nernst pour chaque réaction.

$$\left| \begin{array}{l} E_{cath} = E^\circ_{cath} + \left(\frac{R.T}{n.F}\right) \ln \frac{[MnO_4^-]}{[Mn^{2+}]} \quad (n=5) \\ E_{an} = E^\circ_{anode} + \left(\frac{R\,T}{n\,F}\right) \ln \frac{[Cu^{2+}]}{1} \quad (n=2) \end{array} \right.$$

$\Leftrightarrow$ $\Delta E = E_{cath} - E_{anode}$

$\Leftrightarrow$ $K = \text{constante} = e^{\left(\frac{nF\Delta E}{RT}\right)}$

c) $\rightarrow$ f è.n = ΔE

Examen de chimie - mai 2017

NOM, Prénom: ....

Section et numéro de matricule : 6

QUESTION 4 *(15 points)*

Au laboratoire, un étudiant de BA1 considère l'équilibre en phase gazeuse : $2\ HI(g) \rightleftharpoons I_2(g) + H_2(g)$. Le récipient ne contient initialement que de l'iodure d'hydrogène et la température est maintenue constante à 400 K. Le volume du récipient est maintenu constant et les gaz peuvent être considérés comme parfaits. À l'équilibre, la pression partielle en dihydrogène est égale à 3,10 bar.

a) Calculez la constante d'équilibre de cette réaction à 400 K. *(Les variations d'enthalpie $\Delta_r H^0$ et d'entropie $\Delta_r S^0$ de la réaction peuvent être évaluées à 298 K.)*

b) Calculez la pression initiale dans le récipient ainsi que la pression totale à l'équilibre.

$\Rightarrow 2HI(g) \rightleftharpoons I_2(g) + H_2(g)$

a) $\Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ - T.\Delta_r S^\circ$ $\rightarrow$ | $T = 400\ K$; $\left.\begin{matrix}\Delta_r H^\circ \\ \Delta_r S^\circ\end{matrix}\right]$ obtenu à partir des tabl

$$\Delta_r H^\circ = \Delta_f H^\circ_{I_2} + \Delta_f H^\circ_{H_2} - 2\Delta_f H^\circ_{HI}$$

$$\Delta_r S^\circ = S^\circ_{I_2} + S^\circ_{H_2} - 2S^\circ_{HI}$$

$\Leftrightarrow$ $\Delta_r G^\circ$ peut désormais être calculé

$$\Leftrightarrow \Delta_r G^\circ = -RT \ln K \quad \Leftrightarrow \quad K = e^{-\frac{\Delta_r G^\circ}{RT}}$$

b) $\rightarrow$ Gaz considérés comme parfait

$\hookrightarrow$ Équilibre $\quad P_{tot} = P_{I_2} + P_{H_2} + 2P_{HI} \quad \Leftrightarrow \quad P_{I_2} = P_{H_2}$

$$K = \frac{[I_2][H_2]}{[HI]^2} = \frac{P_{I_2}.P_{H_2}}{(P_{HI})^2} \quad \Leftrightarrow \quad P_{HI} = \sqrt{\frac{P_{I_2}P_{H_2}}{K}}$$

QUESTION 5 *(20 points)*

Dans son laboratoire, un chercheur étudie l'oxydation complète du toluène par l'oxygène en présence d'un catalyseur à base de cobalt, d'aluminium et de cérium (Co-Al-Ce) :

$$C_6H_5CH_3(g) + 9\,O_2(g) \xrightarrow{\text{Catalyseur}} 7\,CO_2(g) + 4\,H_2O\,(g)$$

La vitesse de la réaction ne dépend que de la quantité en toluène. Le chercheur compare deux catalyseurs prometteurs, le $Co_6Al_{1,2}Ce_{0,8}$ et le Co_6Al_2. Le tableau ci-dessous reprend ses résultats pour le premier catalyseur :

Température T (°C)	182,0	205,0	217,0	237,0	253,0
Constante cinétique k (h^{-1})	22,8	62,6	102,3	220,1	389,5

a) Déterminez graphiquement l'énergie d'activation de la réaction en présence du premier catalyseur, $E_a^{Co_6Al_{1,2}Ce_{0,8}}$. Dans ces conditions, trouvez le facteur pré-exponentiel de l'équation d'Arrhenius, $A^{Co_6Al_{1,2}Ce_{0,8}}$.

b) L'étude cinétique du second catalyseur donne les résultats suivants : $E_a^{Co_6Al_2} = 84{,}70$ kJ/mol et $A^{Co_6Al_2} = 6{,}43\times10^8\ h^{-1}$. Avec quel catalyseur l'oxydation est-elle la plus rapide ? (*Justifiez votre réponse.*)

c) Que vaut la vitesse initiale d'oxydation à 205,0 °C avec le premier catalyseur si la pression initiale en toluène est de 1,50 bar ? Après combien de temps 90% de la quantité initiale de toluène seront-ils consommés à cette température ?

QUESTION 5 *(20 points)*

Dans son laboratoire, un chercheur étudie l'oxydation complète du toluène par l'oxygène en présence d'un catalyseur à base de cobalt, d'aluminium et de cérium (Co-Al-Ce) :

$$C_6H_5CH_3(g) + 9\,O_2(g) \xrightarrow{\text{Catalyseur}} 7\,CO_2(g) + 4\,H_2O\,(g)$$

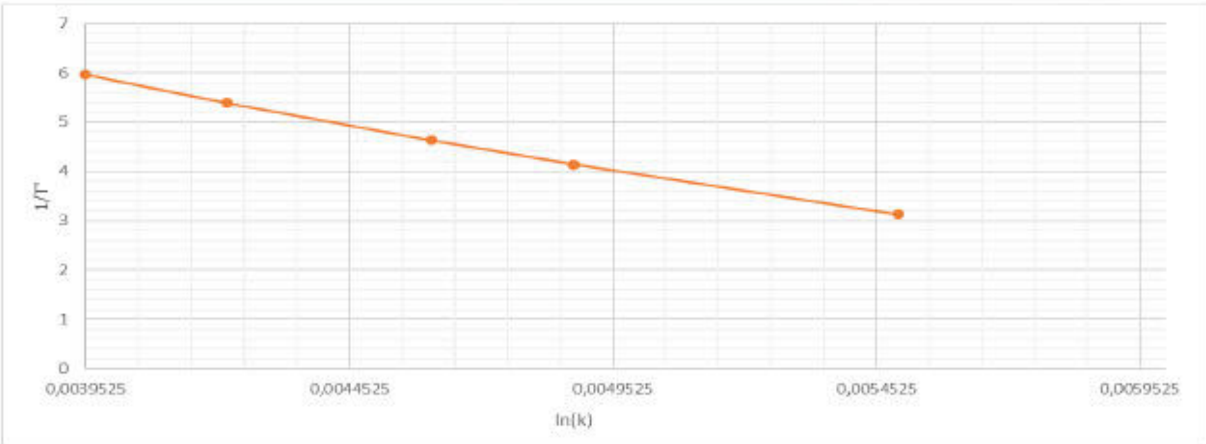
La vitesse de la réaction ne dépend que de la quantité en toluène. Le chercheur compare deux catalyseurs prometteurs, le $Co_6Al_{1,2}Ce_{0,8}$ et le Co_6Al_2. Le tableau ci-dessous reprend ses résultats pour le premier catalyseur :

Température T (°C)	182,0	205,0	217,0	237,0	253,0
Constante cinétique k (h^{-1})	22,8	62,6	102,3	220,1	389,5

a) Déterminez graphiquement l'énergie d'activation de la réaction en présence du premier catalyseur, $E_a^{Co_6Al_{1,2}Ce_{0,8}}$. Dans ces conditions, trouvez le facteur pré-exponentiel de l'équation d'Arrhenius, $A^{Co_6Al_{1,2}Ce_{0,8}}$.

b) L'étude cinétique du second catalyseur donne les résultats suivants : $E_a^{Co_6Al_2} = 84,70$ kJ/mol et $A^{Co_6Al_2} = 6,43\times10^8$ h^{-1}. Avec quel catalyseur l'oxydation est-elle la plus rapide ? *(Justifiez votre réponse.)*

c) Que vaut la vitesse initiale d'oxydation à 205,0 °C avec le premier catalyseur si la pression initiale en toluène est de 1,50 bar ? Après combien de temps 90% de la quantité initiale de toluène seront-ils consommés à cette température ?



Loi d'Arrhenius : $k = A.e^{\frac{-E}{RT}}$

a) Pour effectuer le graphique, il faut d'abord recalculer l'inverse de la température ainsi que le ln de K car : $\dfrac{d\ln(k)}{dT} = \dfrac{E}{RT}$

La pente de la droite obtenue nous donne le facteur $-\dfrac{E}{R}$,tandis que l'ordonnée à l'origine nous donne le facteur ln(A).

b) Pour comparer l'efficacité entre les deux catalyseurs, il suffit de calculer les constantes cinétique et de les comparer, la plus élevée impliquera la vitesse la plus élevée.

c) La vitesse ne dépend que de la quantité en toluène

Vitesse = k . [toluène]

Mun

Chimie Mai 2017

①

Q1 a)

$[Mg^{2+}] = 6.10^{-2}$ mol/L

$[Ca^{2+}] = 1.10^{-2}$ mol/L

① $Mg^{2+}_{(aq)} + 2\,OH^-_{(aq)} \rightleftharpoons Mg(OH)_{2\,(s)}$

$K_S = [Mg^{2+}].[OH^-]^2 \rightarrow [OH^-] = \sqrt{\frac{K_S}{[Mg^{2+}]}} = 9{,}67.10^{-6}$ mol/L

$pH = 14 + \log[OH^-] = 8{,}98$

② $Ca^{2+}_{(aq)} + 2\,OH^-_{(aq)} \rightleftharpoons Ca(OH)_{2\,(s)}$

$K_S = [Ca^{2+}][OH^-]^2 \rightarrow [OH^-] = \sqrt{\frac{K_S}{[Ca^{2+}]}} = 0{,}0206$ mol/L

$pH = 14 + \log[OH^-] = 12{,}3$

il faut avoir un pH de 12,3 pour qu'on précipite seulement $Mg(OH)_2$ car il faut un pH de + 12,3 pour faire précipiter le $Ca(OH)_2$.

b) En prenant compte du pH = 12,3 donc $[OH^-] = 0{,}0206$ M

$\Rightarrow [Mg^{2+}] = \frac{K_S}{[OH^-]^2} = 1{,}32.10^{-8}$ mol/L

Q2

a) $KH_2PO_{4(aq)} + H_2O(l) \rightleftharpoons K^+_{(aq)} + HPO_{4(aq)}^{2-} + H_3O^+_{(aq)}$ K_{A_2}

$HPO_4^{2-}{}_{(aq)} + H_2O(l) \rightleftharpoons PO_4^{3-}{}_{(aq)} + H_3O^+_{(aq)}$ K_{A_3}

① $KH_2PO_{4(aq)} + 2H_2O(l) \rightleftharpoons K^+_{(aq)} + PO_4^{3-}{}_{(aq)} + 2H_3O^+_{(aq)}$ $K_T = K_{A_2} \cdot K_{A_3}$

② $K_2HPO_{4(aq)} + H_2O(l) \rightleftharpoons 2K^+_{(aq)} + PO_4^{3-}{}_{(aq)} + H_3O^+_{(aq)}$ K_{A_3}

b) $pH = -\log[H_3O^+] \Rightarrow [H_3O^+] = 10^{-7,50}$

$\Rightarrow [H_3O^+] = K_{A_2} \cdot \frac{C_a}{C_b} \xrightarrow{V_t \text{ identique}} [H_3O^+] = K_{A_2} \cdot \frac{n_a}{n_b}$

ici $n_a = n_{H_2PO_4^-}$ et $n_b = n_{HPO_4^{2-}}$

$\Rightarrow \frac{n_a}{n_b} = \frac{[H_3O^+]}{K_{A_2}} \Rightarrow \frac{n_a}{n_b} = 0,499 \Rightarrow n_a = 0,499 \cdot n_b$

$\Rightarrow n_{H_2PO_4^-} = 0,499\, n_{HPO_4^{2-}}$

on additionne ① et ②

$n_{K^+} = C \cdot V = 0,5 \cdot 0,5$

$n_{H_2PO_4^-} + n_{HPO_4^{2-}} = 3n_{K^+}$

$\Rightarrow 0,499\, n_{HPO_4^{2-}} + n_{HPO_4^{2-}} = 3n_{K^+} \Rightarrow n_{HPO_4^{2-}} = \frac{3n_{K^+}}{1,499} = 0,5 \text{ mol}$

$\Rightarrow n_{H_2PO_4^-} = 0,5 \cdot 0,499 = 0,25$

$m_{K_2HPO_4} = n_{HPO_4^{2-}} \cdot M_{K_2HPO_4} = 87,1\ g$

$m_{KH_2PO_4} = n_{H_2PO_4^-} \cdot M_{KH_2PO_4} = 34,02\ g$

Mvn

Chimie Mai 2017

②

Q2

c) Si on ajoute NaOH qui est une base alors $C_b \nearrow$ et $C_a \searrow$

$n_{NaOH} = C \cdot V = 1 \cdot 0,1 = 0,1$ mol

$n'_a = 0,250 - 0,1 = 0,150$ mol

$n'_b = 0,500 + 0,1 = 0,600$ mol

$V'_t = 0,500 + 0,100 = 0,600$ L

$\Rightarrow [H_3O^+] = K_{A_2} \cdot \frac{C_a}{C_b}$ où $C_a = n'_A \cdot V'_t$ et $C_b = n'_b \cdot V'_t$

$\Rightarrow pH = pK_{A_2} - \log\left(\frac{C_a}{C_b}\right) = 7,80$

Q3

a) $Cu(s) \left| \begin{array}{l} Cu^{2+}_{(aq)} \text{ à } 0,300\,M \\ V = 0,2\,L \end{array} \right\| \begin{array}{l} KMnO_4 \text{ à } 0,300\,M \\ MnSO_4 \text{ à } 0,075\,M \\ pH = 2 \text{ et } V = 0,2 \end{array} \left| Pt(s) \right.$

Anode

Pont Salin

Cathode

Le couple qui va à la cathode est le couple rédox possédant un $\Delta E°$ plus élevé que l'autre couple. Ici le couple MnO_4^-/Mn^{2+} a un $\Delta E° = 1,507$ V et le couple Cu^{2+}/Cu a un $\Delta E° = 0,342$ V donc c'est normal de mettre le couple MnO_4^-/Mn^{2+} à la cathode car il a un $\Delta E°$ plus élevé que celui du couple Cu^{2+}/Cu

b)

$(MnO_4^-{}_{(aq)} + 8H^+{}_{(aq)} + 5e^- \rightleftharpoons Mn^{2+}{}_{(aq)} + 4H_2O_{(l)}) \times 2$

$(Cu^{2+}{}_{(aq)} + 2e^- \rightleftharpoons Cu_{(s)}) \times 5$

éq. globale : $2MnO_4^-{}_{(aq)} + 5Cu_{(s)} + 16H^+{}_{(aq)} \rightleftharpoons 5Cu^{2+}{}_{(aq)} + 2Mn^{2+}{}_{(aq)} + 8H_2O_{(l)}$

$K = e^{\left(\frac{n F . \Delta E}{RT}\right)}$

on a pas le ΔE. Du coup, il faut le calculer

$\Delta E = \Delta E_{cath} - \Delta E_{Anode}$

$\Delta E_{cath} = E^\circ_{MnO_4^-/Mn^{2+}} - \frac{RT}{\underset{=5}{n}F} . \ln\left(\frac{[Mn^{2+}]}{[MnO_4^-] . [H^+]^8}\right)$ $[H^+] = 10^{-pH} = 10^{-2}$

$= 1,32 V$

$\Delta E_{Anode} = E^\circ_{Cu^{2+}/Cu} - \frac{RT}{\underset{=2}{n}F} . \ln\left(\frac{1}{[Cu^{2+}]}\right)$

$= 0,327 V$

$\Rightarrow \Delta E = 0,993 V$

$\Rightarrow K = e^{\left(\frac{10 . 96485 . 0,993}{8,314 . 298}\right)} = 8,83 . 10^{167}$

c) $\Delta E = f.ém$

$f_{ém} = 0,993 V$

MVN

Chimie Mai 2017

③

Q4

a) $2\,HI_{(g)} \rightleftharpoons I_2(g) + H_2(g)$

$\Delta H = \Delta_f H_{I_2(g)} + \Delta_f H_{H_2(g)} - 2\Delta_f H_{HI(g)} = 9{,}48\ KJ/mol$

$\Delta S = \Delta_f S_{I_2(g)} + \Delta_f S_{H_2(g)} - 2\Delta_f S_{HI(g)} = -22{,}39\ J/mol\,K$

$G = \Delta H - T\Delta S$ où $T = 400k$

$= 17\,956\ J/mol$

$k = e^{-\frac{\Delta G}{RT}} = 4{,}52 \cdot 10^{-3}$

b)

	$2\,HI(g)$	$\rightleftharpoons I_2(g)$	$+ H_2(g)$
P_i	P_i	\	\
$P_{\rightleftharpoons}$	$P_i - x$	x	x

on sait que $P_{H_2 \rightleftharpoons}$ vaut 3,10 bar donc $x = 3{,}10$

$K_p = K = \frac{P_{I_2} \cdot P_{H_2}}{P_{HI}^2} \Rightarrow P_{HI}^2 = \frac{P_{I_2} \cdot P_{H_2}}{K}$

$\Rightarrow (P_i - 3{,}10)^2 = \frac{3{,}10 \cdot 3{,}10}{4{,}52 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow (P_i - 3{,}10) = 46{,}11$

$\Rightarrow P_i = 46{,}11 + 3{,}10 \Rightarrow P_i = 49{,}21$ bar.

$P_{tot\rightleftharpoons} = P_{I_2\rightleftharpoons} + P_{H_2\rightleftharpoons} + 2\,P_{HI\rightleftharpoons} = 52{,}31$ bar

Q5 a) $ut[k] = t^{-1}$

On nous dit que $V = k \cdot P_{\text{toluène}}$ donc cela veut dire qu'on a une réaction d'ordre 1.

$$\underbrace{\ln k}_{\text{AXE } y} = \underbrace{\ln A}_{\text{ordonnée à l'origine}} - \underbrace{\frac{E_A}{R}}_{\text{pente}} \cdot \underbrace{\frac{1}{T}}_{\text{AXE } x}$$

Donc on va faire un graphique qui porte $\ln k$ en fonction de $\frac{1}{T}$. La pente nous donnera $-\frac{E_A}{R}$. Du coup, on pourra trouver E_A

$$\frac{\ln k_{à\ 253°C} - \ln k_{à\ 182°C}}{\frac{1}{526} - \frac{1}{455}} = C.A. \Rightarrow CA = -9566,81\ K^{-1}$$

$\Rightarrow CA = \frac{-E_A}{R} \Rightarrow \frac{-E_A}{R} = -9566,81\ K^{-1} \Rightarrow E_A = 79,54\ kJ/mol$

*

b) $k_{CO_6Al_2} = e^{-\frac{E_A}{RT}} \cdot A$ à $T = 205\ °C$

$= 0,36\ h^{-1}$

à $205°C$ le $k_{CO_6Al_{1,2}Ce_{0,4}}$ est de $k = 62,6\ h^{-1}$

étant donné que le k du premier catalyseur est plus grand que le second du coup c'est lui le plus rapide.

* $\ln k = \ln A - \frac{E_A}{RT_{\to 205°C}} \Rightarrow \ln k + \frac{E_A}{RT} = \ln A \Rightarrow A = 3,082 \cdot 10^{10}\ h^{-1}$

c) $\ln P_{At} = \ln P_{A0} - kt \Rightarrow t = \ln P_{At} - \ln P_{A0} \cdot \frac{-1}{k_{\to 205°C}}$

$P_{At} = 10\% \cdot P_{A0} = 0,15$ $\qquad t = 0,037\ h = 133,2\ s$

$r = k \cdot P_{A0} \Rightarrow r = 93,9\ bar/h$

ULB

Faculté des Sciences — Année académique 2017/2018

PREMIERE ANNEE DE BACHELIER EN SCIENCES BIOLOGIQUES, CHIMIQUES, GEOGRAPHIQUES, GEOLOGIQUES, PHYSIQUES, EN SCIENCES DE L'INGENIEUR (ORIENTATION BIOINGENIEUR), MATHEMATIQUES (ORIENTATION BIOLOGIE), PREMIERE ANNEE POLYVALENTE EN SCIENCES

INTERROGATION DE CHIMIE du 8 janvier 2018

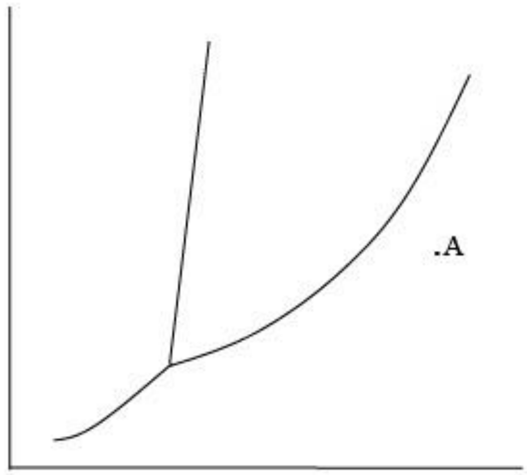
Première partie - Théorie

NOM, Prénom: ....

Section et numéro de matricule : 1

<u>QUESTION 1</u> *(25 points)*.

Soit le diagramme de phases d'un corps pur X :



Complétez ⇒

	symbole	Unité (MKS)
ordonnée		
abscisse		

a) Indiquez sur ce diagramme les phases solide, liquide, et gaz, par les lettres S, L, G, respectivement.

b) Indiquez par une flèche la courbe d'équilibre liquide – gaz.

c) Écrivez l'équation mathématique décrivant cette courbe.

QUESTION 1 *(suite)*

d) Ce diagramme implique un rapport de densités entre les phases solide et liquide ; lequel ? Barrez ce qui est faux et justifiez votre réponse.

$d_S > d_L$ $\qquad\qquad$ $d_L > d_S$

e) Placez sur le graphe un point B : ce point doit correspondre à un équilibre de phases et être tel que le trajet de A à B (tracez-le) soit une isobare sur laquelle se situent deux changements d'états.

f) Écrivez la formule la plus générale de la variance, et appliquez-la aux courbes tracées ainsi qu'au point triple en explicitant la valeur prise par chaque terme dans la formule.

formule générale ⇒ ....

courbes ⇒ ....

point triple ⇒ ....

g) Représentez (sur le graphe) par un pointillé ce que devient ce diagramme si l'on réalise un mélange homogène du corps X (volatil) avec une petite quantité d'un soluté non volatil.

NOM, Prénom: .... ____________________

Section et numéro de matricule : 3

QUESTION 2 *(20 points)*

Sachant que le chlore et l'iode sont des halogènes dont les nombres atomiques Z valent respectivement 17 et 53 :

a) Ecrivez la structure électronique de l'atome de chlore dans son état fondamental :

b) Complétez le tableau suivant :

	ICl_4^-	IO_4^-
Structure de Lewis		
Résonance	OUI / NON	OUI / NON
Charges formelles (labellisez clairement les différents atomes)		

NOM, Prénom: .... ____________________

Section et numéro de matricule : 4

<u>QUESTION 3</u> *(20 points)*

Les hydrures métalliques sont une source d'hydrogène intéressante pour les piles à combustible, qui pourraient à terme remplacer les moteurs à explosion actuels. Afin d'étudier les propriétés de l'un d'entre eux, 250 g de $LiBH_4$(s) sont placés dans un réacteur *isolé et indéformable* de volume *V,* en présence de carbone graphite. La réaction endothermique entre les deux solides mène à la formation de dihydrogène et de LiBC(s).

a) Ecrivez l'équation stœchiométrique équilibrée de la réaction.

b) La température en fin de réaction est-elle inférieure, supérieure ou identique à la température initiale ? Justifiez.

c) L'énergie interne en fin de réaction est-elle inférieure, supérieure ou identique à sa valeur initiale ? Justifiez.

d) Si la réaction avait été effectuée dans un réacteur à *pression* constante, aurait-elle été plus endothermique, moins endothermique, ou la chaleur de réaction aurait-elle été la même ? Justifiez.

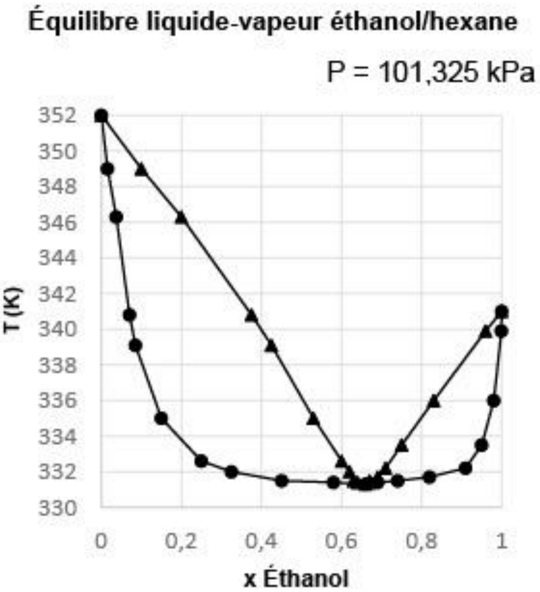
NOM, Prénom: .... ________________

Section et numéro de matricule : 5

QUESTION 4 *(20 points)*

Soit le diagramme de phases décrivant l'équilibre liquide-vapeur du mélange éthanol-hexane.

a) La mélange éthanol/hexane constitue-t-il une solution idéale ? Justifiez en termes d'interactions intermoléculaires en cochant dans le tableau ci-dessous les interactions pertinentes. (DI = dipôle induit, DP = dipôle permanent, LH = lien hydrogène).



Substance	DI-DI	DP-DP	LH
éthanol			
hexane			

Conclusion : ceci est/n'est pas une solution idéale (barrer la mention incorrecte)

<u>QUESTION 4</u> *(suite)*

b) Choix multiples à réponse unique ; justifiez votre choix en une phrase ! ***Attention : un choix sans justification correcte implique la nullité de la réponse.***

- Ce graphe représente
  - des courbes isothermes.
  - des courbes isobares.
  - un azéotrope à maximum.
  - un eutectique.
  - Aucune des propositions.

Justification :

- La température d'ébullition de l'éthanol pur est égale à
  - 331,8 K.
  - 341 K.
  - 352 K.
  - Aucune des propositions.

Justification :

- Si on distille un mélange composé de 80% d'éthanol, la fraction de tête sera composée
  - d'azéotrope.
  - d'éthanol pur.
  - d'hexane pur.
  - Aucune des propositions.

Justification :

- Si on distille un mélange composé de 80% d'hexane, la fraction de queue sera composée
  - d'éthanol pur.
  - d'hexane pur.
  - d'un mélange 0,65/0,35 éthanol/hexane.
  - Aucune des propositions.

Justification :

NOM, Prénom: .... ________________

Section et numéro de matricule : 7

QUESTION 5 *(5 points)*

Les gaz nobles présentent les paramètres « a » de van der Waals suivants :

	a ($atm \cdot L^2 \cdot mol^{-2}$)
He	0,0346
Ne	0,208
Ar	1,355
Kr	5,193
Xe	4,192

Soient 5 échantillons différents, contenant chacun une quantité identique *n* de l'un de ces gaz. En vous basant uniquement sur le paramètre « a », quel gaz exercera la pression la plus élevée ? Justifiez en 3 lignes maximum.

NOM, Prénom: .... __________________

Section et numéro de matricule : 8

QUESTION 6 *(10 points)*

Les lois ébullioscopique et cryoscopique prennent la forme suivante :
$\Delta T = \nu K m$ (avec m = molalité)
En solution aqueuse, que vaut ν (théorique) pour :
$CaCl_2$:
KCl :
Justifiez en trois lignes maximum.

D'autre part, la constante K dépend de (entourez la bonne réponse) :
Attention, entourer une réponse incorrecte = perte de points

- La nature du soluté

- la nature du solvant

- la quantité de soluté

- la quantité de solvant

- la nature des interactions solvant-soluté

- l'âge du capitaine

Faculté des Sciences Année académique 2017/2018

PREMIERE ANNEE DE BACHELIER EN SCIENCES BIOLOGIQUES, CHIMIQUES, GEOGRAPHIQUES, GEOLOGIQUES, PHYSIQUES, EN SCIENCES DE L'INGENIEUR (ORIENTATION BIOINGENIEUR), MATHEMATIQUES (ORIENTATION BIOLOGIE), PREMIERE ANNEE POLYVALENTE EN SCIENCES

INTERROGATION DE CHIMIE du 8 janvier 2018

Seconde partie - Exercices

NOM, Prénom: ....

Section et numéro de matricule : 1

QUESTION 1 *(25 points)*

Lors d'un voyage scientifique, du butane (C_4H_{10}) a été transporté à -63,15°C. Quelle est la pression de vapeur du butane à cette température sachant que, à pression normale, sa température d'ébullition est de -0,5°C, et que son enthalpie de vaporisation vaut 22,389 $kJ \cdot mol^{-1}$?

Une partie de ce butane a été utilisée sous sa forme gazeuse et mélangée à du propane (C_3H_8) gazeux. Après avoir effectué, en présence de dioxygène, la combustion de 0,7310 g du mélange des deux gaz, la réaction libère 1,245 L de CO_2 à 21,00°C sous 740,0 mmHg.
Quelle était la masse de butane dans l'échantillon initial ?
Quelle sera la masse d'eau libérée ?
Quel a été le volume de dioxygène (mesuré dans les conditions normales de température et pression) utilisé ?
Conseil : pour résoudre cette question, nous vous conseillons de garder le maximum possible de chiffres significatifs dans vos calculs.

NOM, Prénom: .... ________________

Section et numéro de matricule : 2

<u>QUESTION 2</u> *(25 points)*

Le carbone est constitué de plusieurs isotopes (^{12}C, ^{13}C, ^{14}C) dont certains sont radioactifs. Sachant que la demi-vie de l'isotope 14 du carbone est de 5730 années, le chimiste américain Libby a développé la méthode de datation dite « au carbone 14 ». En dosant la radioactivité libérée par un échantillon contenant des fibres végétales, il est possible de dater ce dernier, c'est-à-dire d'estimer quand il a été fabriqué. En effet, on suppose que la fibre végétale s'est construite par extraction du carbone (CO_2) de l'atmosphère, via la photosynthèse, et que le rapport $^{14}C/^{12}C$ est resté décemment constant dans l'atmosphère au cours des siècles (ceci a été validé par d'autres méthodes). Il a été mesuré que le ^{14}C dans un organisme vivant avait une activité spécifique de 15,3 désintégrations par minute, par gramme de carbone total, ce qui correspond à 0,255 Bq/g (le Becquerel, ou Bq, est l'unité de mesure de radioactivité).

Des archéologues ont retrouvé un outil en bois, préservé de l'oxydation et de l'humidité, et donc intact. Ils l'ont confié à un chimiste responsable d'un laboratoire d'analyse de traces. La radioactivité émise par cet outil est de 0,195 Bq/g. Quand cet outil a-t-il été fabriqué ?

Interrogation de chimie – CHIM-F-101 – 08 janvier 2018 – Exercices

NOM, Prénom: ....

Section et numéro de matricule : 3

QUESTION 3 *(25 points)*

Un élément crucial dans la survie du personnage incarné par Matt Damon dans le récent film de Ridley Scott est l'utilisation de l'hydrazine (N_2H_4) sous forme liquide comme carburant de fusée afin de produire de l'eau. En effet, l'hydrazine se dissocie à la surface d'un catalyseur métallique en diazote et en dihydrogène gazeux. La combustion du dihydrogène récolté produit de l'eau, indispensable à la vie et à la production de denrées alimentaires.

a) Calculez la chaleur de combustion isochore associée à la production de 1 kg d'eau (liquide, à 25 °C) à partir de dihydrogène et de dioxygène gazeux.

b) Calculez l'augmentation de température qui résulterait de cette production dans l'habitacle initialement à 298 K, si la chaleur spécifique de l'atmosphère artificielle à volume constant y est égale à 0,718 $kJ.kg^{-1}.K^{-1}$.

c) A votre avis, l'hypothèse formulée dans le film, et compte tenu des hypothèses de calcul présentées ici, est-elle crédible ?

(Négligez l'énergie libérée lors de la dissociation de l'hydrazine ; considérez un rendement de 100%, une chaleur de réaction et une chaleur spécifique inchangées suite à l'augmentation de température initialement à 298 K, et un habitacle de 50 m^3 d'air.)

ρ_{air} (298K) = 1,184 $kg.m^{-3}$

NOM, Prénom: .... __________________

Section et numéro de matricule : 4

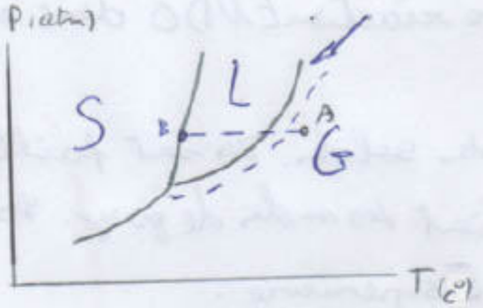
QUESTION 4 *(25 points)*

L'argent et le palladium cristallisent tous deux dans le système cubique à faces centrées. En alliage, ces deux éléments forment une solution solide idéale. Dans ces conditions, le paramètre cristallin de la maille (a) varie linéairement avec la composition. Le paramètre de maille de l'argent vaut 0,40862 nm, et celui du palladium 0,38898 nm.

Afin de déterminer la composition d'un alliage Ag_xPd_y, on analyse un échantillon par diffraction de rayons X. L'anode utilisée est du cuivre, et la longueur d'onde sélectionnée correspond à la raie K(alpha) et vaut 1,5406 ångström (1 ångström = 10^{-10} m). Dans ces conditions, l'angle de diffraction du plan (200) vaut 22,725°. Quelle est la composition de l'alliage ?

Janvier 2018 (Théorie)

Q1



éq de la courbe :

$P^{o}_{(T)} = cst \cdot \exp\left[\frac{-\Delta H^{o}_{vap}}{RT}\right]$

$d_S > d_L$

$V = C - \varphi + 2$

courbes : $V = 1 - 2 + 2 = 1$

pt triple : $V = 1 - 3 + 2 = 0$

Q2 $Cl : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5$

$I : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 5s^2 5p^5$

ICl_4^-

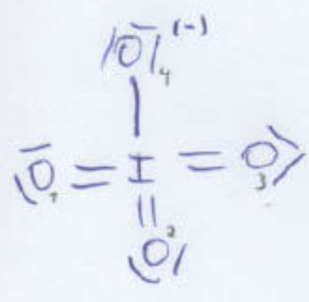
Non

CF :

$Cl : 7 - 6 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 0$

$I : 7 - 2 - \frac{1}{2} \cdot 8 = 1$

IO_4^-



Oui

CF :

$O_{1,2,3} : 6 - 4 - \frac{1}{2} \cdot 4 = 0$

$I : 7 - 0 - \frac{1}{2} \cdot 14 = 0$

$O_4 : 7 - (6+1) - \frac{1}{2} \cdot 2 = -1$

Q3
a) $LiBH_{4(s)} + C_{(s;gr)} \xrightarrow{chaleur} 2H_{2(g)} + LiBC_{(s)}$

b) L'énoncé précise que c'est une réaction ENDO donc elle consomme de la chaleur $\Rightarrow$ T inférieure.

c) Initialement, il n'y a que des solides. Ils sont faible en énergie. En fin de réaction, on obtient des moles de gaz. Les gaz sont haut en énergie. $\Rightarrow$ E supérieure.

d) Si V est et P est, la réaction "évitera" de former des moles de gaz. L'équilibre sera poussé vers la gauche. Si on veut que la réaction se déroule vers la droite, il faut fournir beaucoup d'énergie (sous forme de chaleur).
$\Rightarrow$ Chaleur en fin de réaction sera plus basse.

Janvier 2018 (Exo)

Q1
$T_1 = -63,15°C = 210K$
$P_1 = ?$
$P_2 = 1 atm$
$T_2 = -0,5°C = 272,65K$
$\Delta H°_{VAP} = 22,389 kJ/mol$

$$\ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) = -\frac{\Delta H°_{VAP}}{R}\left[\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}\right)$$

$P_1 = 0,05 atm$

(1) $C_4H_{10}(g) + \frac{13}{2} O_2(g) \longrightarrow 4 CO_2(g) + 5 H_2O(l)$

(2) $C_3H_8(g) + 5 O_2(g) \longrightarrow 3 CO_2(g) + 4 H_2O(l)$

$m_{C_4H_{10}} + m_{C_3H_8} = 0,7370 g$
$n_{C_4H_{10}} \cdot mm_{C_4H_{10}} + n_{C_3H_8} \cdot mm_{C_3H_8} = 0,7370 g$

$V_{CO_2(1)} + V_{CO_2(2)} = 1,245 L$ à 21°C et $P = 740 mmHg = 0,9737 atm$
$n_{CO_2(1)} + n_{CO_2(2)} = 1,245 L$

(1) $\frac{n_{C_4H_{10}}}{4} = n_{CO_2(1)}$
(2) $\frac{n_{C_3H_8}}{3} = n_{CO_2(2)}$

Il faut remplacer et résoudre le syst à 2 éq et 2 inc.

Q2 $t_{1/2} = 5730$ ans
$0,255 Bq/g \longrightarrow N_0$
$0,195 Bq/g \longrightarrow N$

$k = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} = 1,20968 \cdot 10^{-4}$

$$\ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = -kt$$

$t = 2217,64$ années.

(4) $n\lambda = 2d \sin\theta$

CFC

$a_{Ag} = 0,40862 \cdot 10^{-9}\ m$

$a_{Pd} = 0,38898 \cdot 10^{-9}\ m$

$\lambda = 1,5406 \cdot 10^{-10}\ m$

plans (200)

$\theta = 22,725^{\circ}$

Résolution classique. Seule difficulté à la fin, il faut ÷ par 2

Faculté des Sciences

Année académique 2017/2018

PREMIERE ANNEE DE BACHELIER EN SCIENCES BIOLOGIQUES, CHIMIQUES, GEOGRAPHIQUES, GEOLOGIQUES, PHYSIQUES, EN SCIENCES DE L'INGENIEUR (ORIENTATION BIOINGENIEUR), PREMIERE ANNEE POLYVALENTE EN SCIENCES

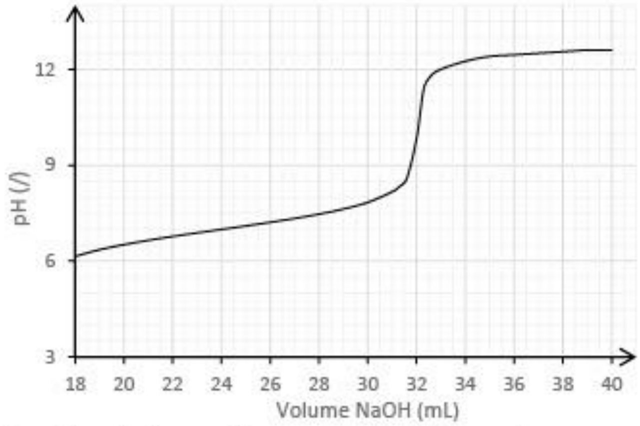
EXAMEN DE CHIMIE du 28 mai 2018

NOM, Prénom: ....

Section et numéro de matricule : 1

QUESTION 1 *(20 points)*

Le saut de pH représenté sur ce graphe est le second observé lors du titrage de 20,0 mL d'une solution aqueuse d'acide sulfureux par une solution aqueuse d'hydroxyde de sodium de concentration 0,15 mol/L.



a) Ecrivez l'équation ionique nette correspondant à ce saut.
b) La réaction est-elle complète ? Justifiez.
c) Quelle est la concentration initiale de la solution d'acide sulfureux ?
d) Quel est le pH de cette solution ?
e) Quel est le pH du mélange à la première équivalence ?
f) Schématisez sur le graphe ci-dessus la courbe de titrage si l'acide avait été moins concentré.

NOM, Prénom: .... ________________

Section et numéro de matricule : 2

QUESTION 2 *(20 points)*

Une pile est construite à partir de 2 cellules électrochimiques à 25°C. L'une contient une lamelle de cuivre trempée dans une solution aqueuse de $CuCl_2$ (0,200 M), à un pH de 5, l'autre contient un fil de platine trempé dans une solution aqueuse de $NaNO_3$ (0,100 M), à un pH de 3, et du NO à la pression de 1,2 bar. Le volume de chaque solution est de 20,0 mL.

a. Ecrivez les équations ioniques nettes correspondant aux réactions à la cathode et à l'anode ainsi que la réaction globale du fonctionnement de la pile.
b. Calculez la force électromotrice de cette pile.
c. Quelle sera la différence de potentiel standard de la pile si on augmente la température à 80°C ? (Négligez la variation des grandeurs thermodynamiques pour effectuer vos calculs.)
d. Quel sera le pH dans le compartiment azoté après une électrolyse de 50 min par un courant de 100 mA à 25 °C ? Sachant que la lamelle de cuivre pesait 1,00 g avant l'électrolyse, quelle sera sa masse après ?

NOM, Prénom: .... __________________

Section et numéro de matricule : 3

QUESTION 3 *(20 points)*

a) Quelle devrait être la concentration d'une solution aqueuse de nitrate d'argent pour que, lorsque l'on ajoute à 500 mL de cette solution 500 mL de solution aqueuse de NH_3 2.10^{-3} M, on obtienne la même concentration en cation argent et en cation complexe à l'équilibre ? (On admettra l'additivité des volumes.)

b) Quelles seront les espèces présentes en solution si on ajoute à ce mélange un large excès de cyanure de potassium solide ? Justifier sur base des constantes de complexation.

NOM, Prénom: .... __________________

Section et numéro de matricule : 4

QUESTION 4 *(20 points)*

Le carbamate d'ammonium peut, dans certaines conditions, se décomposer selon la réaction suivante :

$NH_2CO_2NH_4$ (g) $\leftrightarrow$ NH_2CO_2H (g) + NH_3 (g)

A 50°C, l'entropie standard de cette réaction vaut 225 J/mol.K, et sa constante d'équilibre vaut 1,00. On considère que les gaz se comportent comme des gaz parfaits.

a) Déterminez l'enthalpie libre standard de Gibbs et l'enthalpie standard de cette réaction
b) Dans un réacteur à 50°C, à l'équilibre, on mesure des pressions de 0,50 bar pour NH_2CO_2H et 2,00 bar pour l'ammoniac. En maintenant la température constante, on diminue ensuite le volume du réacteur de moitié par compression.
   - Que devient la constante d'équilibre ?
   - Calculez les valeurs de pressions partielles lorsque le système sera revenu à l'équilibre.

NOM, Prénom: .... __________________

Section et numéro de matricule : 5

QUESTION 5 *(20 points)*

On observe que la disparition d'une substance active (médicament) dans l'organisme d'un être humain suit une loi identique à la loi de la désintégration nucléaire.
Les résultats de l'étude indiquent que le "temps de demi-vie" associé à la substance active est de 2275,8 s et que, chez l'être humain, la substance n'a plus d'effet en-dessous d'une concentration limite de 1,00 microgramme par kg de masse corporelle pour une température de 37,5°C.

1) Sachant que les doses sont fournies sous forme de pastilles contenant 750 mg de substance active, quel sera l'intervalle de temps maximum qu'un être humain de 75,0 kg devra respecter entre deux prises pour subir un effet de la substance en continu ?
2) L'effet de la température est étudié et les informations suivantes sont obtenues :

T /°C	**$t_{1/2}/s^{-1}$**
36,0	2332,9
37,5	2275,8
38,0	2262,8
39,0	2226,2
40,0	2192,4

Déterminez l'énergie d'activation du processus graphiquement. Détaillez vos calculs.

Mai 2018

Q7

a) $H_2SO_{3(aq)} + OH^-_{(aq)} \longrightarrow HSO_3^-{}_{(aq)} + H_2O_{(l)}$

b) $H^+_{(aq)} + OH^-_{(aq)} \rightleftharpoons H_2O_{(l)}$ $\quad \frac{1}{K_e}$

$H_2SO_{3(aq)} \rightleftharpoons HSO_3^-{}_{(aq)} + H^+_{(aq)}$ $\quad K_{a1}$

$$K = \frac{1}{K_e} \cdot K_{a1} \gg 1$$

c) $1000\,ml \longrightarrow 0{,}15\,mol$

$18\,ml \longrightarrow 2{,}7 \cdot 10^{-4}\,mol$

$2{,}7 \cdot 10^{-4}\,mol \longrightarrow 20\,ml$

$0{,}0135\,mol \longrightarrow 1000\,ml$

$\Rightarrow 0{,}0135\,M$

d) $pH = 6{,}1$

e) $pH = 9{,}8$

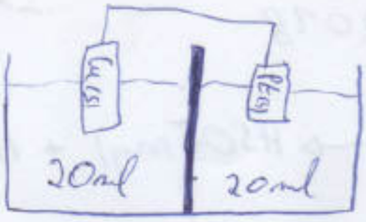
f)

initial

moins concentré

Q2

a)



$CuCl_2(aq)$ $NaNO_3(aq)$
0,2M 0,1M
$[H^+]=10^{-5}M$ $[H^+]=10^{-3}M$
$NO(g): 1,2$ bar

Anode: $3(Cu(s) \rightleftharpoons Cu^{2+}(aq) + 2e^-)$ $\quad \varepsilon^\circ = 0,342V$

Cathode: $2(NO_3^-(aq) + 4H^+(aq) + 3e^- \rightleftharpoons NO(g) + 2H_2O(l))$ $\quad \varepsilon^\circ = 0,957V$

$\oplus$

$3Cu(s) + 2NO_3^-(aq) + 8H^+(aq) \rightleftharpoons 3Cu^{2+}(aq) + 2NO(g) + 4H_2O(l)$
0,1M $\quad 10^{-3}M \quad$ 0,2M $\quad$ 1,2 bar

b) $\Delta\varepsilon^\circ = \varepsilon^\circ_{cat} - \varepsilon^\circ_{an} = 0,615V$

$\Delta\varepsilon = \varepsilon^\circ - \frac{RT}{n_eF}\ln(Q)$

$\overset{!}{=} 0,615 - \frac{8,314 \cdot 298}{6 \cdot 96485}\ln\left(\frac{(1,2)^2(0,2)^3}{(10^{-3})^8(0,1)^2}\right)$

$\overset{!}{=} 0,378V$

d) $Q = It = n_{e}F$ $\quad m_{Cu} = 1g$ $\quad mm_{Cu} = 63,546g/mol$

$t = 50 \cdot 60 = 3000s$ $\quad n_{Cu(s)} = 0,0157mol$

$I = 100 \cdot 10^{-3}A$

$n_{e} = \frac{I \cdot t}{F} = 3,11 \cdot 10^{-3}mol$

$2\,n_{Cu(s)} = n_{e}$

$n_{Cu(s)} = 1,555 \cdot 10^{-3}mol$

$m_{Cu(s)} = 0,09881g$

$m_T = 1 - 0,09881 = 0,90119g$ restants de Cu(s)

Mai 2018

Q4 a) $K = \exp\left[-\frac{\Delta G^\circ}{RT}\right] = \exp\left[\frac{\Delta S^\circ}{R}\right] \cdot \exp\left[-\frac{\Delta H^\circ}{RT}\right]$

$\Delta S^\circ = 225\ J/molK$ $\quad T = 323\ K$

$K = 1$

$R = 8{,}314$

$$1 = \exp\left[\frac{225}{R}\right] \cdot \exp\left[-\frac{\Delta H^\circ}{RT}\right]$$

$$1{,}765 \cdot 10^{-12} = \exp\left[-\frac{\Delta H^\circ}{RT}\right]$$

$$\Delta H^\circ = 72675\ J/mol$$

$$\Delta G^\circ = \Delta H^\circ - T\Delta S^\circ$$

$$\overset{!}{=} 72675 - 323 \cdot 225$$

$$\overset{!}{=} 0$$

b) $PV = nRT$ $\quad P_A^\circ = \chi^A \cdot P_{Tot}$ $\quad \chi^A = \frac{n_A}{n_T}$

$P_T = \sum_i P_i$

Q5 $t_{1/2} = 2275,8\ s$ $750 \cdot 10^{-3}\ g$ pour $75\ kg$

$10 \cdot 10^{-3}\ g$ pour $1\ kg$

$[\ ]_{lim} = 10^{-6}\ g/kg$

$\ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = -kt$ $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k}$

$k = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} = 3,0457 \cdot 10^{-4}$

$t = \frac{\ln\left(\frac{10^{-6}}{10 \cdot 10^{-3}}\right)}{-3,0457 \cdot 10^{-4}} = 30\,240,47\ s$

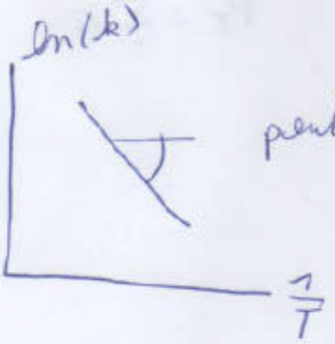
$\doteq$ 8h 24 min entre chaque prise.

$k = \frac{\ln(2)}{t_{1/2}}$

T en Kelvin $k = A \cdot \exp\left[-\frac{Ea}{RT}\right]$

$\ln(k) = \ln(A) \cdot \left(-\frac{Ea}{RT}\right)$

ordonnée à l'origine



pente : $-\frac{Ea}{R}$

Faculté des Sciences

Année académique 2017/2018

PREMIERE ANNEE DE BACHELIER EN SCIENCES BIOLOGIQUES, CHIMIQUES, GEOGRAPHIQUES, GEOLOGIQUES, PHYSIQUES, EN SCIENCES DE L'INGENIEUR (ORIENTATION BIOINGENIEUR), PREMIERE ANNEE POLYVALENTE EN SCIENCES

EXAMEN DE CHIMIE du 13 août 2018

NOM, Prénom: ....

Section et numéro de matricule : ....

Précision : si vous avez eu une note de janvier ou de juin <10, vous DEVEZ repasser la partie correspondante. Si vous avez obtenu une note >10 pour une partie, vous POUVEZ la repasser. Afin que ceci soit clair, tant pour vous que pour les correcteurs, vous trouverez ci-dessous les différents cas de figure possibles, et les questions associées auxquelles nous vous demandons de répondre.
<u>Sélectionnez ci-dessous la situation qui vous correspond, entourez cette situation et signez cette page</u>.
Ensuite, répondez aux questions.
Bon examen

A quelles questions répondre :

Situation 1. vous avez eu une note <10 à l'examen écrit de janvier ET à l'examen écrit de juin : vous répondez aux questions 1, 3, 4, 5, 6

Situation 2. vous avez eu une note <10 à l'examen écrit de juin, mais vous avez une cote d'examen de janvier supérieure ou égale à 10 (y compris le point bonus éventuel lié aux travaux personnels et la partie intégrée de l'interrogation d'octobre) : vous répondez aux questions 4, 5, 6, 7

Situation 3 : vous avez eu >10 en janvier, et une note <10 en juin, mais vous souhaitez abandonner votre note de janvier (ATTENTION, celle-ci sera effacée si vous choisissez cette option), vous répondez aux questions 1, 3, 4, 5, 6.

Situation 4 : vous avez eu une note >10 à l'examen écrit de juin, mais votre note de janvier est inférieure à 10 : vous répondez aux questions 1, 2, 3 (a) et 5 partie Q1.

Examen de chimie - août 2018

NOM, Prénom: .... __________________

Section et numéro de matricule : 1

<u>QUESTION 1</u> *(20 points)*

Quel volume d'éthylène glycol – $C_2H_6O_2$ - (non électrolyte) faut-il ajouter à 15 litres d'eau pour produire une solution « antigel » résistant jusqu'à – 30 °C. Quelle est la température d'ébullition de cette solution ? La masse volumique de l'éthylène glycol est égale à 1,11 g/cm^3 et celle de l'eau à 1,00 g/cm^3. La constante cryoscopique de l'eau vaut 1,86 °C kg/mol et sa constante ébullioscopique vaut 0,51 °C kg/mol.

QUESTION 2 *(20 points)*

Sous une pression de 1 bar, on mélange 20,0 g de glace à – 10°C avec 100,0 g d'eau liquide à 80°C. Quelle est la température du mélange après équilibre thermique sachant que les capacités calorifiques de la glace et de l'eau liquide valent respectivement 2,08 J g^{-1} $°C^{-1}$ et 4,18 J g^{-1} $°C^{-1}$ et que l'enthalpie de fusion de la glace vaut 6,01 kJ/mol ? Vous pouvez supposer que la capacité calorifique du récipient ainsi que les pertes calorifiques sont négligeables.

Examen de chimie - août 2018

NOM, Prénom: .... __________________

Section et numéro de matricule : 3

<u>QUESTION 3</u> *(20 points)*

Soit la réaction d'hydrogénation du méthanal (HCOH), sous forme gazeuse, en méthanol (CH_3OH), également sous forme gazeuse. La constante d'équilibre de cette réaction vaut 1,33 atm^{-1} à 550°C.
a) dessinez la structure de Lewis du méthanal et du méthanol. Quelle est l'hybridation des atomes de carbone et d'oxygène dans ces deux molécules ?
b) écrivez l'équation stoechiométrique de la réaction d'hydrogénation et calculez la pression partielle des différentes espèces chimiques à l'équilibre (à 550°C), sachant que la pression totale vaut 0,600 atm et que la quantité initiale de méthanol est de 1,00 mol.

NOM, Prénom: .... __________________

Section et numéro de matricule : 4

QUESTION 4 *(20 points)*

Soit la pile
Sn | Sn^{2+} 0,050 mol/L, H^+ 1,00 mol/L, || MnO_4^- 0,020 mol/L, Mn^{2+} 0,050 mol/L, H^+ 1,00 mol/L| Pt
Les volumes aqueux initiaux dans les deux compartiments sont de 25,0 mL.
a) écrivez les équations correspondant aux réactions d'électrode et à la réaction globale.
b) quelle est la valeur de la constante d'équilibre de cette réaction ?
c) quelle est la f.e.m. de la pile décrite ci-dessus ?
d) Que vaut le potentiel de l'électrode de gauche après addition dans ce compartiment de 60,0 mL d'hydroxyde de potassium 0,500 mol/L ?

NOM, Prénom: ....

Section et numéro de matricule : 5

QUESTION 5 *(20 points)*

Soient les réactions suivantes :
a) hydroxyde de cadmium (s) et acide nitreux (aq), à 25°C
b) iodate de sodium (aq) et acide nitreux (aq) à 25°C
c) réaction de formation du nitrate de sodium (solide) dans les conditions standard à 25°C

Q1 Ecrivez les équations équilibrées des réactions ci-dessus (le cas échéant les équations ioniques nettes). Indiquez de quel type de réaction il s'agit (rédox, précipitation, acide-base, ….).
Q2 Calculez les constantes d'équilibre pour ces réactions.

NOM, Prénom: .... ____________________

Section et numéro de matricule : 6

<u>QUESTION 6</u> *(20 points)*

Soit une solution d'acide maléique 0,300 mol/L. On titre 20,0 mL de cette solution par une solution aqueuse de NaOH 0,200 mol/L.
a) écrivez les deux équations des réactions de titrage et démontrez que ces réactions sont complètes.
b) quel est le pH au second point d'équivalence ?
c) quel indicateur serait le plus approprié pour détecter ce point d'équivalence ?

Examen de chimie - août 2018

NOM, Prénom: .... ____________________

Section et numéro de matricule : 7

QUESTION 7 *(20 points)*

On mélange une solution aqueuse de nitrate d'argent (solution 1) avec une solution aqueuse de carbonate de sodium (solution 2).

1) Quelle réaction pourrait se produire ?

2) Quelle est la valeur de la constante d'équilibre de cette réaction à 298 K ?

3) Cette réaction se produira-t-elle si on mélange :

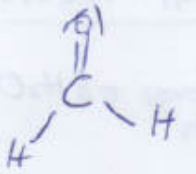
a) 10,0 mL de solution 1 (10^{-3} mol/L) et 20,0 mL de solution 2 (10^{-4} mol/L)

b) 20,0 mL de solution 1 (10^{-3} mol/L) et 10,0 mL de solution 2 (10^{-4} mol/L)

Calculer les concentrations à l'équilibre de tous les ions présents après mélange.

Août 2018

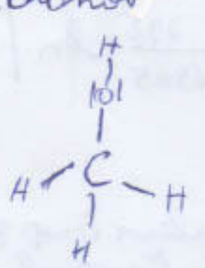
(Q3) méthanal : $6+2\cdot1+8=16\,\bar{e}$



C : sp^2
O : sp^2

CF
C : $4-8\cdot\frac{1}{2}=0$
O : $6-4-4\cdot\frac{1}{2}=0$

méthanol



C : sp^3
O : sp^3

$$HCOH_{(g)} + H_{2(g)} \rightleftharpoons CH_3OH_{(g)}$$

n_0	0	0	1
n_f	x	x	$1-x$

$P_T = 0{,}6 = 1-x+x+x$

$|x| = 0{,}4$

$$K_p = 1{,}33 = \frac{P^\circ_{CH_3OH}}{P^\circ_{H_2}\cdot P^\circ_{HCOH}} \xleftarrow{\text{on remplace}} P^\circ_A = P_T \cdot \chi_A$$

$P_T \downarrow 0{,}6$; $\chi_A \downarrow \frac{n_A}{n_T}$

$n_T = 0{,}6+0{,}4+0{,}4$

(Q1) $\Delta T = \bar{m}\cdot K_{éb}\cdot i$ $\quad \pi = CRTi$

$\Delta T = \bar{m}\cdot K_{cryo}\cdot i$

Q4

Anode : $5(Sn^{2+}_{(aq)} + 2\bar{e} \rightleftharpoons Sn_{(s)})$ $\qquad \varepsilon^{\circ} = -0{,}138V$

Cathode : $2(MnO_4^-{}_{(aq)} + 8H^+_{(aq)} + 5\bar{e} \rightleftharpoons Mn^{2+}_{(aq)} + 4H_2O_{(l)})$ $\qquad \varepsilon^{\circ} = 1{,}507V$

$+$

$$\underset{0{,}02M}{2MnO_4^-{}_{(aq)}} + \underset{1M}{16H^+_{(aq)}} + 5Sn_{(s)} \rightleftharpoons \underset{0{,}05M}{2Mn^{2+}_{(aq)}} + 8H_2O_{(l)} + \underset{0{,}05M}{5Sn^{2+}_{(aq)}}$$

$$\Delta\varepsilon^{\circ} = \varepsilon^{\circ}_c - \varepsilon^{\circ}_a = 1{,}645V$$

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^{\circ} - \frac{RT}{nF} \cdot \ln(Q) = 1{,}645 - \frac{8{,}314 \cdot 298}{10 \cdot 96485} \cdot \ln\left(\frac{0{,}05^2 \cdot 0{,}05^5}{0{,}02^2 \cdot 1^{16}}\right)$$

$$= 1{,}678V$$

$K = \exp\left[\frac{nF\Delta\varepsilon}{RT}\right]$ = math error. Valeur trop grande mais c'est normal.

$Sn^{2+}_{(aq)} + 2OH^-_{(aq)} \rightleftharpoons Sn(OH)_{2(s)}$ $\qquad K_s$

$2(H^+_{(aq)} + OH^-_{(aq)} \rightleftharpoons H_2O_{(l)})$ $\qquad \frac{1}{K_e}$

$Sn^{2+}_{(aq)} + 2H_2O_{(l)} \rightleftharpoons Sn(OH)_{2(s)} + 2H^+_{(aq)}$

$$K = K_s \cdot K_e^{-2}$$

Il faut trouver $[Sn^{2+}]$ et calculer Nernst

Aout 2018

Q6

1) $H_2X_{(aq)} + OH^-_{(aq)} \longrightarrow HX^-_{(aq)} + H_2O_{(l)}$

2) $HX^-_{(aq)} + OH^-_{(aq)} \longrightarrow X^=_{(aq)} + H_2O_{(l)}$

$20\,ml = 6 \cdot 10^{-3}$ mol : il faut 2 fois plus de $6 \cdot 10^{-3}$ mol d'acide fort car $0{,}03\,l \cdot 2 = 0{,}06\,l$

$V_T = 20\,ml + 2 \cdot 30\,ml = 80\,ml$

$[OH^-] = \sqrt{K_{b_2} \cdot C_b} = \sqrt{\frac{10^{-14}}{K_{a_2}} \cdot \frac{6 \cdot 10^{-3}}{0{,}08}} = 3{,}1 \cdot 10^{-5}\,M$

$pOH = 4{,}5 \rightarrow pH = 9{,}5$

Indicateur coloré : Thymolphtaléine $9{,}3 \rightarrow 10{,}5$

Dièmo

1) $H_2X_{(aq)} \rightleftharpoons HX^-_{(aq)} + H^+_{(aq)}$ $\quad K_{a1}$

$H^+_{(aq)} + OH^-_{(aq)} \rightleftharpoons H_2O_{(l)}$ $\quad \frac{1}{K_e}$

$$K_1 = K_{a1} \cdot \frac{1}{K_e} \gg 1$$

2) $HX^-_{(aq)} \rightleftharpoons X^=_{(aq)} + H^+_{(aq)}$ $\quad K_{a2}$

$H^+_{(aq)} + OH^-_{(aq)} \rightleftharpoons H_2O_{(l)}$ $\quad \frac{1}{K_e}$

$$K_2 = K_{a2} \cdot \frac{1}{K_e} \gg 1$$

Les 2 réactions sont complètes.

97

1) $2AgNO_3(aq) + Na_2CO_3(aq) \rightleftharpoons Ag_2CO_3 + 2NaNO_3$

2) $2Ag^+(aq) + CO_3^{2-}(aq) \rightleftharpoons Ag_2CO_3(s)$ $\quad \frac{1}{K_s} = 1{,}1834 \cdot 10^{11}$

$2(Na^+(aq) + NO_3^-(aq) \rightleftharpoons NaNO_3)$ $\quad K_i^2$

$$\Delta H_i^\circ = -20{,}37 \text{ kJ/mol}$$

$$\Delta S_i^\circ = -88{,}88 \text{ J/mol K}$$

$$K_i = \exp\left[\frac{\Delta S_i^\circ}{R}\right] \cdot \exp\left[\frac{-\Delta H_i^\circ}{RT}\right] = 0{,}0847$$

3) Il faut calculer la cst d'équilibre des réactions.

Si $K > K_s$ alors précipitation.

N° corr

Faculté des Sciences

Année académique 2018/2019

PREMIERE ANNEE DE BACHELIER EN SCIENCES BIOLOGIQUES, CHIMIQUES, GEOGRAPHIQUES, GEOLOGIQUES, PHYSIQUES, EN SCIENCES DE L'INGENIEUR (ORIENTATION BIOINGENIEUR), MATHEMATIQUES (ORIENTATION BIOLOGIE), PREMIERE ANNEE POLYVALENTE EN SCIENCES

INTERROGATION DE CHIMIE du 7 janvier 2019

Première partie – Théorie

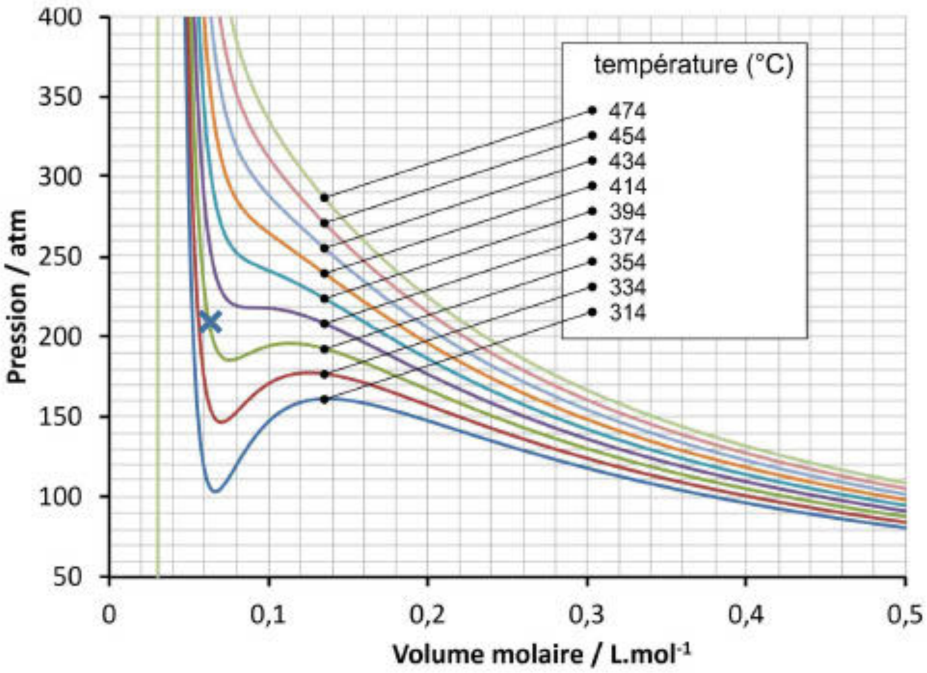
NOM, Prénom: ....

Section et numéro de matricule : ....

1

QUESTION 1 *(15 points) (Veuillez répondre au verso de cette page-ci)*

Par application de la formule des gaz réels de van der Waals, le graphique ci-dessous porte la pression en fonction du volume molaire d'une substance, à différentes températures.



a) Donnez les coordonnées du point critique ($V_{mol,crit}$, P_{crit}, T_{crit}) de cette substance.

b) Cette substance est-elle liquéfiable par compression à 340°C ? Justifiez votre réponse en 1 ligne

c) Sous quel état physique se trouve la substance à 210 atm à 354°C. Justifiez votre réponse et indiquez sur le graphique le point qui vous mène à votre conclusion.

a) $V_{mol,\ crit}$ = 0,090.L.mol^{-1} ; P_{crit} = 220 atm ; T_{crit} = 374°C

b) oui, car $T < T_{crit}$

c) liquide

N° corr

Interrogation de chimie – CHIM-F-101 – 07 janvier 2019 – Théorie

NOM, Prénom: .... ________________

Section et numéro de matricule : 2

QUESTION 2 *(20 points)*

a) Compétez le tableau ci-dessous

	N_2H_4	H_2	N_2O
Représentez **une** structure de Lewis possible		H-H	
Types d'interaction entre molécules	D-D D-DI DI-DI Liaison H	DI-DI	D-D D-DI DI-DI
Hybridation des deux atomes de N (à identifier par un n° sur la structure de Lewis représentée)	N(1) : sp^3 N(2) : sp^3	Ne rien indiquer ici	N(1) : sp N(2) : sp
Charges formelles des deux atomes	N(1) : 0 N(2) : 0	H(1) : 0 H(2) : 0	N(1) : 0 N(2) : +1
Types de liaisons sur la structure de Lewis représentée (σ et/ou π)	Entre N et N : σ	Entre H et H : σ	Entre N et O : σ

b) Laquelle des trois espèces a un comportement qui s'éloigne le plus de celui d'un gaz parfait ? Justifiez votre réponse.

N_2H_4, en raison des liaisons hydrogènes. Ces interactions sont plus importantes que celles liées au moment dipolaire de N_2O.

N° corr

Interrogation de chimie – CHIM-F-101 – 07 janvier 2019 – Théorie

NOM, Prénom: .... ____________________

Section et numéro de matricule : 3

<u>QUESTION 3</u> *(15 points)*

La configuration électronique $\sigma_{1s}^2\ \sigma_{1s}^{*2}\ \sigma_{2s}^2\ \sigma_{2s}^{*2}\ \pi_{2px}^2\ \pi_{2py}^2\ \sigma_{2p}^1\ \sigma_{3s}^1$ correspond à un des états excités de la molécule de CO.

a) Écrivez la configuration électronique de CO dans son état fondamental.
b) L'énergie de la liaison dans l'état excité mentionné varie-t-elle significativement par rapport à celle de l'état fondamental ? Justifiez à l'aide des ordres de liaison.
c) Cette molécule est-elle paramagnétique ou diamagnétique dans l'état excité ? Justifiez.

a) $\sigma_{1s}^2\ \sigma_{1s}^{*2}\ \sigma_{2s}^2\ \sigma_{2s}^{*2}\ \pi_{2px}^2\ \pi_{2py}^2\ \sigma_{2p}^2$
b) Non, car dans les 2 cas, l'ordre de liaison est égal à 3 (OL = $\frac{10-4}{2}$ = 3)
c) Paramagnétique, car elle présente des électrons non appariés

<u>QUESTION 4</u> *(10 points)*

Deux sources laser sont dirigées vers une surface métallique.
La première source émet des photons à une longueur d'onde de 200 nm avec une puissance de 1 W.
La seconde source émet des photons à une longueur d'onde de 500 nm avec une puissance de 10W.
Déterminez quelle source est la plus susceptible de déclencher l'effet photoélectrique.
Justifiez en 4 lignes maximum.

La première : $E = h\upsilon : \frac{hc}{\lambda}$ Si λ est inférieure, l'énergie des photons est plus élevée et davantage susceptible de déclencher une photoémission.

La puissance du faisceau n'intervient pas.

N° corr

Interrogation de chimie – CHIM-F-101 – 07 janvier 2019 – Théorie

NOM, Prénom: .... ________________

Section et numéro de matricule : 4

QUESTION 5 *(20 points)*

Cochez la case à côté de la réponse correcte. Il n'y a qu'une réponse correcte par énoncé.
Attention : Réponse au stylo à bille uniquement. Une rature ou une correction entraine l'annulation de la sous-question.

a. La définition de l'électronégativité selon Pauling dépend :
- ☐ du rayon covalent des atomes impliqués dans la liaison chimique.
- ☒ de l'énergie des liens entre les atomes impliqués dans la liaison.
- ☐ de l'affinité électronique des espèces.
- ☐ de la température.
- ☐ Aucune des réponses précédentes.

b. Soit le xénon, gaz noble de la 5ème période du tableau périodique et le krypton le gaz rare de la 4ème période. Quelle est la structure électronique fondamentale du xénon :
- ☐ [Kr] $5s^2$
- ☐ [Kr] $5s^2 4d^{10}$
- ☒ [Kr] $5s^2 4d^{10} 5p^6$
- ☐ [Kr] $5s^2 5d^{10} 5p^6$
- ☐ [Kr] $4s^2 5d^{10} 6p^6$
- ☐ [Kr] $5s^2 5p^6$

c. L'énergie d'un photon est :
- ☒ proportionnelle à sa fréquence
- ☐ inversement proportionnelle à sa fréquence
- ☐ proportionnelle à sa masse au repos
- ☐ proportionnelle au flux de photons d'une source lumineuse
- ☐ Aucune des propositions précédentes

d. La fonction de distribution radiale de l'orbitale 1s de l'ion $_{92}U^{91+}$ présente un maximum :
- ☐ plus éloigné du noyau par rapport à celui de l'orbitale 1s de l'H
- ☒ plus proche du noyau par rapport à celui de l'orbitale 1s de l'H
- ☐ de position inchangée par rapport à celui de l'orbitale 1s de l'H
- ☐ qui confère à l'ion U^{91+}une énergie d'ionisation plus faible que celle de l'atome d'hydrogène.

e. En supposant que la température de la surface du soleil soit plus élevée que sa température actuelle :
- ☒ son maximum d'émission se rapprocherait du violet
- ☐ son maximum d'émission se rapprocherait du rouge
- ☐ son maximum d'émission resterait inchangé car la longueur d'onde des photons émis par le soleil ne dépend pas de la température

N° corr

Interrogation de chimie – CHIM-F-101 – 07 janvier 2019 – Théorie

NOM, Prénom: ....

Section et numéro de matricule : 5

QUESTION 6 *(20 points)*

La formation de l'espèce $Ni(CO)_4(g)$ à température ambiante à partir de nickel solide et de monoxyde de carbone est un processus chimique spontané dans les conditions standard.

a) Ecrivez la réaction chimique de cette transformation.
b) Ecrivez l'expression de la constante d'équilibre de cette réaction chimique.
c) Quel serait l'effet d'une augmentation de la pression du CO(g) sur la valeur de la constante d'équilibre ?
d) Quel est le signe de la variation de l'enthalpie de cette transformation. Justifier votre raisonnement en 5 lignes maximum

a) $Ni\,(s) + 4\,CO\,(g) \rightleftharpoons Ni\,(CO)_4\,(g)$
b) $Kp = \frac{P_{Ni\,(CO)4}}{P_{CO}^{4}}$
c) Aucun effet
d) $\Delta_r G° < 0$ or $\Delta_r G° = \Delta_r H° - T\Delta_r S°$, à T ambiante la réaction consomme des moles de gaz : $\Delta ng = 1 - 4 = -3 \rightarrow \Delta S$, la variation de l'entropie du système, est négative.

$\rightarrow -T\,\Delta_r S° > 0$. Pour que $\Delta_r G°$ soit < 0, il faut obligatoirement que $\Delta_r H°$ le soit aussi.

$\rightarrow \boxed{\Delta_r H° < 0}$

N° corr

Faculté des Sciences

Année académique 2018/2019

PREMIERE ANNEE DE BACHELIER EN SCIENCES BIOLOGIQUES, CHIMIQUES, GEOGRAPHIQUES, GEOLOGIQUES, PHYSIQUES, EN SCIENCES DE L'INGENIEUR (ORIENTATION BIOINGENIEUR), MATHEMATIQUES (ORIENTATION BIOLOGIE), PREMIERE ANNEE POLYVALENTE EN SCIENCES

INTERROGATION DE CHIMIE du 7 janvier 2019

Seconde partie - Exercices

NOM, Prénom: ....

Section et numéro de matricule : 1

QUESTION 1 *(20 points). La réussite de cette question validera, le cas échéant, les travaux personnels des étudiants en sciences physiques.*

Lors de la combustion complète d'un hydrocarbure gazeux C_xH_y, on récupère 165,74 g d'eau et 404,89 g de dioxyde de carbone.

1) Déterminez la masse d'hydrocarbure brûlée lors de cette combustion.
2) Dans les conditions normales de température et de pression, l'hydrocarbure de départ occupe un volume de 51,55 L. Déterminez sa formule moléculaire.
3) Écrivez la réaction de la combustion complète de l'hydrocarbure.
4) Calculez le volume d'air utilisé à 25°C et à 1,00 atm lors de la combustion sachant que l'air est un mélange constitué de 21% en volume de dioxygène et de 79 % de diazote.

1) $m_{(CH2)n}$ = 9,2 mol. 12,011 g mol^{-1} + 18,4 mol. 1,0079 g mol^{-1} = 129,05 g

2) C_4H_8

3) $C_4H_8\,(g) + 6\,O_2\,(g) \rightarrow 4\,CO_2\,(g) + 4\,H_2O\,(l)$

4) $V = \frac{n\,R\,T}{P} = \frac{52{,}57\text{ mol}\cdot 0{,}08206\text{ L atm mol}^{-1}\text{K}^{-1}\cdot\ 298{,}15\text{ K}}{1\text{ atm}} = 1286\text{ L}$

N° corr

Interrogation de chimie – CHIM-F-101 – 07 janvier 2019 – Exercices

NOM, Prénom: ....

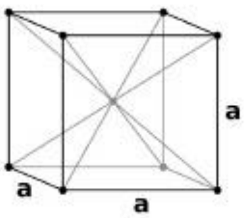
Section et numéro de matricule : 2

QUESTION 2 *(20 points)*

La maille élémentaire d'un cristal métallique de molybdène est un cube centré dont l'arête mesure 0,31474 nm.

<u>D'après ces données</u> :

1) Calculez le volume molaire (en $cm^3.mol^{-1}$) de ce métal.
2) A quel angle doit-on s'attendre à un pic de diffraction du premier ordre sur la face (002) de ce métal si une source de rayons X de 0,1541 nm de longueur d'onde est utilisée ?
3) Que vaut le rayon métallique d'un atome de molybdène ?

1) 

$\rightarrow V_m = 9,385\ cm^3\ mol^{-1}$.

2) Selon le schéma, il apparaît que $d_{(002)} = \frac{a}{2} = 0,15737$ nm

$\rightarrow \theta = 0,5116$ rad

3) $\rightarrow r_{mét} = \frac{\sqrt{3}.a}{4} = 0,13629$ nm

N° corr

Interrogation de chimie – CHIM-F-101 – 07 janvier 2019 – Exercices

NOM, Prénom: ....

Section et numéro de matricule : 3

QUESTION 3 *(20 points)*

Pour l'ammoniac, les équations des courbes de sublimation et de vaporisation vérifient les relations suivantes :

$$\text{Sublimation : } ln\left(\frac{P_S}{P^0}\right) = 16{,}4018 - \frac{3752{,}706\ K}{T}$$

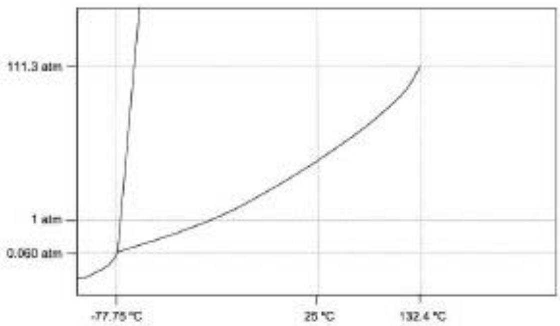
$$\text{Vaporisation : } ln\left(\frac{P_V}{P^0}\right) = 11{,}1696 - \frac{2730{,}033\ K}{T}$$

où P_S est la pression d'équilibre solide-gaz, P_V est la pression de vapeur saturante, $P^0 = 1\ bar$ et T est la température (en K).

a. Déterminez les coordonnées du point triple.
b. Schématisez le diagramme de phases de l'ammoniac sachant que les coordonnées du point critique de NH_3 sont (132,25°C ; 113,33 bar) et que la densité de l'ammoniac liquide est plus faible que celle de l'ammoniac solide. Faites apparaître sur votre schéma les coordonnées des points essentiels. Le schéma ne doit pas respecter les échelles.
c. Déterminez l'enthalpie de fusion de l'ammoniac et l'enthalpie de formation du $NH_3(s)$ dans les conditions définies par le point triple sachant que l'enthalpie de formation du $NH_3(g)$ dans ces conditions est égale à -46,11 kJ.mol^{-1}.

a) Les deux courbes se rencontrent au point triple :

$16{,}4018 - \frac{3752{,}706}{T} = 11{,}1696 - \frac{2730{,}033}{T}$
$\rightarrow$ T = 195,458 K et P = 0,0609442 bar



b) (Rem. les unités de la pression sont des atm et non des bars mais le schéma reste évidemment valable)

c) Au point triple, $\Delta H_{fus} + \Delta H_{vap} = \Delta H_{subl}$

$\rightarrow \Delta_f H^o_{NH3(s)} = \Delta_f H^o_{NH3(g)} - \Delta_f H^o_{subl\ NH3} \rightarrow \Delta_f H^o_{NH3(s)} = -77310\ J\ mol^{-1}$

N° corr

Interrogation de chimie – CHIM-F-101 – 07 janvier 2019 – Exercices

NOM, Prénom: .... ________________

Section et numéro de matricule : 4

QUESTION 4 *(20 points)*

La molécule responsable de l'arôme d'orange, de citron et d'autres agrumes est un hydrocarbure : le limonène ($C_{10}H_{16}$). En étudiant l'absorption du limonène, on trouve un maximum d'absorption à une longueur d'onde de 358 nm dans une cellule 40 cm. A cette longueur d'onde, on mesure ensuite l'absorbance de plusieurs solutions de limonène aux concentrations connues pour construire une droite d'étalonnage (absorbance en fonction de la concentration). Cette droite passe par le point suivant :

$$C = 1{,}50.\,10^{-2}\,\mathrm{mol.\,L^{-1}};\ A = 0{,}178$$

a) Dans quelle région du spectre absorbe le limonène ?
b) À la même longueur d'onde, une solution inconnue de limonène a une absorbance de 0,230. Déterminez la concentration de cette solution.
c) Quelle énergie faudrait-il fournir pour exciter une mole de limonène par un rayonnement absorbé à 555 cm^{-1} ? Dans quel domaine du spectre électromagnétique ce rayonnement se trouve-t-il ?

a) UV (proche)
b) Si A = 0,230, alors $C = \frac{0{,}230}{11{,}867} = 1{,}94.10^{-2}$ mol L^{-1}

c) $\frac{1}{555\ cm^{-1}} = \lambda = 1{,}802.10^{-3}$ cm, ou $1{,}802.10^{-5}$ m, ou 18,02 nm → IR

$E = 6645\ J.mol^{-1}$

N° corr

Interrogation de chimie – CHIM-F-101 – 07 janvier 2019 – Exercices

NOM, Prénom: .... ________________

Section et numéro de matricule : 5

QUESTION 5 *(20 points)*

Les chaufferettes portables utilisées pour réchauffer des gants ou des vestes sont remplies d'une solution saturée en acétate de sodium et d'une petite pièce métallique que l'on manipule afin d'initier la réaction de solidification de l'acétate de sodium. La réaction impliquée est la suivante :

$$CH_3COO^-(aq) + Na^+(aq) + 3H_2O(l) \rightarrow CH_3COONa.3H_2O\ (s)$$

1) A l'aide de vos tables thermodynamiques, déterminez l'enthalpie de la réaction de solidification de l'acétate de sodium ($\Delta_f H°(CH_3COONa.3H_2O\ (s))$ = -1603.18 kJ/mol) à 298 K dans les conditions standard.

2) En considérant qu'une chaufferette de 20,0 g ne contient plus que du solide, déterminez l'énergie dégagée par une chaufferette.

3) Calculez l'élévation de température que subirait une masse de 10 g d'hélium (considéré comme gaz parfait) dans un volume maintenu constant et sans perte de chaleur s'il était chauffé par une chaufferette. Négligez l'énergie perdue à chauffer l'enveloppe de l'objet et la petite pièce métallique.

1) $\Delta_r H^0_{298\,K}$ = -19,56 K J mol^{-1}

2) Q = n. $\Delta_r H^0_{298\,K}$ = 2875 Joules

3) $\Delta T = \frac{2875\ J}{2{,}5\ mol \cdot 12{,}47\ J.mol^{-1}\ K^{-1}} = 92\ K$

N° corr

Faculté des Sciences

Année académique 2018/2019

PREMIERE ANNEE DE BACHELIER EN SCIENCES BIOLOGIQUES, CHIMIQUES, GEOGRAPHIQUES, GEOLOGIQUES, PHYSIQUES, EN SCIENCES DE L'INGENIEUR (ORIENTATION BIOINGENIEUR), PREMIERE ANNEE POLYVALENTE EN SCIENCES

EXAMEN DE CHIMIE du 27 mai 2019

NOM, Prénom: ....

Section et numéro de matricule : .... 1 /20

QUESTION 1 *(20 points)*

On effectue l'électrolyse de l'eau à 298 K avec un courant de 25,0 A pendant 30,0 minutes, dans les conditions standard en milieu basique.

a) Écrivez les deux demi-équations et l'équation globale de cette électrolyse.

b) Quelle est le volume maximal de dihydrogène susceptible d'être récupéré lors de cette opération ?

c) À l'aide des tables, calculez l'énergie minimale requise pour réaliser cette opération.

d) Une batterie de téléphone portable de 4000 mAh (milliampère.heure) suffirait-elle pour produire un tel volume de dihydrogène par électrolyse ? Justifiez

a)

2x [$2H_2O(l) + 2e^- \rightleftharpoons H_2(g) + 2OH^-(aq)$]

$4OH^-(aq) \rightleftharpoons O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e^-$

$2H_2O(l) \rightleftharpoons O_2(g) + 2H_2(g)$

b)

$$V = \frac{nRT}{P} = \frac{0{,}4664\ \text{mol}.0{,}08206\ \text{L atm}\ mol^{-1}K^{-1}.298K}{0{,}9869\ \text{atm}}$$

= 5,778 Litres → arrondi à 5,78 L

c)

Pour la réaction :

$H_2(g) + ½\ O_2(g) \longrightarrow H_2O\ (l)$

$\longrightarrow \Delta_r G^0_{298K}$ = +237,18kJ.mol^{-1}.0,2332 mol

= 55,31 kJ, arrondi à 55,3 kJ

Autre approche possible :

$\Delta E°$ = -1,229V (une valeur négative est effectivement attendue pour un processus non spontané)

$\Delta G°$ = -45000C.(-1,229V) = 55305J, arrondi à 55,3KJ

d)

4Ah = 4C.s^{-1}.3600s =14400C

La charge de cette batterie est donc insuffisante car il faudrait 45000C.

N° corr

Examen de chimie – CHIM-F-101 – 27 mai 2019

NOM, Prénom: ....

Section et numéro de matricule : .... **2** | **/20**

QUESTION 2 *(20 points)*

Une pile est construite à partir de deux cellules électrochimiques à 25°C en milieu acide :

Cu (s)	Cu^{2+} (aq) $[Cu^{2+}] = 0,0150\ mol.L^{-1}$ V = 100 mL	X^+ (aq) $[X^+] = 0,0200\ mol.L^{-1}$ V=100 mL	X(s)

a) Si la force électromotrice de cette pile vaut 0,412 V, quel est l'élément X ?

b) La masse volumique de la solution du compartiment anodique augmentera-t-elle ou diminuera-t-elle au cours de la décharge de la pile ? Justifiez en trois lignes maximum.

c) Quelle serait la force électromotrice de cette pile suite à l'ajout de 5,00 grammes de chlorure de sodium dans le compartiment de droite ? On suppose que la dissolution du sel n'entraine pas de variation significative du volume de la solution.

a)

E° = 0,700V + 0,100V = 0,800V → tables → X = Ag

b)

La masse volumique du compartiment anodique augmentera sans doute du fait de l'élévation de la concentration en ions Cu(II) en solution, p. ex sous forme de $Cu(NO_3)_2$ si le pont salin est fait de KNO_3.

c)

Ajout de 5,00g de NaCl :
- provoque une précipitation dans le compartiment contenant des ions Ag^+ sans forme d'AgCl (s)

$E_{Ag^+/Ag} = 0,800 - \frac{8,314.298}{1.96485}\ ln\ \frac{1}{2,11.10^{-10}}$
$= 0,228V$
$E_{Cu^{2+}/Cu} = 0,288\ V$
Il y a inversion de polarité : fem = 0,288 V - 0,228 V = 0,060V (la valeur négative est acceptée aussi car on ne demande pas de notifier cette inversion de polarité)

N° corr

Examen de chimie – CHIM-F-101 – 27 mai 2019

NOM, Prénom: ....

Section et numéro de matricule : ....

3	/20

QUESTION 3 *(20 points)*

Lors d'une préparation réalisée à 25°C, on dissout 4,65 g de butylamine-1 ($CH_3(CH_2)_2CH_2NH_2$) et 10,12 g de chlorure de butyl-1-ammonium ($CH_3(CH_2)_2CH_2NH_3Cl$) dans de l'eau. Le volume est amené à 500,0 mL avec de l'eau distillée.

a) Quel est le pH de cette solution de départ ?

Quel est le pH de la solution si on ajoute à la solution de départ :

b) 5,0 mL d'une solution aqueuse de chlorure d'hydrogène 6,0 mol/L.

c) 8,42 g d'hydroxyde de potassium solide. On négligera l'effet de cet ajout sur la variation du volume final.

d) 300 mL d'eau distillée.

a)

$C_4H_{11}N$: 4,65g (base) et $C_4H_{12}NCl$: 10,12g (acide conjugué)

Af et Bf conjugués ⟶ mélange tampon

pH = 10,61

b) $pH = 10{,}772 + \log \frac{\frac{3{,}358.10^{-2}}{V}}{\frac{12{,}234.10^{-2}}{V}} = 10{,}21$

c) pH = 13,06

d) Dilution simple, sans effet sur le pH du mélange tampon ⟶ pH = 10,61

N° corr

Examen de chimie – CHIM-F-101 – 27 mai 2019

NOM, Prénom: ....

Section et numéro de matricule : ....

4 | /20

QUESTION 4 *(20 points)*

L'eau de Javel doit ses propriétés décolorantes et désinfectantes à l'ion hypochlorite qu'elle contient. En milieu basique et à température suffisante, on observe la dismutation de cet ion selon la réaction :

$$3ClO^-(aq) \rightarrow ClO_3^-(aq) + 2Cl^-(aq)$$

Lors de l'étude cinétique de cette réaction à 25 °C, il a été possible d'obtenir les données suivantes :

Temps (s)	0	1000	3000	10 000	20 000	40 000	100 000
$[ClO^-]$ (10^{-3} mol/L)	12,7	12,2	11,3	8,9	6,9	4,7	2,4

Une analyse rapide de ces données montre que la vitesse de la réaction varie en fonction du temps et que le temps de demi-réaction dépend de la concentration du réactif.

a) Quel est l'ordre cette réaction (0, 1 ou 2) par rapport aux ions hypochlorite ? Justifiez en trois lignes maximum.

b) Confirmez cet ordre réactionnel par un graphique et déduisez-en la constante cinétique de la réaction.

c) Après combien de temps 70% des ions hypochlorite auront-ils réagi ?

a)

C'est un ordre 2

b)

voir graphique qui confirme l'ordre 2 le coefficient angulaire vaut 3k

Dans le graphique : $3k = \frac{400-125}{96000-1400} = 3{,}36.10^{-3}$

$\rightarrow k = 1{,}12.10^{-3}$ L.mol^{-1}s^{-1}

c)

Il reste $3{,}81.10^{-3}$ mol^{-1}.L^{-1} d'ions ClO^-

$\rightarrow$ Le graphique $\frac{1}{[ClO^-]} = \frac{1}{[ClO^-]i} + akt$ montre que pour $\frac{1}{[ClO^-]} = 262$ L mol^{-1}, **<u>t ≈ 55000s</u>**

Détermination des paramètres cinétiques de la réaction de dismutation de l'ion hypochlorite à 298 K

/

temps / s

N° corr

Examen de chimie – CHIM-F-101 – 27 mai 2019

NOM, Prénom: .... ________________

Section et numéro de matricule : .... 5 | /20

QUESTION 5 *(20 points)*

Le problème de la pollution atmosphérique par les oxydes d'azote (les NO_x) résulte de la réaction entre le diazote et le dioxygène de l'air à haute température. Ces conditions se rencontrent à l'intérieur des moteurs à essence ou Diesel, ainsi que dans des chaudières au gaz ou au mazout.
Le monoxyde d'azote étant nocif pour la santé, une étude de sa formation est entamée. La constante d'équilibre K_c de la réaction $N_2(g) + O_2(g) \rightleftharpoons 2\ NO(g)$ à 1200 °C vaut $1{,}00.10^{-5}$.

a) Calculez les concentrations molaires à l'équilibre de NO, O_2 et N_2 dans un réacteur de 10,0 L contenant initialement 0,312 mol de N_2 et 0,407 mol de O_2.
b) La valeur numérique de la constante K_c est-elle plus élevée, plus basse ou égale à $1{,}00.10^{-5}$ à la température de 1000 °C ? Justifiez.

a)

Solution « approximative » (on néglige le terme en x et $10^{-5}\ x^2$)
$\rightarrow 4x^2 = 1{,}26984.10^{-8} \rightarrow x = +/- 5{,}634.10^{-5}$ mol.L^{-1}

Solution exacte :
$x_1 = 5{,}6254.10^{-5} \rightarrow$ $[N_2] \approx 0{,}0311$ mol.L^{-1}
$[O_2] \approx 0{,}0406$ mol.L^{-1}
$[NO] \approx 1{,}125.10^{-4}$ mol.L^{-1}

b)

Plus basse.
L'énoncé suggère fortement que la réaction est endothermique, mais la formation de NO à haute température dans un moteur thermique pourrait résulter d'un effet cinétique.
Pour répondre exactement à cette question, il suffit d'aller voir dans les tables le signe de $\Delta_f H_{298K}$ pour NO(g), qui est bien positif.
Le principe de Le Chatelier indique que K ↘ si T ↘ pour une réaction endothermique.

N° 190

Faculté des Sciences

Année académique 2018/2019

PREMIERE ANNEE DE BACHELIER EN SCIENCES BIOLOGIQUES, CHIMIQUES, GEOGRAPHIQUES, GEOLOGIQUES, PHYSIQUES, EN SCIENCES DE L'INGENIEUR (ORIENTATION BIOINGENIEUR), PREMIERE ANNEE POLYVALENTE EN SCIENCES

EXAMEN DE CHIMIE du 12 août 2019

NOM, PRÉNOM (en majuscules) :..

Section et numéro de matricule : ....

N'ouvrez ce fascicule qu'au signal de votre assistant

Précision :
Si vous avez eu une note à l'examen de janvier inférieure à 10/20, vous DEVEZ le repasser.
Si vous avez obtenu une note supérieure ou égale à 10/20 pour une partie, vous POUVEZ le repasser.

Afin que ceci soit clair, tant pour vous que pour les correcteurs, vous trouverez ci-dessous les deux cas de figure possibles.
Sélectionnez ci-dessous la situation qui vous correspond, entourez cette situation et signez cette page.
Ensuite, répondez aux questions.
Bon examen

A quelles questions répondre :

Situation 1. Vous avez eu une note inférieure à 10/20 à l'examen écrit de janvier 2019 OU vous avez une note supérieure à 10 mais vous souhaitez améliorer votre résultat de janvier (ATTENTION, votre note de janvier sera effacée si vous choisissez cette option).

- Vous répondez aux questions 1,2,3,4 (situation 1) et 5

Situation 2. Vous avez une note supérieure ou égale à 10/20 à l'examen écrit de janvier 2019 et vous souhaitez conserver cette note.

- Vous répondez aux questions 4 (situation 2), 5, 6, 7, 8

Entourez votre choix ci-dessous :

Situation 1 / Situation 2

Signature

N° 190

Examen de chimie - août 2019

NOM, Prénom: ....

Section et numéro de matricule : ....

1 | /20

QUESTION 1 *(20 points)* (Q1)

La distribution de Maxwell-Boltzmann d'un gaz monoatomique donné indique que la vitesse la plus probable des atomes de ce gaz est de 759,5 $m.s^{-1}$ à 700 K.

a) Calculez la valeur de la vitesse quadratique moyenne.
b) Donnez la valeur et les unités de la capacité calorifique de ce gaz à pression constante.
c) Une compression isotherme de ce gaz entrainera-t-elle une modification de la distribution de vitesses de Maxwell-Boltzmann ? Justifiez votre réponse.
d) A pression constante, la moitié de l'énergie d'une mole de ce gaz est transférée pour chauffer 100 grammes d'eau initialement à 20°C. Quelle sera la température de l'eau après ce transfert de chaleur *(Vous pouvez supposer que la capacité calorifique du récipient ainsi que les pertes calorifiques sont négligeables)*.
e) Donnez la nature de ce gaz.

Examen de chimie - août 2019

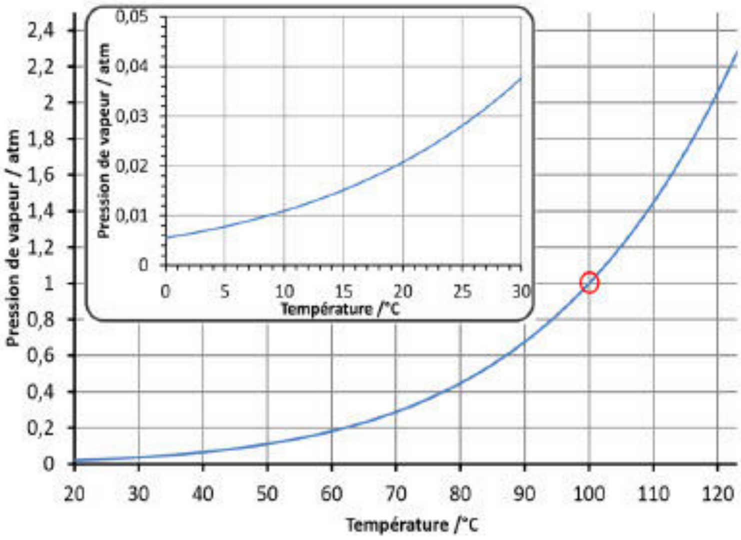
NOM, Prénom: ....

Section et numéro de matricule : ....

2 | /20

QUESTION 2 *(20 points)* (Q1)

La courbe de la tension de vapeur de l'eau entre 0 et 120 °C est présentée ci-dessous. Un volume fermé indéformable de 1,00 litre contient 1,00 gramme d'eau à 20°C. On considère que les équilibres liquide-gaz sont atteints et qu'il n'y a pas d'autres espèces chimiques dans le volume.



a) Quel est le pourcentage de l'eau à l'état liquide à 20°C dans le volume ?

b) Quelle est la pression exercée par les molécules de gaz à 60 °C ?

c) Quelle est la pression exercée par les molécules de gaz à 120 °C ?

d) A 120°C, quelle serait la pression exercée par les molécules d'eau sur la paroi s'il y avait 5,00 grammes d'eau dans l'enceinte ?

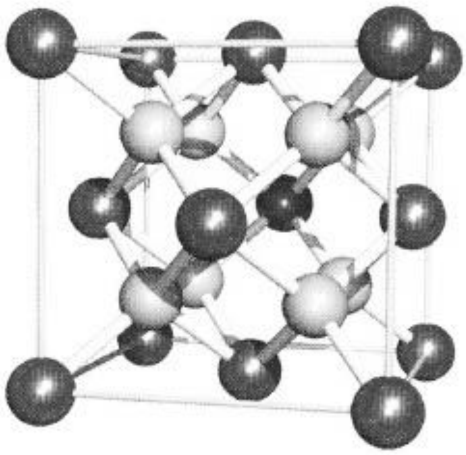
N° 190

Examen de chimie - août 2019

NOM, Prénom: .... ________________

Section et numéro de matricule : .... **3** | **/20** |

QUESTION 3 *(20 points)* (Q1)



La fluorine est un solide ionique dont la formule est CaF_2. La structure cristalline de la fluorine est une maille cubique dont une représentation est reproduite ci-contre.

a) Donnez la nature des ions représentés en gris clair sur la figure. Justifiez votre réponse.

b) Sachant que la masse volumique de la fluorine est de 3,18 $g.cm^{-3}$, calculez la longueur de l'arête de la maille.

c) Déduisez-en la distance la plus courte entre les ions Ca^{2+} et F^- (en d'autres termes, la distance représentée par les bâtonnets courts sur la figure).

N° 190

Examen de chimie - août 2019

NOM, Prénom: .... ________________

Section et numéro de matricule : .... **4** | **/20**

QUESTION 4 *(20 points)*

Veillez à ne répondre qu'à la question qui correspond à votre situation :

Situation 1 (Q1 + Q2)

Si on dissout 5,10 grammes d'un acide faible inconnu (HA) dont la masse molaire est de 85,0 g/mol dans 500 g d'eau, on obtient une solution dont le point de congélation est de -0,257 °C et dont la masse volumique est assimilable à celle du solvant pur.
La constante cryoscopique de l'eau est de 1,86 $K.kg.mol^{-1}$

a) Calculez la constante d'acidité K_a de cet acide faible.

Situation 2 (Q2)

On utilise de l'hydroxyde de potassium pour faire précipiter chaque cation des solutions suivantes. Déterminez la concentration minimale de KOH requise pour amorcer la précipitation dans les deux cas suivants et calculez les pH correspondants :

a) $CaCl_2$ 0,015 $mol.L^{-1}$
b) $Fe(NO_3)_2$ 0,0025 $mol.L^{-1}$
c) En supposant une solution suffisamment acide pour maintenir en solution les deux solutés « a » et « b » ci-dessus, quel précipité sera formé en premier lieu lors de l'ajout progressif d'hydroxyde de potassium ? Justifiez brièvement.

N° 190

Examen de chimie - août 2019

NOM, Prénom: .... ________________

Section et numéro de matricule : .... 5 | /20

<u>QUESTION 5</u> *(20 points)* (Q1 et Q2)

Les biphényles polychlorés (PCB) sont une classe de produits chimiques industriels qui ont été très utilisés mais on a constaté qu'ils constituaient un risque pour la santé et l'environnement. Les PCB ne contiennent que du carbone, de l'hydrogène et du chlore. Un PCB donné a une masse molaire de 360,88 $g.mol^{-1}$. La combustion de 1,52 g de ce composé donne 2,224 g de CO_2 et la combustion de 2,53 g donne 0,2530 g de H_2O. Combien y a-t-il d'atomes de carbone, d'hydrogène et de chlore dans une molécule de ce PCB-ci ?
Détaillez vos calculs.

Examen de chimie - août 2019

NOM, Prénom: ....

Section et numéro de matricule : .... **6** | **/20**

QUESTION 6 *(20 points)* (Q2)

On considère la pile suivante à 25°C :

Pt (s)	MnO_4^- (aq) 0,5 mol/l MnO_4^{2-} (aq) 0,8 mol/l V = 20,00 mL	$AuCl_4^-$(aq) 0,5 mol/l Cl^- (aq) 0,1 mol/L V = 20,00 mL	Au (s)

a) Écrivez les équations chimiques à l'anode et à la cathode ainsi que l'équation de la réaction spontanée dans les conditions standard.
b) Calculez la f.é.m. de la pile dans les conditions standard et dans les conditions décrites ci-dessus.
c) Quelle sera la f.é.m. de la pile si l'on ajoute 20,00 mL d'eau pure dans le compartiment anodique ?
d) Calculez la constante d'équilibre de cette réaction ? S'agit-il d'une réaction complète ou incomplète ?
e) Calculez la concentration du réactif en excès lorsque la pile sera déchargée ?
f) La masse de l'électrode de platine sera-t-elle supérieure, inférieure ou inchangée quand la pile sera déchargée ? Justifiez votre réponse.

N° 190

Examen de chimie - août 2019

NOM, Prénom: ....

Section et numéro de matricule : ....

7 | /20

QUESTION 7 *(20 points)* (Q2)

Soit la réaction de décomposition du carbonate de magnésium :

$$MgCO_3(s) \rightleftharpoons MgO(s) + CO_2(g)$$

a) Déterminez la constante d'équilibre de cette réaction à 490 K. Considérez que les variations d'enthalpie et d'entropie sont indépendantes de la température.

A l'équilibre, un volume de 10,0 L à 490 K renferme 1,00 gramme de MgO(s) et du CO_2 à une pression de 0,0258 bar.

b) Le volume est ensuite comprimé de manière isotherme jusqu'à ce qu'il occupe 0,100 litre. Quelle masse de $MgCO_3$ se forme-t-il ?

N° 190

Examen de chimie - août 2019

NOM, Prénom: ....

Section et numéro de matricule : .... **8** | **/20**

QUESTION 8 *(20 points)* (Q2)

a) A 700 K, l'acétaldéhyde se décompose en méthane et en monoxyde de carbone selon la réaction suivante :

$$CH_3CHO(g) \rightarrow CH_4(g) + CO(g)$$

Un échantillon de CH_3CHO est chauffé à 700 K et à une pression de 0,22 atm avant que la réaction s'amorce. On surveille ensuite la cinétique de la réaction en mesurant la pression totale et on obtient les résultats suivants :

P_{tot} / atm	t / s
0,22	0
0,24	1000
0,27	3000
0,31	7000

Après un traitement de données rapide, l'observateur réalise immédiatement que la vitesse de la réaction évolue au cours du temps. Son logiciel lui indique aussi que le graphique portant le logarithme népérien de la pression du réactif en fonction du temps ne donne pas une droite.

a) Déterminez graphiquement la constante de vitesse et précisez ses unités en supposant que vous exprimez ici la vitesse de la réaction en $atm.s^{-1}$.
b) Donnez la loi de vitesse de cette réaction chimique.
c) Quelle serait la pression totale en fin de réaction (à l'équilibre) si celle-ci était complète ?

N° 190

Examen de chimie - août 2019

NOM, Prénom: .... ______________

QUESTION 8 (partie graphique)

Détermination de la constante cinétique de la décomposition de l'acétaldéhyde à 700 K

/

/

Liste de question de l’examen oral de chimie de Mr. Thierry Visart pour les BA1

-Qu'est-ce qu'un indicateur coloré ?
-Parler des Equilibre liquide vapeur.
-Parler des différents types de solides (Q1) .
-Démontrer la formule de Nernst, qu'est-ce que l'énergie libre concrètement, expliquer la pile à combustion, la réaction de Vaporeformage et qu'est-ce que l'acide perchlorique (donner sa formule) es-ce un acide fort ou faible ? et pourquoi?
-Quels sont les critères de spontanéité des réactions et équation d'Haber-Bosch (son enthalpie est négative à 400 °C :P)
-Expliquer la courbe de titrage d'un polyacide
-Parler des équilibres chimiques + comment varie la constante cinétique en fonction de la température
-Expliquer l'influence du pH sur la solubilité précipitation. Puis : pourquoi la dissolution de certaines molécules est-elle exothermique alors que pour d'autres elle est endothermique ? Comment d'ailleurs expliquer qu'une dissolution peut-être exothermique alors que pour casser une liaison, il faut toujours fournir de l'énergie?
-Gibbs-Duhheim, expliquer le potentiel chimique, comment déterminer la spontanéité d'une réaction, dessiner l'électrolyse de l'eau, dire où se trouve la cathode.
-Comment modifier la vitesse d'une réaction ?
Et après expliquer l'électrophorèse (mais version : comment puis-je casser des acides aminés?)
-Lien entre acidité et structure (question tirée) puis il a embrayé sur les réductions (quel alcalin est plus réducteur) puis les complexes (levée de dégénérescence et coloration)
-Faire et expliquer le diagramme de phase du CO_2.
Petite question : Une redox en milieu basique (ClO^-/Cl^-) & comment mesurer la distance des liaisons dans le NaCl (=> Loi de Bragg)
-Expliquer les mécanismes réactionnels, donner les différentes hypothèses et illustrer par un exemple (avec toutes les formules, tout réinjecter, etc., …) Et puis pression osmotique et une application avec la membrane semi-perméable
-Expliquer les différentes liaisons chimiques puis, j'ai parlé du lien H. Il a demandé s’il y avait des molécules en bio ayant des liens H : acide aminé puis, dessiner un acide aminé, parler de l'électrophorèse, courbe de titrage diacide, pH isoélectrique, et constante de vitesse selon Arrhenius
-Comparez solubilité gaz et sel (pression, température, solvatation)
-Interpréter la formule de la loi de distribution des vitesses de Maxwell.
-Qu’est ce qu'un équilibre chimique + procédé d’Haber-Bosch ?
-Qu'est ce que l'énergie de résonance ?(Q1)
-Parler du modèle de collision en phase gazeuse en cinétique chimique
-Qu'est-ce qu'un indicateur coloré(risque de question exercice ou il faut trouver quel indicateur coloré faut-il utiliser par rapport a tel réaction)
-Orbital de tel élément + donner nombre quantique
-Un calcul thermodynamique pour trouver le k de la réaction (calcul à faire sans calculette mais tables disponible)

-Une courbe de pH
-Déterminer le pH à partir duquel un précipité se forme
-Expliquer le pH isoélectrique et application aux acides aminés (parler d'électrophorèse et de zwitterion)
-Expliquer les liaisons H
-Dire ce qui se passe quand on met un bloc de Na dans de l'eau (c'est une redox à équilibrer)
-Rapport entre k cinétique et K équilibre
-Courbe de titrage d'un polyacide (tout déballé de A à Z et j'ai pris H_3PO_4 comme exemple), et puis expliquer le procédé de Haber-Bosch par une approche thermo et cinétique
-Lien entre énergie chimique, travail utile et énergie électrique, comment trouver le pH d'une sol avec une concentration inconnue de Cu^{2+}, expliquer les complexes
-Redox en milieu basique (CrO_2^- / Cr (s))
-Pile combustible, le procédé de Haber-Bosch et tout ce qui est enthalpie libre et lien avec potentiel et la démo, Le Chatelier..
-Théorie du champ cristallin (Q1)
-Parler de l'enthalpie libre de Gibbs, faire des liens avec l'entropie et l'enthalpie puis dire tout ce que ça implique d'un point de vue Energie, en parlant aussi des oxydations d'un point de vue spontanéité. Ensuite on est passés sur le premier chapitre de chimie descriptive en bifurquant par un petit développement du principe d'Hall&Héroult niveau utilité, ...
-Diagramme de phase de l eau + Propriétés colligatives
-Quelle est la couleur d'un complexe dont l'ion métallique central est zn^{2+} ? (Connaissant sa configuration électronique)
-Courbe de titrage d'un polyacide + calculer le pH de solubilité d'un sel, loi de déplacement de Wien, Stephan Boltzmann, effet de paire inerte.
-Qu'est ce que la Loi de Raoult et quelles sont ses limites ?
-Quelles sont les interactions présentes dans une solution idéale, tracer le graphique de l'Energie en fonction de la distance, redox en milieu basique ?
-Que se passe-t-il quand on met du carbonate de calcium dans l'eau?
Réaction du carbonate avec un acide Fort, eau de Javel (redox) , exemple d'oxydants et réducteurs forts.
-Comment mesurer et calculer le pH, donner les demi réactions dans le pH-mètre, faire le lien entre le potentiel et la concentration en H^+, parler du procédé Haber-Bosch et à quoi sert un catalyseur.
-Pourquoi les composés azotés sont utilisés dans les explosifs et les carburants +exemple, comparer acidité phénol acide picrique. Expliquer les indicateurs colorés et expliquer pourquoi il y a une différence de couleur (+exemple de composés à chromophore).
-Qu'est ce qu'une électrode de référence? Expliquer pourquoi ESH n'est pas une bonne électrode pour pH (j'avais fait l'erreur) Qu'est ce qu'un indicateur coloré? Pourquoi sont-ils coloré? Qu'est ce qu'un mélange tampon ? Différence de taille entre vanadium et fer (Expliquer)
-Relation Gibbs-dunheim (démonstration et dire a quoi ça sert), pile galvanique, allotropes (diagramme et explications)
-Les facteurs influençant la vitesse d une réaction, lier la distribution de vitesse par rapport à la température dans la théorie cinétique des gaz, datation au carbone 14
-Expliquer les processus de fission et fusion nucléaire (question préparée) et ensuite, effusion + fonctionnement d'une centrale nucléaire.

N° 488

ULB

Faculté des Sciences

Année académique 2019/2020

PREMIERE ANNEE DE BACHELIER EN SCIENCES BIOLOGIQUES, CHIMIQUES, GEOGRAPHIQUES, GEOLOGIQUES, MATHEMATIQUES, EN SCIENCES DE L'INGENIEUR (ORIENTATION BIOINGENIEUR), PREMIERE ANNEE POLYVALENTE EN SCIENCES

INTERROGATION DE CHIMIE du 28 octobre 2019

NOM, Prénom :...

Section et numéro de matricule : 1

ATTENTION : Pour toutes les questions, soignez votre écriture ET votre orthographe

QUESTION 1 *(15 points) La réussite de cette question validera, le cas échéant, les travaux personnels.*

Un étudiant effectue le titrage d'une solution aqueuse d'HCl de concentration inconnue à l'aide d'une solution aqueuse de NaOH. La concentration de la solution d'hydroxyde de sodium est de 0,1010 mol/L. L'étudiant place donc 40,00 mL de la solution d'HCl dans un erlenmeyer et y ajoute quelques gouttes de phénolphtaléine. Après avoir ajouté dans cette solution 19,8 mL de solution de NaOH à l'aide d'une burette, l'indicateur coloré passe d'incolore à mauve.

1) Ecrivez les équations chimiques moléculaire et ionique nette de la réaction.
2) Définissez l'équivalence. *(2 lignes maximum)*
3) Déterminer la concentration de la solution d'acide titrée ainsi que le pourcentage en masse de HCl dans la solution acide de départ.
   On considère que la solution de HCl a la même densité que l'eau.
   (Il n'est pas nécessaire d'effectuer un calcul d'erreur.)

(M H = 1,0079 g/mol ; M Cl = 35,4530 g/mol)

N° 488

Interro. Chimie – 29 octobre 2019

NOM, Prénom: .... ____________________

Section et numéro de matricule : 2

QUESTION 2 *(20 points)*

L'iridium-192 ($^{192}_{77}Ir$) est notamment utilisé en radiothérapie. Il se désintègre en platine-192 par émission d'une particule β^-.

a) Écrire l'équation de désintégration correspondante.
b) Donner le nombre de protons et de neutrons de l'iridium-192.
c) Calculer la demi-vie de l'iridium-192 et la masse initiale d'un échantillon sachant qu'après 7 jours, il en reste 2,81 g, et, après 365 jours, 0,0973 g.

N° 488

Interro. Chimie – 29 octobre 2019

NOM, Prénom: ....

Section et numéro de matricule : 3

QUESTION 3 *(20 points)*

Complétez le tableau suivant :

	O_3	NO_2	$AlCl_3$	H_3O^+
Structure de Lewis				
Charge formelle	O(1) : O(2) : O(3) :	N : O(1) : O(2) :	Al : Cl(1) : Cl(2) : Cl(3) :	H(1) : H(2) : H(3) : O :
Géométrie (nom)				
Structure de résonance (entourer la bonne réponse)	Oui - Non	Oui - Non	Oui - Non	Oui - Non
Hybridation de l'atome central				

NB : dans la classification périodique, l'aluminium se trouve dans la même colonne que le bore.

N° 488

Interro. Chimie – 29 octobre 2019

NOM, Prénom:.. ___________________

Section et numéro de matricule : 4

QUESTION 4 *(13 points)*

Dans le modèle des orbitales moléculaires, comment calcule-t-on l'ordre de liaison (écrivez la formule et explicitez les termes).

Pour répondre aux questions suivantes, entourez la bonne réponse. (Attention ces questions sont « à choix multiple » ; choisir une mauvaise réponse entraîne une perte de points.)

Dans l'équation des gaz parfaits, pV=nRT, V représente :

a) la vitesse des molécules frappant la paroi
b) le volume du récipient dans lequel se trouve le gaz
c) la ventilation de la pièce dans laquelle se trouve le gaz.

Dans le modèle du champ cristallin, en présence d'un champ octaédrique, les orbitales :

a) d_{z^2} et $d_{x^2-y^2}$ ont plus d'énergie que les orbitales d_{xy}, d_{yz}, d_{xz}
b) d_{z^2} et $d_{x^2-y^2}$ ont autant d'énergie que les orbitales d_{xy}, d_{yz}, d_{xz}
c) d_{z^2} et $d_{x^2-y^2}$ ont moins d'énergie que les orbitales d_{xy}, d_{yz}, d_{xz}

Connaissant l'ordre de liaison, pour une liaison entre deux atomes identiques :

a) la longueur de liaison augmente quand l'ordre de liaison augmente
b) la longueur de liaison diminue quand l'ordre de liaison augmente
c) la longueur de liaison ne dépend que du nombre d'électrons non appariés.

N° 488

Interro. Chimie – 29 octobre 2019

NOM, Prénom: .... ____________________

Section et numéro de matricule : 5

QUESTION 5 *(20 points)*

Le travail d'extraction d'un électron de la surface du magnésium vaut 3,66 eV.

1) Sachant cela, calculer la longueur d'onde critique à utiliser pour qu'il y ait émission d'un électron.

2) Calculer la longueur d'onde et la fréquence du rayonnement à utiliser pour qu'un électron émis de la surface du magnésium ait une vitesse de $9{,}05 \times 10^{5}$ m.s^{-1}.

1eV = $1{,}602176487 \times 10^{-19}$ J
Constante de Planck h = $6{,}62606896.10^{-34}$ J.s
Vitesse de la lumière dans le vide c = $2{,}99792458.10^{8}$ m.s^{-1}
Masse de l'électron me = $9{,}1093897.10^{-31}$ kg

N° 488

Interro. Chimie – 29 octobre 2019
NOM, Prénom:...

Section et numéro de matricule : 6

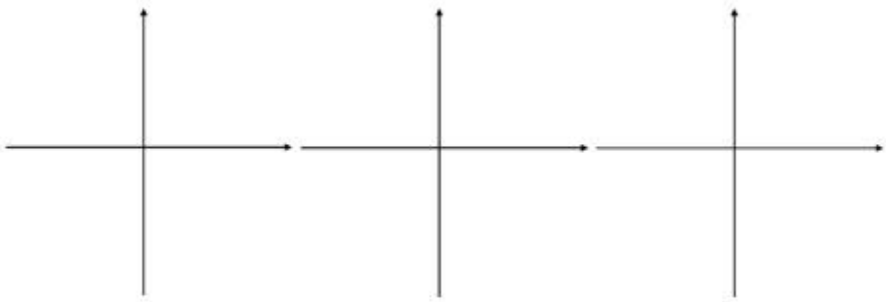
QUESTION 6 *(12 points)*

Ecrivez la structure électronique fondamentale du silicium (Z=14) et identifiez la couche de valence.

Donnez un ensemble de nombres quantiques permettant d'identifier les électrons de valence à l'état fondamental.

Un électron de valence du Si est excité dans l'orbitale définie par les nombres quantiques n=3 et l=2, donnez une des configurations électroniques excitées.

Pour le même atome, dessinez sur une même échelle, la forme des orbitales 2s, 3s et $3p_y$.
Identifiez clairement les orbitales dessinées dans ces repères cartésiens :



Correction de l'interro de chimie de novembre 2019

Question 1

1) Eq moléculaire : $HCl_{(aq)} + NaOH_{(aq)} \rightleftharpoons NaCl_{(aq)} + H_2O_{(l)}$

Eq ionique nette : $H^+_{(aq)} + OH^-_{(aq)} \rightleftharpoons H_2O_{(l)}$

2) Point où l'espèce titrante et l'espèce titrée ont été mélangées dans les mêmes proportions stoechiométriques.

3) $n_{NaOH} = C_{NaOH} \cdot V_{NaOH} = 19,8 \cdot 10^{-3} \cdot 0,1010 = 1,9998 \cdot 10^{-3}\,mol$

$$C_{HCl} = \frac{n_{HCl}}{V_{HCl}} = \frac{n_{NaOH}}{V_{HCl}} = 4,9995 \cdot 10^{-2}\,mol/L$$

$m_{solution} = \rho_{H_2O} \cdot V_{solution} = 40\,g$

$m_{HCl} = n_{HCl} \cdot M_{HCl} = 1,9995 \cdot 10^{-2} \cdot (1,0079 + 35,4530) = 7,29 \cdot 10^{-1}\,g$

$$\%m_{HCl} = \frac{m_{HCl}}{m_{sol}} \cdot 100 = 1,82\,\%$$

Question 2

a) $^{192}_{77}Ir \longrightarrow \,^{192}_{78}Pt + \,^{0}_{-1}\beta^-$

b) $77\,p^+$ et $115\,n^\circ$
↳ 192 - 77

c) $$\ln\left(\frac{[A]_t}{[A]_0}\right) = -kt = \frac{-t}{t_{1/2}}\ln(2) \Rightarrow [A]_0 = \frac{[A]_t}{\exp\left(\frac{-t\ln(2)}{t_{1/2}}\right)}$$

$[A]_{t_2} = 0,0973$

$[A]_{t_1} = 2,81$

$t_1 = 7$ jours $\quad t_2 = 365$ jours

$$\frac{[A]_{t_1}}{\exp\left(\frac{-t_1\ln(2)}{t_{1/2}}\right)} = \frac{[A]_{t_2}}{\exp\left(\frac{-t_2\ln(2)}{t_{1/2}}\right)}$$

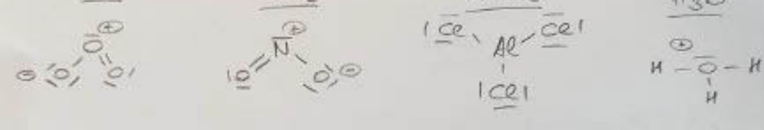
$$\frac{-t_2\ln(2)}{t_{1/2}} + \ln[A]_{t_1} = \frac{-t_1\ln(2)}{t_{1/2}} + \ln[A]_{t_2}$$

$$3,363 = \frac{-t_1\ln(2) + t_2\ln(2)}{t_{1/2}}$$

$t_{1/2} = 73,79$ jours

Question 3

O_3	NO_2	$AlCl_3$	H_3O^+



O_3	NO_2	$AlCl_3$	H_3O^+
$O_{(1)} = 0$ $O_{(2)} = +1$ $O_{(3)} = -1$	$N = +1$ $O_{(1)} = -1$ $O_{(2)} = 0$	$Al = 0$ $Cl_{(1)} = 0$ $Cl_{(2)} = 0$ $Cl_{(3)} = 0$	$H_{(1)} = 0$ $H_{(2)} = 0$ $H_{(3)} = 0$ $O = +1$
Géométrie coudée	Géométrie coudée	Trigonale plane	Tétraédrique (Pyramidale à base triangulaire)
Oui - Non	Oui - Non	Oui - Non	Oui - Non
sp^2	sp^2	sp^2	sp^3

Question 4

$$OdL = \frac{\#e^-(\text{liante}) - \#e^-(\text{antiliante})}{2}$$

$\#e^-(\text{liante})$ = nombre d'e^- engagés dans des orbitales liantes
$\#e^-(\text{antiliante})$ = " " " " antiliantes

QCM :

1) b ; 2) a ; 3) b

Question 5

1) $3.66\ eV = 5,256.10^{-19}\ J = \phi$

$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{E} = 9,05.10^{-7}\ m$

2) $E = E_{cin} + \phi = \frac{1}{2} m v^2 + \phi = 9,582.10^{-19}\ J$

$\nu = \frac{E}{h} = 1,45.10^{15}\ Hz$

$\lambda = \frac{c}{\nu} = 5,53.10^{-7}\ m$

Question 6

- $Si \Rightarrow 1s^2 2s^2 2p^6 \underbrace{3s^2 3p^2}_{\text{couche de valence}}$

- $n = 3,\ \ell = 0 \rightarrow m_\ell = 0$

  ou

  $\ell = 1 \rightarrow m_\ell = -1 ; 0 ; 1$

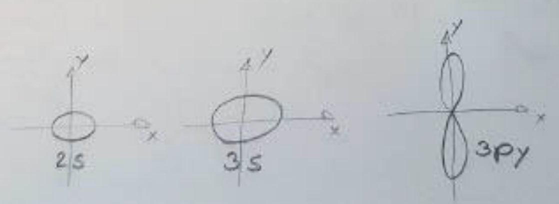
  ou

  $(\ell = 2 \rightarrow m_\ell = -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2)$ avec $m_s = \pm 1/2$

  Lo vide dans l'atome fondamental

- $Si^* \Rightarrow 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^1 3d^1$

-



Faculté des Sciences

Année académique 2020/2021

PREMIERE ANNEE DE BACHELIER EN SCIENCES BIOLOGIQUES, CHIMIQUES, GEOGRAPHIQUES, GEOLOGIQUES, PHYSIQUES, EN SCIENCES DE L'INGENIEUR (ORIENTATION BIOINGENIEUR), MATHEMATIQUES (ORIENTATION BIOLOGIE), PREMIERE ANNEE POLYVALENTE EN SCIENCES

INTERROGATION DE CHIMIE du 6 janvier 2020

Première partie – Théorie

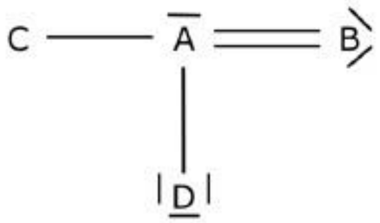
NOM, Prénom: ....

/24

Section et numéro de matricule : .... page 1

QUESTION 1 *(24 points)*

Soit la molécule imaginaire possédant une structure de Lewis représentée ci-dessous



En sachant que l'élément D fait partie de la famille des halogènes :

Entourez toutes les affirmations correctes. *Attention, entourer une réponse incorrecte induit une perte de points. Une bonne réponse = +3 points , une mauvaise réponse = -3 points*

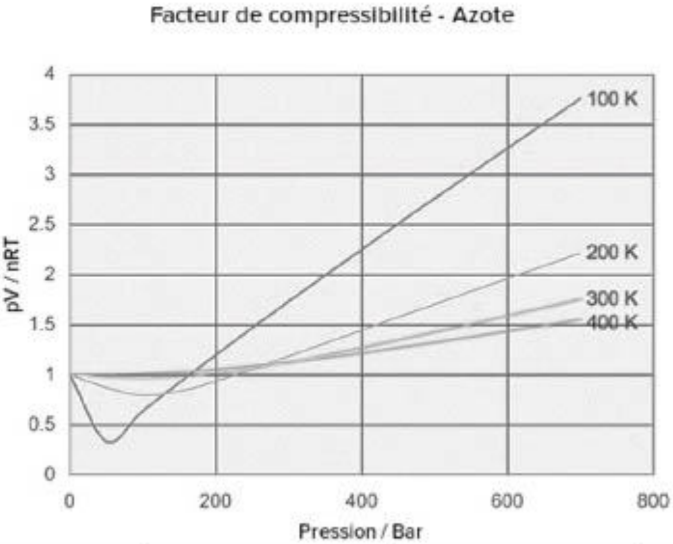
1) A est plus électronégatif que B
2) D est plus électronégatif que A
3) D est plus électronégatif que C
4) L'élément A est situé dans la première ou deuxième période du tableau périodique
5) L'élément A est situé dans la $3^{ième}$ période, ou une période plus grande, du tableau périodique
6) L'atome A a sa couche de valence complétée
7) L'atome B a son octet complété
8) L'atome C a sa couche de valence complétée
9) L'atome B pourrait être hybridé sp
10) L'atome C pourrait être hybridé sp^3
11) L'atome A pourrait être hybridé sp^2d
12) L'atome A pourrait être hybridé sp^3
13) La molécule possède un dipôle permanent
14) Il est possible de calculer la charge formelle de l'atome D avec les informations données
15) Il est possible de calculer la charge formelle de l'atome A avec les informations données

Interrogation de chimie – CHIM-F-101 – 06 janvier 2020 – Théorie

NOM, Prénom: .... **/20**

Section et numéro de matricule :

QUESTION 2 *(20 points)*



	a /atm·L²·mol⁻²	b /L·mol⁻¹	$T_{éb}^{1\,atm}$/K
He	0,0341	0,0237	4
Ar	1,345	0,0322	87
H_2	0,244	0,0266	20
N_2	1,39	0,0391	77

Le facteur de compressibilité permet de comparer le comportement d'un gaz réel au comportement d'un gaz parfait. Sur ce graphique quatre courbes isothermes portent le facteur de compressibilité ($Z = PV/nRT$) en fonction de la pression.
A partir de ce graphique et de vos connaissances sur les gaz vues en cours ; répondez aux questions suivantes :

a) Quelle est la valeur du facteur de compressibilité dans le cas des gaz parfaits ?

b) Selon le graphique, à quelle température correspond le tracé où le N_2 se rapproche le plus d'un gaz parfait ?

c) en vous basant sur le tableau ci-dessus, à la température de 77 K, est-ce que la pression de vapeur de l'azote est supérieure, égale ou inférieure à 1 atm ? Justifiez

d) Écrivez l'équation d'état des gaz réels (équation de Van der Waals) ? Identifiez les symboles.

e) Parmi les gaz suivants, lequel aura le comportement le plus proche du gaz parfait ? Justifiez
CH_4 à 2 atm, NH_3 à 2 atm, CH_4 à 1 atm et H_2O à 1 atm

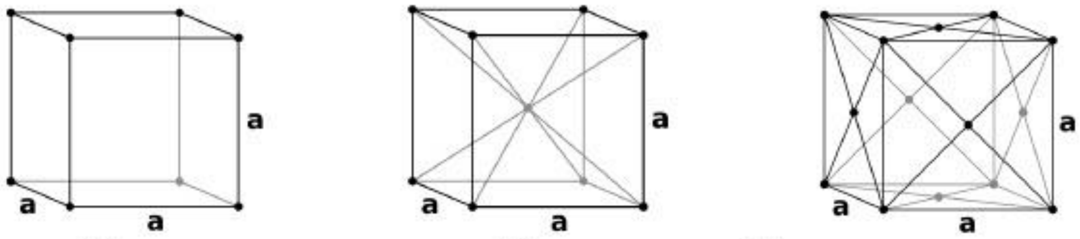
Interrogation de chimie – CHIM-F-101 – 06 janvier 2020 – Théorie

NOM, Prénom: ....

/15

Section et numéro de matricule :

<u>QUESTION 3</u> *(15 points)*



(1) **(2)** **(3)**

a) Nommez les mailles élémentaires ci-dessus et donnez le nombre d'atomes par maille

Structure (1) :

Structure (2) :

Structure (3) :

b) Sachant que le NaCl peut être vu comme une structure cubique à faces centrées d'ions chlorure avec des cations sodium dans les sites octaédriques, ou comme une structure de type cubique simple de Na et de Cl, dessinez la maille du NaCl.

c) Si l'on représente la structure cristalline du NaCl par une maille élémentaire de type CFC d'ions chlorure, combien de cations sodium doit-on compter dans cette même maille ? Justifiez votre réponse.

Interrogation de chimie – CHIM-F-101 – 06 janvier 2020 – Théorie

NOM, Prénom: ....

/24

Section et numéro de matricule : .... page 4

QUESTION 4 *(24 points)*

Cochez la case à côté de la réponse correcte. Il n'y a qu'une réponse correcte par énoncé.
Réponse correcte = +3 points, réponse incorrecte = -2 points, pas de réponse = 0 point

a. La chaleur d'une réaction chimique à volume constant dépend :
   - ☐ Uniquement de l'enthalpie
   - ☐ De l'enthalpie et de la variation du nombre total de moles
   - ☐ De l'enthalpie et de la variation du nombre de moles de solide
   - ☐ De l'enthalpie et de la variation du nombre de moles de gaz

b. Vous souhaitez calculer le volume d'un gaz parfait sur base d'une pression de 0,45 bar en utilisant l'équation des gaz parfaits. Comment allez-vous procéder ?
   - ☐ Utiliser la pression en bar, R=8,314 pour obtenir un volume en L
   - ☐ Convertir la pression en atm, utiliser R=8,314 pour obtenir un volume en L
   - ☐ Convertir la pression en atm, utiliser R=8,314 pour obtenir un volume en m^3
   - ☐ Convertir la pression en atm, utiliser R=0,08206 pour obtenir un volume en L
   - ☐ Convertir la pression en Pa, utiliser R=0,08206 pour obtenir un volume en L
   - ☐ Convertir la pression en Pa, utiliser R=0,08206 pour obtenir un volume en m^3

c. Dans un diagramme de phase pression - température, la variance sur la courbe d'équilibre liquide – gaz vaut :
   - ☐ 1
   - ☐ 2
   - ☐ 3
   - ☐ 0
   - ☐ 1,5

d. La tension de vapeur d'un composé dépend :
   - ☐ Uniquement de la masse totale du composé
   - ☐ Uniquement des interactions intermoléculaires
   - ☐ Uniquement de la température
   - ☐ Des interactions intermoléculaires et de la température
   - ☐ De la masse totale du composé et de la température
   - ☐ De la masse totale du composé, des interactions intermoléculaires et de la température

e. Le plan (3 0 0)
   - ☐ Coupe l'axe x à une distance correspondant à 3 fois le paramètre de maille
   - ☐ Ne coupe pas l'axe X, mais coupe l'axe Y
   - ☐ Ne coupe pas l'axe Y, mais coupe l'axe Z
   - ☐ Ne coupe pas l'axe Z, mais coupe l'axe Y
   - ☐ Ne coupe ni l'axe Y, ni l'axe Z

QUESTION 4 *(suite)*

f. Laquelle des propositions suivantes reprend les conditions standard :

- ☐ C = 1 mol/L, P = 1 atm, T = 298,15 K ;
- ☐ C= 1 mol/L, P = 1 bar, T = 273,15 K ;
- ☐ P = 1 atm, T = 298,15 K ;
- ☐ P = 1 bar, C = 1 mol/L.

g. D'après le principe d'exclusion de Pauli :

- ☐ deux électrons d'une même orbitale peuvent avoir 4 nombres quantiques identiques ;
- ☐ deux électrons d'une même orbitale ne peuvent pas avoir 4 nombres quantiques identiques ;

h. Si vous vous reportez au tableau périodique, et sachant que le césium a une couche de valence de type « $6s^1$ », et que le chlore a le numéro atomique 17,

- ☐ l'énergie de première ionisation du chlore est inférieure à celle du césium
- ☐ l'énergie de première ionisation du chlore est supérieure à celle du césium
- ☐ l'énergie de première ionisation du chlore est identique à celle du césium

Interrogation de chimie – CHIM-F-101 – 06 janvier 2020 – Théorie

NOM, Prénom: .... **/17**

Section et numéro de matricule : ....page 6

<u>QUESTION 5</u> *(17 points)*

a) Dessinez le diagramme d'orbitales moléculaires de O_2^+.

b) Calculez l'ordre de liaison

c) Cette molécule est-elle para ou diamagnétique ? Justifier (en 2 lignes)

d) La longueur de liaison dans O_2^+ est-elle supérieure, inférieure, ou identique à celle de O_2. Justifiez (en 2 lignes maximum)

###

ULB

Faculté des Sciences

Année académique 2019/2020

PREMIERE ANNEE DE BACHELIER EN SCIENCES BIOLOGIQUES, CHIMIQUES, GEOGRAPHIQUES, GEOLOGIQUES, PHYSIQUES, EN SCIENCES DE L'INGENIEUR (ORIENTATION BIOINGENIEUR), MATHEMATIQUES (ORIENTATION BIOLOGIE), PREMIERE ANNEE POLYVALENTE EN SCIENCES

INTERROGATION DE CHIMIE du 6 janvier 2020

Seconde partie - Exercices

NOM, Prénom: ....

/25

Section et numéro de matricule : .... page 1

<u>QUESTION 1</u> *(25 points) La réussite de cette question validera, le cas échéant, les travaux personnels des étudiants en sciences physiques.*

Un étudiant place un morceau de 5,00 g d'un métal inconnu issu de la colonne IIIA (terreux) du tableau périodique à l'état solide dans une solution d'acide fort concentrée et en excès.

Suite à cela, il récupère l'hydrogène ainsi obtenu qu'il fait réagir avec de l'oxygène en excès, afin de pouvoir transporter son produit de réaction (l'hydrogène étant extrêmement compliqué à stocker).
L'eau ainsi formée une fois refroidie occupe un volume de 5,00 mL.

Déterminez quel est le métal inconnu.

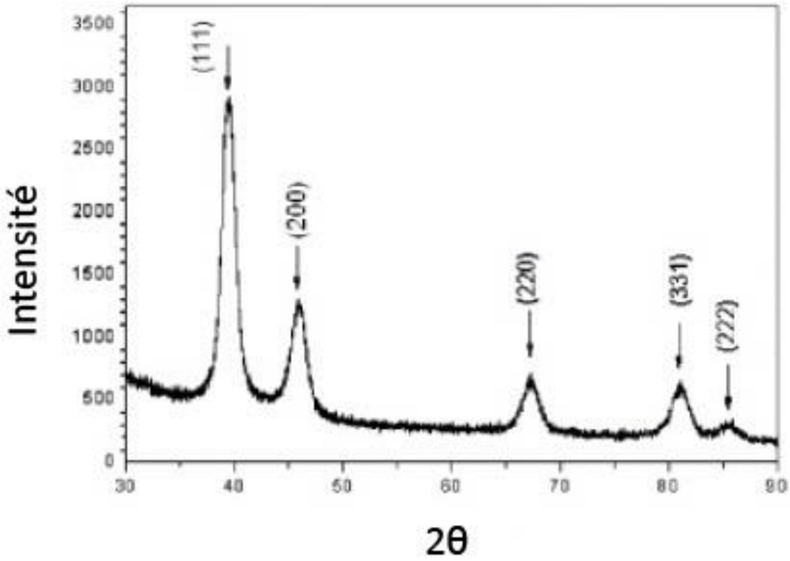
NOM, Prénom: ....

/25

Section et numéro de matricule :

QUESTION 2 *(25 points)*

Voici un spectre de diffraction des rayons X d'un échantillon de nanoparticules de platine



Les nanoparticules ont des mailles élémentaires de type cubique à faces centrées et le rayonnement envoyé a comme énergie 8,04 keV. Sur base de ces données, déterminez le rayon cristallographique d'un atome de platine ? *Attention, ce rayon ne correspond pas à celui renseigné dans le tableau périodique.*

NOM, Prénom: ....

/25

Section et numéro de matricule :

QUESTION 3 *(25 points)*

On effectue la combustion (complète) d'un mélange de C_6H_6(l) et de C_8H_{18}(l) en présence d'un excès d'oxygène. Les produits de réaction, tous gazeux sont ramenés à une température de 25,0°C dans un récipient de 0,500 m^3. A cette température, la pression de vapeur de l'eau est de 21,43 mm Hg. Sachant que l'enthalpie standard de formation du C_8H_{18}(l) à cette température vaut 249,73 kJ/mol, que la combustion du mélange a dégagé 23,644 x 10^6 J, que les gaz peuvent être considérés comme parfaits, que la combustion se fait à pression constante et que la pression mesurée dans le récipient de récupération est de 2,0136 atm, déterminez la composition du mélange.

NOM, Prénom: .... **/25**

Section et numéro de matricule : ....

<u>QUESTION 4</u> *(25 points)*

Quelques caractéristiques du dichlore, Cl_2, sont reprises ci-dessous :

- Enthalpie standard de vaporisation : 20,4 kJ/mol
- Enthalpie standard de fusion : 6,4 kJ/mol
- Température de fusion : -101 °C
- Température de vaporisation normale : -34,5 °C

Parmi ces informations, certaines sont utiles pour répondre aux questions suivantes :
a) Dans quel(s) état(s) physique(s) se trouve 1,0 kg de dichlore contenu dans une bouteille fermée en acier de 10,0 L à 20 °C ?
b) Une fissure laisse s'échapper 220 g de dichlore par heure. Il a fallu 4 heures pour qu'un technicien s'en aperçoive et rebouche finalement la fissure. Dans quel état physique se trouve alors le dichlore restant dans la bouteille, à la même température de 20 °C ?
Justifiez toutes vos réponses par calcul.

CORRECTION DE L'INTERROGATION DE CHIMIE du 6 janvier 2020

Première partie –Théorie

Question 1

Bonnes réponses : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 8 ; 11 ; 13 ; 14

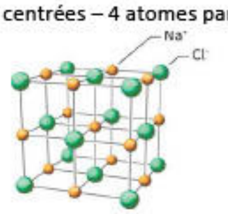
Question 2

a) Z=PV/nRT car Z=1 pour les gaz parfaits
b) A basse pression et haute température
c) La pression de vapeur de l'azote (N_2) est égale à 1 atm
d) $\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$

a= paramètre d'interactions moléculaires ; b=covolume...

e) CH_4 à 1 atm puis CH_4 à 2 atm puis NH_3 à 2atm et enfin H_2O à 1atm car le méthane a moins d'interactions intermoléculaires que l'ammoniac qui a lui-même moins d'interactions intermoléculaires que l'eau. Ensuite, plus la pression est basse, plus son comportement s'apparentera à celui d'un gaz parfait, dans de tels ordres de grandeurs du moins (cfr graphique de l'azote).

Question 3

a) Cubique simple – 1 atome par maille ; Cubique centré – 2 atomes par maille ; Cubique à faces centrées – 4 atomes par maille
b) 

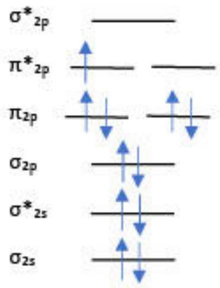
c) D'un point de vue stœchiométrique, Na^+ et Cl^- ont un rapport de 1. Ainsi, si un CFC contient 4 atomes par maille (cfr Q3.a), il y aura 4 atomes d'ions chlorures et donc 4 atomes d'ion sodium.

Question 4

a) (Réponse 4) De l'enthalpie et de la variation du nombre de moles de gaz.
b) (Réponse 4) Convertir la pression en atm, utiliser R=0,08206 pour obtenir un volume en L.
c) (Réponse 1) 1
d) (Réponse 4) Des interactions intermoléculaires et de la température.
e) (Réponse 5) Ne coupe ni l'axe Y, ni l'axe Z.
f) (Réponse 4) P = 1 bar, C = 1 mol/L.
g) (Réponse 2) Deux électrons d'une même orbitale ne peuvent pas avoir 4 nombres quantiques identiques.
h) (Réponse 2) L'énergie de première ionisation du chlore est supérieure à celle du césium.

Question 5

O_2^+ - 11 électrons



b) Ordre de liaison= (8-3)/2=2,5
c) 1 électron non apparié, paramagnétique
d) La longueur de liaison étant inversement proportionnelle à l'ordre de liaison et que l'ordre de liaison de l' O_2 est de 2, la longueur de notre liaison est inférieure à celle du dioxygène.

CORRECTION DE L'INTERROGATION DE CHIMIE du 6 janvier 2020

Seconde partie –Exercices

Question 1

Element terreux $\rightarrow M^{3+}$

Eq 1 : $M_{(s)} + 3\,H^+_{(aq)} \rightarrow M^{3+}_{(aq)} + \frac{3}{2}\,H_{2\,(g)}$

Eq 2 : $H_{2\,(g)} + \frac{1}{2}\,O_{2\,(g)} \rightarrow H_2O_{(l)}$

$m_{H_2O} = \rho_{H_2O} \cdot V_{H_2O} = 5\,g$

$n_{H_2O} = \frac{m_{H_2O}}{M_{H_2O}} = 0{,}2777\ mol \Rightarrow n_{H_2O} = n_{H_2}$

$n_M = \frac{2}{3}\, n_{H_2} = 0{,}1852\ mol$

$M_M = \frac{m_M}{n_M} = \frac{5}{0{,}1852} = 27\ g/mol \Rightarrow$ Aluminium

Question 2

$1\ eV = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ J$

$8{,}04\ keV = 1{,}288 \cdot 10^{-15}\ J$

$E = h\nu \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{E}$

$\lambda = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34} \cdot 2{,}997 \cdot 10^{8}}{1{,}288 \cdot 10^{-15}} = 1{,}542\ Å$

On se base sur la face $(2;0;0)$: $d = \frac{a}{2}$

$2d \sin\theta = n\lambda$ avec $n = 1$

$d = 1{,}96\ Å$

$a = 2d = 3{,}92\ Å$

CFC $\Rightarrow a = \sqrt{8}\,R \Rightarrow R = 1{,}39\ Å$

Question 3

$C_6H_6(l) + \frac{15}{2} O_2(g) \rightarrow 6 CO_2(g) + 3 H_2O(l)$ C_1

$C_8H_{18}(l) + \frac{25}{2} O_2(g) \rightarrow 8 CO_2(g) + 9 H_2O(l)$ C_2

$P_{H_2O} = 21,43 \text{ mmHg} = 0,0282 \text{ atm}$

$P_{CO_2} = P_{tot} - P_{H_2O} = 1,9354 \text{ atm}$

$$n_{CO_2} = \frac{1,9354 \text{ atm} \cdot 500 \text{ L}}{0,0821 \frac{\text{L.atm}}{\text{mol.K}} \cdot 298,15 \text{K}} = 40,574 \text{ mol}$$

$n_{CO_2} = 6\, n_{C_6H_6} + 8\, n_{C_8H_{18}}$

$Q = -23,644 \cdot 10^6 \text{ J} = \Delta_r H(C_1) \cdot n_{C_6H_6} + \Delta_r H(C_2) \cdot n_{C_8H_{18}}$

$\Delta_r H(C_1) = -3135,52 \text{ kJ/mol}$

$\Delta_r H(C_2) = -5074,73 \text{ kJ/mol}$

$$\begin{cases} -23,644 \cdot 10^3 \text{ kJ} = -3135,52 \cdot n_{C_6H_6} - 5074,73 \cdot n_{C_8H_{18}} \\ 40,574 \text{ mol} = 6\, n_{C_6H_6} + 8\, n_{C_8H_{18}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} n_{C_6H_6} = 3,113 \text{ mol} \\ n_{C_8H_{18}} = 2,729 \text{ mol} \end{array} \right.$$

Question 4

Chlore liquide ou gazeux car $T \gg T_{fusion}$

A = 34,5 °C (238,5 K), $P° = 1$ atm

$$\ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) = -\frac{\Delta H°_{vap}}{R}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) \Rightarrow P_2 = 6,78 \text{ atm}$$

$$n_{Cl_2(g)} = \frac{P_2 V}{RT} = 2,82 \text{ mol}$$

$m_{Cl_2(g)} = n_{Cl_2(g)} \cdot M_{Cl_2(g)} = 200 \text{ g}$

$m_{Cl_2(l)} = m_{Cl_2\,tot} - m_{Cl_2(g)} = 800 \text{ g}$ $\Rightarrow$ Une partie liquide, une autre gazeuse

4h de fuite : $4 \cdot 220 \text{ g} = 880 \text{ g}$

Il reste 120 g dans la bouteille

Comme $120 \text{ g} < 200 \text{ g}$, tout est à l'état gazeux

Faculté des Sciences Année académique 2019-2020

PREMIERES ANNEES DE BACHELIER EN SCIENCES BIOLOGIQUES, CHIMIQUES, GEOGRAPHIQUES, GEOLOGIQUES, PHYSIQUES, EN SCIENCES DE L'INGENIEUR (ORIENTATIONBIOINGENIEUR) ET PREMIERE ANNEE POLYVALENTE EN SCIENCES

EXAMEN DE CHIMIE DE MAI 2020

Question 1

Un étudiant souhaite effectuer un 1,00 L de mélange tampon à un pH de 4,50. Pour cela, il dispose de :

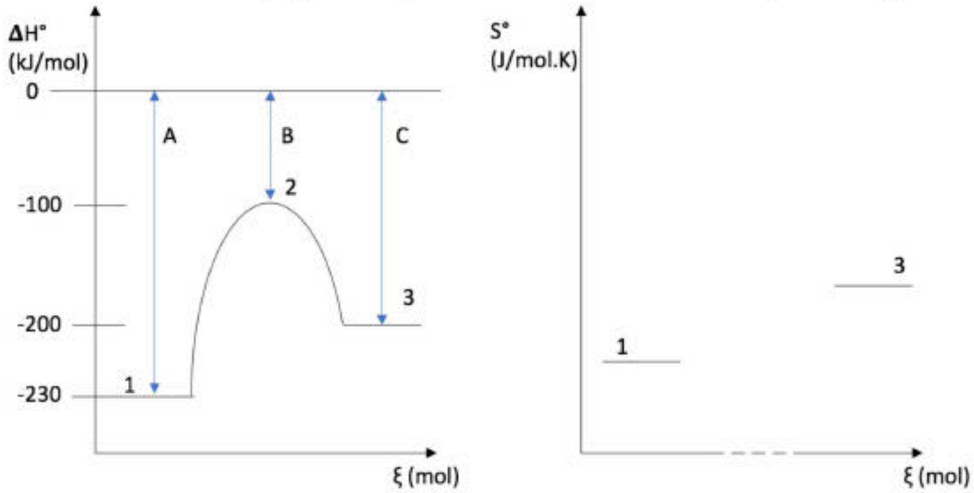
- 3,00 g d'acide arsénique
- 3,00 g d'acide malique
- 3,00 g d'acide salicylique
- 3,00 g d'acide maléique
- NaOH 1,00 mol/L
- HCl 1,00 mol/L
- eau distillée

a) Quel acide va-t-il utiliser ?
b) Quel est le volume de HCl ou NaOH qu'il va utiliser s'il utilise la totalité de la masse d'acide ?

a) Quel acide va-t-il utiliser ? Acide malique
b) Quel est le volume de HCl ou NaOH qu'il va utiliser s'il utilise la totalité de la masse d'acide ? 26,8 mL de NaOH 1,00 mol/L

Question 2

Soient les diagrammes réactionnels suivants associés à une même réaction sur lesquels A, B et C sont des différences selon l'axe y représentées par les flèches bleues, et 1, 2 et 3 des espèces chimiques.



(ξ est l'avancement de la réaction)

La mention "cette réaction" fera référence à la réaction allant de 1 vers 3. La mention « réaction inverse » fera quant à elle référence à la réaction allant de 3 vers 1.

Indiquez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

Une bonne réponse vous fera gagner 1 point pour les vrai ou faux et 2 points pour les QCM. Une mauvaise réponse vous fera perdre ce même montant de points. En cas d'incertitude, vous pouvez cocher la case "ne se prononce pas", qui ne vous fera ni gagner ni perdre de points. Notez que la note finale de la question 5 sera au moins de 0.

- Suffisamment d'informations sont fournies pour affirmer que la valeur de la constante d'équilibre de cette réaction est supérieure à 1 :
  - Vrai
  - Faux
  - Ne se prononce pas
- Cette réaction est endothermique
  - Vrai
  - Faux
  - Ne se prononce pas
- En supposant que les molécules 1 et 3 sont constituées d'une seule liaison, on peut affirmer que la liaison dans 1 est moins forte que celle dans 3 :
  - Vrai
  - Faux
  - Ne se prononce pas
- La réaction inverse n'est spontanée qu'à basse température :
  - Vrai
  - Faux
  - Ne se prononce pas

- L’augmentation de la température favorise thermodynamiquement cette réaction :
    - Vrai
    - Faux
    - Ne se prononce pas
- L’augmentation de la température augmente la vitesse de la réaction inverse :
    - Vrai
    - Faux
    - Ne se prononce pas
- L'ajout d'un catalyseur modifierait l'enthalpie de réaction de cette réaction :
    - Vrai
    - Faux
    - Ne se prononce pas

Cochez la bonne réponse parmi les propositions.

1) Si l'espèce 1 est un gaz :
    - L’espèce 3 est nécessairement un gaz
    - L’espèce 3 peut être un solide, un liquide ou un gaz
    - L’espèce 3 peut être un solide ou un liquide
    - L'espèce 3 peut être un liquide ou un gaz
    - Ne se prononce pas
2) B représente :
    - L’enthalpie de la réaction
    - L’énergie d'activation de la réaction
    - Le complexe activé
    - Aucune des autres propositions
    - Ne se prononce pas
3) Suite à une augmentation de la température :
    - La vitesse de cette réaction augmente plus que la vitesse de la réaction inverse
    - La vitesse de la réaction inverse augmente plus que la vitesse de cette réaction
    - Les vitesses de cette réaction et de la réaction inverse augmentent d'une même valeur
    - On ne dispose pas d'assez d'informations pour répondre à cette question
    - Ne se prononce pas
4) Quelles informations manque-t-il pour pour calculer la constante k ?
    - La température et l'énergie d'activation
    - La température et la concentration de l'espèce 1
    - Le facteur pré exponentiel d'Arrhenius et la température
    - L'énergie d'activation et la constante d'équilibre
    - Ne se prononce pas

Question 3

Un chimiste veut solubiliser un sel de type $M(OH)_2$ dans 1,00L d'eau pure. Après avoir mis le sel en solution et agité, il reste du solide au fond du récipient et le pH de la solution est à 9,113 à 25°C.

Le chimiste se débarrasse du solide non dissous et décide d'effectuer un titrage sur 200mL de la solution récupérée avec du HCl $5,00x10^{-4}$ mol/L.

a) Quelle est la concentration en OH^- au départ ?
b) Que vaut le Ks ?
c) Quelle est l'identité de M ?
d) Quel est le volume de HCl ajouté pour atteindre l'équivalence (entre 1,00 et 100ml) ?

a) Quelle est la concentration en OH^- au départ ? $1,2971.10^{-5}$ mol/L
b) Que vaut le Ks ? $1,091.10^{-15}$
c) Quelle est l'identité de M ? Le cobalt
d) Quel est le volume de HCl ajouté pour atteindre l'équivalence (entre 1,00 et 100ml) ? 5,19 mL

Question 4

Les couples $AO_2(aq)/A_2O_3^{2-}(aq)$ ($E° = 0{,}643V$) et $HXO(aq)/X_2(g)$ ($E° = 0{,}831V$) sont en solution, à 25°C, dans deux compartiments séparés pour former la pile :

Pt(s)	$[AO_2(aq)] = 0{,}500\ mol.L^{-1}$	$[HXO(aq)] = 0{,}200\ mol.L^{-1}$	Pt(s)
	$A_2O_3^{2-}(aq)$	$P_{X_2} = 1{,}00$ bar	
	pH = 4,00	pH = 3,00	
	V = 20,0 mL	V = 20,0 mL	

a) Quelles sont les réactions à la cathode, à l'anode et la réaction globale dans les conditions standards ?
b) Quel est le potentiel de la cathode dans ces conditions ?
c) Quelle sera la concentration de $A_2O_3^{2-}(aq)$ minimale pour que la pile fonctionne ?

a) Quelles sont les réactions à la cathode, à l'anode et la réaction globale dans les conditions standards ?

Cathode : $2HXO(aq) + 2H^+(aq) + 2e^- \rightleftharpoons X_2(g) + 2H_2O(l)$

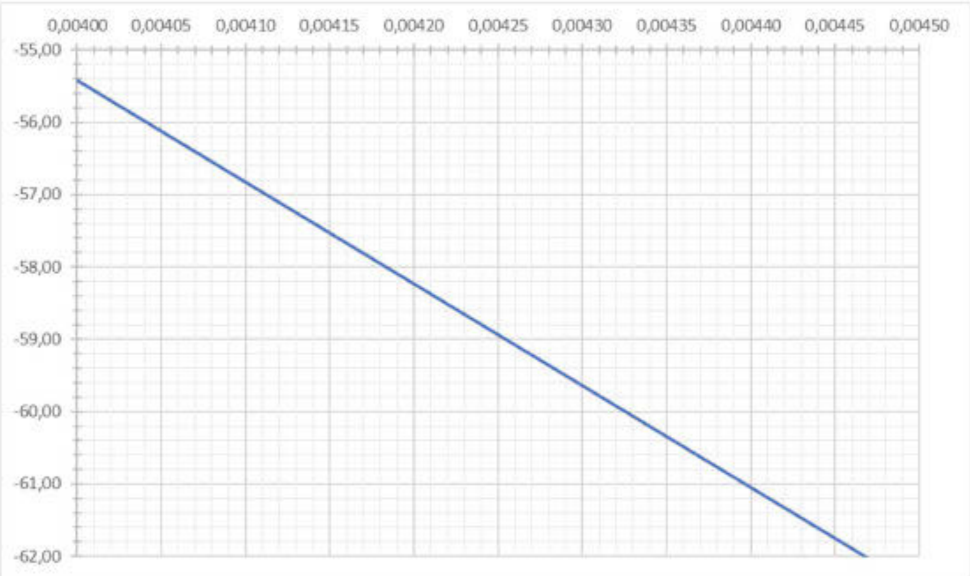
Anode : $2AO_2(aq) + 2H^+(aq) + 4e^- \rightleftharpoons A_2O_3^{2-}(aq) + H_2O(l)$

Globale : $4HXO(aq) + 4H^+(aq) + A_2O_3^{2-}(aq) + H_2O(l) \rightleftharpoons 2AO_2(aq) + 2H^+(aq) + 2X_2(g) + 4H_2O(l)$

b) Quel est le potentiel de la cathode dans ces conditions ? E(cathode) = 0,612 V
c) Quelle sera la concentration de A2O32-(aq) minimale pour que la pile fonctionne ? $[A_2O_3^{2-}] = 2{,}99.10^{-7}$ mol/l

Question 5

Après 4 longues heures de travaux pratiques, un assistant rentre chez lui assez épuisé mais décide tout de même de corriger les rapports rendus par ses étudiants le soir même plutôt que de remettre cela à plus tard. La manipulation a porté sur l'étude de l'influence de la température sur la vitesse de la réaction de décomposition de l'acide phosphorique contenu dans une boisson gazeuse, réaction qui suit une cinétique d'ordre 0. Un binôme d'étudiants a rendu un rapport incomplet accompagné d'un graphique sans titre et sans unité aux axes. L'assistant décide cependant d'évaluer la pertinence de leurs mesures sur base du peu d'information à sa disposition.



a) A quoi correspondent les axes (grandeur + unité) ?
b) Que vaut l'énergie d'activation du processus étudié ?
c) Quelle est l'unité de la constante cinétique associée à ce processus ?

a) A quoi correspondent les axes (grandeur + unité) ? axe x : 1/T; axe y : ln(k)
b) Que vaut l'énergie d'activation du processus étudié ? Ea = 117 kJ/mol ; CA = -14072,6
c) Quelle est l'unité de la constante cinétique associée à ce processus ? mol/L s

Correction de l'examen de chimie de juin 2020

Question 1

a) Si $pH = 4,5$: $[H_3O^+] = 3,16.10^{-5}$ mol/L

$$[H_3O^+] = K_a \frac{C_a}{C_b}$$

→ Acide arsénique :
$$\frac{C_a}{C_b} = 6,12.10^{-3}$$

Acide salicylique :
$$\frac{C_a}{C_b} = 3,01.10^{-2}$$

Acide malique :
$$\frac{C_a}{C_b} = 4,05 \text{ (avec } K_{a2})$$

Acide maléique :
$$\frac{C_a}{C_b} = 2,22.10^{-3}$$

⇒ L'acide malique et son K_{a2} est le seul qui respecte la condition des mélanges tampons qui veut que $10^{-1} < \frac{C_a}{C_b} < 10^{1}$

b) $pH = 4,5 = pK_{a2} + \log \frac{C_b}{C_a}$

$$\frac{C_b}{C_a} = \frac{n_b}{n_a} = 2,47.10^{-1}$$

	$C_4H_6O_{5\,(aq)}$	+ $OH^-_{(aq)}$	⇌ $C_4H_5O_{5\,(aq)}^-$	+ $C_4H_4O_{5\,(aq)}^{2-}$
n_i	$2,24.10^{-2}$	$1.V_{NaOH}$	0	0
$n_{éq}$	0	0	$2,24.10^{-2} - (V_{NaOH} - 2,24.10^{-2}) = n_a$	$V_{NaOH} - 2,24.10^{-2} = n_b$

$$\Rightarrow 2,47.10^{-1} = \frac{V_{NaOH} - 2,24.10^{-2}}{4,48.10^{-2} - V_{NaOH}}$$

$$V_{NaOH} = 26,8 \text{ mL}$$

Question 2

Faux
Vrai
Vrai
Vrai
Vrai
Vrai
Faux
Rep 2
Rep 3
Rep 3
Rep 1

Question 3

Question 3

a) $M(OH)_{2\,(s)} \rightleftharpoons M^{2+}_{(aq)} + 2\,OH^-_{(aq)}$

$pH = 9{,}113 \Rightarrow pOH = 4{,}887$

$[OH^-] = 10^{-pOH} = 1{,}297 \cdot 10^{-5}$ mol/L

b) Sel de type $AB_2 \Rightarrow K_S = 4s^3$

$K_S = 4\left(\frac{[OH^-]}{2}\right)^3 = 1{,}091 \cdot 10^{-15}$

c) Du cobalt, selon les tables

d) $n_{OH^-} = c_{OH^-} \cdot V = 0{,}2 \cdot 1{,}297 \cdot 10^{-5} = 2{,}594 \cdot 10^{-6}$ mol

$n_{OH^-} = n_{H^+}$ (point d'équivalence)

$V = \frac{n_{H^+}}{c_{H^+}} = 5{,}188 \cdot 10^{-3}$ L

Question 4

Question 4

b) $C_{HXO} = 0{,}2$ mol/L

$C_{H^+} = 10^{-3}$ mol/L

$Q = \frac{P_{X_2}}{[H^+]^2 [HXO]^2}$

$E = 0{,}612$ V (grâce à Nernst)

c) $E_{anode} > 0{,}612$ V

$0{,}612 = 0{,}643 - \frac{0{,}0592}{4} \cdot \log\left(\frac{x}{(10^{-4})^2 \cdot (0{,}5)^2}\right)$

$\frac{x}{(10^{-4})^2 \cdot (0{,}5)^2} = 1{,}243 \cdot 10^2$

$x = 3{,}1 \cdot 10^{-7}$ mol/L

Faculté des Sciences Année académique 2019-2020

PREMIERES ANNEES DE BACHELIER EN SCIENCES BIOLOGIQUES, CHIMIQUES, GEOGRAPHIQUES, GEOLOGIQUES, PHYSIQUES, EN SCIENCES DE L'INGENIEUR (ORIENTATIONBIOINGENIEUR) ET PREMIERE ANNEE POLYVALENTE EN SCIENCES

EXAMEN DE CHIMIE D'AOUT 2020

Question 1

L'huile de noisette est composée d'acide oléique ($C_{18}H_{34}O_2$) et d'acide linoléique ($C_{18}H_{32}O_2$).

La combustion de 100g de ce mélange libère 3951,4 kJ.

Sachant que l'enthalpie réactionnelle de formation de $C_{18}H_{34}O_2$ vaut -764,8 kJ/mol et que celle de $C_{18}H_{32}O_2$ vaut -634,7 kJ/mol, que l'eau formée est sous forme liquide et que la transformation est réalisée dans les conditions standards à 298 K :

a) Ecrivez les équations de réaction
b) Calculez les fractions massiques des acides oléique et linoléique dans le mélange initial.

Question 2

Sur base des interactions intermoléculaires, expliquez avec vos mots pourquoi la température d'ébullition du méthanol (CH_3OH, masse molaire = 32 g/mol) est nettement supérieure à celle du méthanal (CH_2O, masse molaire = 30 g/mol).

Question 3

Sachant que 675 g d'eau se trouvent ans une enceinte de 12,0 m^3 dans laquelle l'air est saturé d'humidité à une température de 28ºC, calculez la masse d'eau à l'état liquide et la masse d'eau à l'état gazeux. *L'enthalpie de vaporisation de l'eau vaut 44,01 kJ/mol et peut être considérée comme indépendante de la température.*

Question 4

L'électrophorèse est une technique chromatographique couramment utilisée pour séparer des espèces telles que des protéines, des nucléotides ou encore des acides aminés selon leur charge et pour des composés de même charge, selon leur taille.

Des étudiants en laboratoire parviennent à séparer les constituants d'un mélange d'acides aminés dont notamment de la cystéine. Pour la suite de leur manipulation, ces derniers doivent placer l'acide aminé en question dans une solution tampon (pH=6,30).

a) Sachant que le $pH_{isoélectrique}$ de la cystéine est de 5,07, quel sera le signe de la charge de cette dernière dans une solution tampon de pH=6,30 ? Justifiez
b) Proposez 2 réactifs à utiliser pour préparer la solution tampon de pH=6,30. Justifiez
c) Pour le système considéré au point b., que devrait être le rapport Ca/Cb (où Ca et Cb sont respectivement les concentrations analytiques des formes acides et basiques) ?

Question 5

Une pile de concentration fonctionnant avec le couple Ag^+/Ag est mise en place à 25°C.

Chaque compartiment est constitué d'une électrode d'argent plongeant dans un litre de solution de $AgNO_3$. Cette concentration vaut $1{,}00.10^{-1}$ mol/L dans le premier compartiment et $1{,}00.10^{-3}$ mol/L dans le second. Chaque compartiment occupe un volume de 1,00L.

a) Calculez la force électromotrice de la pile.
b) Quelle serait la force électromotrice de cette pile si l'on ajoutait $5{,}84.10^{-2}$g de $NaCl_{(s)}$ dans le second compartiment ? La variation de volume suite à cet ajout est considérée nulle.

Question 6

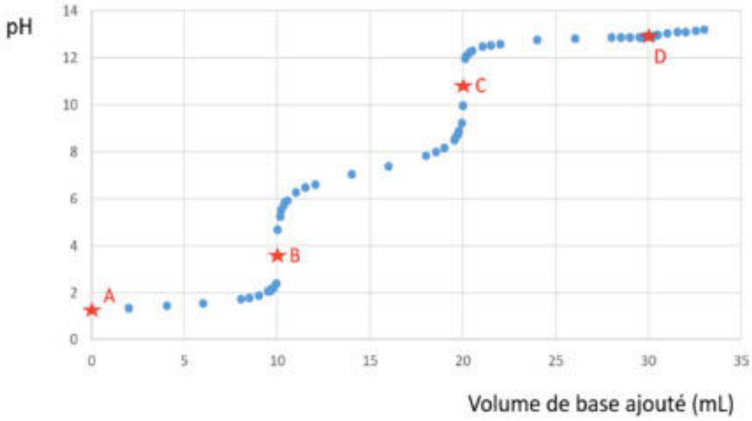
La décomposition d'un produit $A_{(g)}$ se fait en une étape élémentaire comme suit :

$$A_{(g)} \rightarrow B_{(g)} + C_{(g)}$$

a) Que vaut la constante de vitesse de réaction à 25,0ºC si le facteur pré-exponentiel vaut $4{,}20.10^{12}\ s^{-1}$ et l'énergie d'activation vaut 102 kJ/mol ?
b) Que vaut la constante de vitesse de cette réaction à 120ºC ?
c) Combien de temps faut-il pour consommer 25% du composé A à 120ºC ?

Question 7

Soit le graphique suivant représentant la courbe d'un titrage d'une solution de 10,0mL d'un acide imaginaire A effectué par une base forte de concentration 0,5 mol/L. Les lettre A, B, C et D représentent les différentes espèces chimiques rencontrées au cours du titrage.



Indiquez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

Une bonne réponse vous fera gagner 1 point pour les vrais ou faux et 2 points pour les QCM. Une mauvaise réponse vous fera perdre ce même montant de points. En cas d'incertitude, vous pouvez cocher la case 'Ne se prononce pas', qui ne vous fera ni gagner ni perdre de points. Notez que la note totale de cette question sera au moins de 0.

- A concentration équivalente, une solution de polyacide a toujours un pH plus élevé qu'une solution contenant un monoacide.
  - Vrai
  - Faux
  - Ne se prononce pas
- On peut affirmer que le pKa de l'espèce C est supérieure à celui de l'espèce A.
  - Vrai
  - Faux
  - Ne se prononce pas
- Suffisamment d'informations sont fournies pour affirmer que l'espèce A est un acide faible.
  - Vrai
  - Faux
  - Ne se prononce pas
- L'indicateur coloré jaune titan (zone de virage 12,2-13,2) est adéquat pour déterminer expérimentalement la 3^e équivalence.
  - Vrai
  - Faux
  - Ne se prononce pas
- L'espèce B pourrait être du HY^{2-} (avec Y un groupement d'atomes imaginaires sans atome d'hydrogène)
  - Vrai
  - Faux
  - Ne se prononce pas

- Pour déterminer expérimentalement la première équivalence, du méthylorange a été utilisé. (Indicateur coloré rouge sous sa forme acide, jaune sous sa forme basique, zone de virage 3,2-4,4). A l'équivalence, on retrouve en solution :
    - Des molécules de l'indicateur qui transmettent chacune la couleur jaune et des molécules de l'indicateur qui transmettent chacune la couleur rouge.
    - Uniquement des molécules de l'indicateur qui transmettent chacune la couleur orange.
    - Uniquement des molécules de l'indicateur qui transmettent chacune la couleur rouge.
    - Des molécules de l'indicateur qui ne transmettent aucune couleur.
    - Ne se prononce pas.
- Pour tracer théoriquement cette courbe de titrage à une température donnée, il faudrait comme information :
    - Les pKa des différentes espèces et la concentration de la solution titrante.
    - La concentration de la solution titrante et le volume de la solution titrante ajouté.
    - Les concentrations des espèces titrantes et titrées, les pKa des différentes espèces, le volume de solution titrante ajouté.
    - Les concentrations des espèces titrantes et titrées, les pKa des différentes espèces, le volume de solution titrée.
    - Ne se prononce pas.
- Pour déterminer expérimentalement la première équivalence, on pourrait utiliser comme indicateur coloré (zone de virage indiquée entre parenthèses) :
    - Du pourpre de méta-crésol (1,2-2,8)
    - Du jaune de méthyle (2,9-4,0)
    - Du bleu de bromothymoll (6,0-7,6)
    - De la phénolphtaléine (8,0-9,6)
    - Ne se prononce pas
- Si l'espèce C est du HY^{2-} (avec Y un groupement d'atomes imaginaires sans atome d'hydrogène), alors :
    - L'espèce A est du H_3Y
    - L'espèce D est du Y^{2-}
    - L'espèce A est du H_3Y^{2+}
    - L'espèce B est chargée positivement
    - Ne se prononce pas
- Si l'on souhaitait préparer un mélange tampon à un pH de 7, il faudrait avoir en présence :
    - Des molécules des espèces A et B
    - Des molécules des espèces B et C
    - Des molécules de l'espèces B uniquement
    - Des molécules des espèces C et D
    - Ne se prononce pas

Correction de l'examen de chimie d'aout 2020

Question 1

a) $C_{18}H_{34}O_2(l) + \frac{51}{2} O_2(g) \longrightarrow 18 CO_2(g) + 17 H_2O(l)$

$C_{18}H_{32}O_2(l) + 25 O_2(g) \longrightarrow 18 CO_2(g) + 16 H_2O(l)$

b) Enthalpie de combustion de $C_{18}H_{34}O_2 = -1{,}117749 \cdot 10^4$ kJ/mol

$C_{18}H_{32}O_2 = -1{,}102176 \cdot 10^4$ kJ/mol

$x = m_{\text{acide oléique}}$
$y = m_{\text{acide linoléique}}$

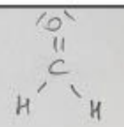
$$\begin{cases} -1{,}117749 \cdot 10^4 x - 1{,}102176 \cdot 10^4 y = -3951{,}4 \\ 282{,}46 x + 280{,}45 y = 100 \end{cases}$$

$\Rightarrow x = 0{,}278$ mol
$y = 0{,}076$ mol

$m_{\text{acide oléique}} = 78{,}52$ g $\Rightarrow 78{,}52\,\%$
$m_{\text{acide linoléique}} = 21{,}48$ g $\Rightarrow 21{,}48\,\%$

Question 2

Méthanal :



Les 2 molécules possèdent des liaisons dipôle permanent - dipôle permanent, des liaisons d. induit - d. induit et des liaisons dipôle induit - dipôle permanent.
Cependant, la molécule du méthanol contient des LH, des liaisons puissantes qui nécessitent un gros apport d'énergie pour être rompues.

Question 3

$M_{H_2O} = 18,0152$ g/mol

$m\,H_2O = \frac{m}{M} = 37,47$ mol

- $\ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) = \frac{-\Delta H^\circ_{vap}}{R}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)$ où $P_2 = 101\,300$ Pa
$T_1 = 301$ K
$T_2 = 373$ K
$R = 8,314$ J.(mol K)$^{-1}$

$\Longrightarrow P_1 = 3398,754$ Pa

- $P_1 V = m_{H_2O_{(g)}} R \cdot T$ où $V = 12\,000$ L
$P_1 = 0,0335$ atm
$T = 301$ K
$R = 0,08206$

$\Longrightarrow m\,H_2O_{(g)} = 16,28$ mol

$m\,H_2O_{(g)} = m\,H_2O_{(g)} \cdot M_{H_2O} = 293,20$ g

$m\,H_2O(l) = m\,H_2O - m\,H_2O(g) = 381,80$ g

Question 4

a) $pH_{iso} < pH_{HT}$ donc la molécule est négative

b) $[H^+] = 10^{-6,3} = 5,012.10^{-7}$ mol/L

On peut utiliser le couple H_2CO_3 / HCO_3^- car son $K_{A1} = 4,45.10^{-7}$ et est donc compris entre $\frac{[H^+]}{10}$ et $10\,[H^+]$

c) $\frac{C_a}{C_b} = \frac{[H^+]}{K_{A1}} = 1,126$

Question 5

a) $E = E^\circ - \frac{0{,}0592}{n} \log Q$ où $n = 1$

Red : $Ag^+(aq) + 1e^- \leftrightarrows Ag(s)$

ox : $Ag(s) \leftrightarrows Ag^+(aq) + 1e^-$

$E_{cathode} = 0{,}7408$ V $\Rightarrow E = E_c - E_a = 0{,}1184$ V

$E_{anode} = 0{,}6224$ V

b) Précipitation de $Ag^+(aq)$ en $AgCl(s)$

$K_s = s^2 \Rightarrow s_{Ag^+} = 1{,}414 \cdot 10^{-4}$ mol/L

$n_{NaCl} = \frac{m_{NaCl}}{M_{NaCl}} = 1 \cdot 10^{-3} \frac{mol}{L}$

$E_{anode} = 0{,}572$ V $\Rightarrow E = 0{,}1687$ V

Question 6

a) $K = A \cdot \exp(-E_A/RT)$

$= 5{,}54 \cdot 10^{-6}\ s^{-1}$

b) $K = 0{,}116\ s^{-1}$

c) $\ln\left(\frac{[A]_t}{[A]_0}\right) = -kt$

$\frac{[A]_t}{[A]_0} = 0{,}75 \Rightarrow t = 2{,}48$ s

Question 7

Faux
Vrai
Faux
Vrai
Faux
Rep 1
Rep 4
Rep 2
Rep 1
Rep 2

Auditoire UD.2.120 - place N°

Année académique 2020/2021

PREMIERE ANNEE DE BACHELIER EN SCIENCES BIOLOGIQUES, CHIMIQUES, GEOGRAPHIQUES, GEOLOGIQUES, PHYSIQUES, EN SCIENCES DE L'INGENIEUR (ORIENTATION BIOINGENIEUR), MATHEMATIQUES (ORIENTATION BIOLOGIE), PREMIERE ANNEE POLYVALENTE EN SCIENCES

INTERROGATION DE CHIMIE du 4 janvier 2021

/20

Section et numéro de matricule :

QUESTION 1 (20 points)

Cette question validera le cas échéant les travaux personnels des étudiants en sciences physiques

La combustion complète de 100 g d'un hydrocarbure oxygéné de formule $C_xH_yO_z$ est réalisée en présence de 8,08 moles de dioxygène. La réaction produit 122 grammes d'eau ainsi que 138,7 litres de dioxyde de carbone à la température de 300 K sous une pression de 0,950 atm.
Déterminez la formule moléculaire de l'hydrocarbure, sachant que sa masse molaire vaut 74,1 g/mol.
Détaillez les étapes de votre raisonnement.

Auditoire UD.2.120 - place N°

Examen de chimie générale – CHIM-F-101 – 04 janvier 2021

.... /20

Section et numéro de matricule :

QUESTION 2 (20 points)

À basse température et dans des conditions spécifiques, le monoxyde d'azote et le dioxyde d'azote réagissent ensemble en recombinant leur électron célibataire pour former du trioxyde de diazote.

Structure de Lewis du monoxyde d'azote	
Structure de Lewis du trioxyde de diazote (+numérotez les deux atomes d'azote)	
Hybridation de l'atome d'azote n°1 + justification	Réponse : Justification :
Hybridation de l'atome d'azote n°2	Réponse :
Moment dipolaire	☐ Nul ☒ Non nul
Type d'interactions intermoléculaires possibles entre les molécules de trioxyde de diazote	

Auditoire UD.2.120 - place N°

Examen de chimie générale – CHIM-F-101 – 04 janvier 2021

/15

Section et numéro de matricule :

QUESTION 3 (15 points)

La couche d'ozone (O_3) est située majoritairement dans la stratosphère terrestre. Les molécules d'ozone protègent la vie sur terre en absorbant la quasi-totalité des rayonnements ultra-violets de type UVC émis par le soleil. L'énergie des photons des rayonnements UVC est telle que ceux-ci peuvent engendrer des ruptures de liaisons chimiques incompatibles avec le maintien de la vie sur terre.

L'absorption d'un photon provoque la rupture d'une liaison de la molécule d'ozone selon le mécanisme suivant :

$$O_3(g) + h\nu \rightarrow O_2(g) + O(g)$$

En considérant une absorption de photons d'une longueur d'onde unique de 255 nm et que la couche d'ozone absorbe 7,50 10^{23} Joules par an, déterminez la masse d'ozone (en tonnes) détruite chaque année par le soleil par ce processus.

Auditoire UD.2.120 - place N°

Examen de chimie générale – CHIM-F-101 – 04 janvier 2021

.... /15

Section et numéro de matricule :

QUESTION 4 (15 points)

Déterminez l'énergie de réseau (ou enthalpie réticulaire) de l'oxyde de calcium en vous aidant des données suivantes, recueillies dans divers ouvrages de physique et de chimie.
Ces valeurs sont mentionnées dans les conditions standard à 298 K :

	Ca	O
Énergie de 1ère ionisation	6,1131 eV	1313,94 kJ/mol
Énergie de 2ème ionisation	11,8717 eV	3388,67 kJ/mol
Enthalpie de capture du premier électron	Non disponible	-142 kJ/mol
Enthalpie de capture du deuxième électron	Non disponible	+844 kJ/mol
Enthalpie de sublimation	164 kJ/mol	Non applicable

L'enthalpie de dissociation du dioxygène est de 498 kJ/mol les conditions standard à 298 K.

Détaillez votre raisonnement.

Auditoire UD.2.120 - place N°

Examen de chimie générale – CHIM-F-101 – 04 janvier 2021

.... /15

Section et numéro de matricule :

QUESTION 5 (15 points)

Un élément métallique inconnu fait l'objet d'une analyse par diffraction des rayons X. L'examen détaillé du diffractogramme révèle que l'élément cristallise dans le réseau cubique centré. L'analyse est faite à l'aide d'une source d'une longueur d'onde de 0,114 nm et le pic correspondant au plan d'indices de Miller (002) apparaît à un angle de 20,2° pour le premier ordre de diffraction.

À l'aide de ces données,

a) Déterminez la distance internucléaire entre atomes premiers voisins.

b) Calculez la masse molaire (en g/mol) de cet élément connaissant sa masse volumique : 8,57 g/cm^3. Détaillez toutes les étapes de votre calcul.

c) Déduisez de ce calcul la nature chimique de cet élément

Auditoire UD.2.120 - place N°

…amen de chimie générale – CHIM-F-101 – 04 janvier 2021

.... /15

Section et numéro de matricule :

QUESTION 6 (15 points)

Soient trois configurations électroniques de l'ion X^{2-} :

C1 : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^4 4s^2$

C2 : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5 4s^1$

C3 : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^2 4s^2 3d^2$

a) Quelle est la nature chimique de l'élément X ?

b) Classez par ordre croissant d'énergie ces trois configurations électroniques en justifiant votre raisonnement.

Interrogation de Chimie du 4 janvier 2021

Question 1

. $x = \frac{n_{CO_2}}{n_{C_xH_yO_z}}$ $\qquad n_{CO_2} = \frac{P.V}{RT} = \frac{0,95 . 138,7}{0,082 . 300} = 5,35$ mol

$n_{C_xH_yO_z} = \frac{100}{74,1} = 1,35$ mol

$x = \frac{5.35}{1,35} = 3,96 \simeq 4 \rightarrow 4$ atomes de C

. 1 mole $C_xH_yO_z \rightarrow y/2$ moles de H_2O

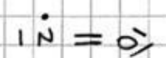
$\frac{y}{2} = \frac{n_{H_2O}}{n_{C_xH_yO_z}} \iff y = 2 . \frac{n_{H_2O}}{1,35}$ $\qquad n_{H_2O} = \frac{122}{2.1,0079 + 15,994} = 6,772$ mol

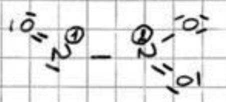
$= 2 . \frac{6,772}{1,35} = 10,0 \rightarrow 10$

. z ? $4 m_C + 10 m_H + z m_O = 74,1$ g/mol
$\iff 4 . 12,0110 + 10 . 1,0079 + z . 15,9994 = 74,1$
$\iff z = 0,998 \simeq 1$

$\Rightarrow C_4H_{10}O$

Question 2

. structure de Lewis du monoxyde d'azote $\qquad$ 

. structure de Lewis du trioxyde de diazote $\qquad$ 

. Hybridation atome N n°1 + justification $\qquad sp^2$ car 3 liens effectifs autour de cet atome

. Hybridation atome N n°2 $\qquad sp^2$

. moment dipolaire $\qquad$ non nul

. type d'interactions intermoléculaires
* dipoles - dipoles
* dipole - dipole induit
* dipole induit - dipole induit

Question 3

$E_{photon} = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6,626 . 10^{-34} . 2,998 . 10^{8}}{255 . 10^{-9}} = 7,790 . 10^{-19}$ J

$n_{photons} = \frac{7,5 . 10^{23}}{7,790 . 10^{-19}} = 9,628 . 10^{41} = n_{O_3}$

$\frac{n_{O_3}}{N_A} . M_{O_3} = \frac{9,628 . 10^{41}}{6,02252 . 10^{23}} . (3 . 15,9994) = 7,67 . 10^{19}$ g $= 7,67 . 10^{13}$ tonnes

Question 4

$Ca^{2+}(g) + O^{2-}(g)$

$\Delta H^\circ_{CE1} + \Delta H^\circ_{CE2}$ — $702\ kJ\,mol^{-1}$

$Ca^{2+}(g) + O(g)$

$1/2\ D_{O_2}$ — $249\ kJ\,mol^{-1}$

$Ca^{2+}(g) + \frac{1}{2} O_2(g)$

$I_{1,Ca} + I_{2,Ca}$ — $1735\ kJ\,mol^{-1}$

$Ca(g) + \frac{1}{2} O_2(g)$

$\Delta H^\circ_{sublimation\ Ca}$ — $164\ kJ\,mol^{-1}$

$Ca(s) + \frac{1}{2} O_2(g)$

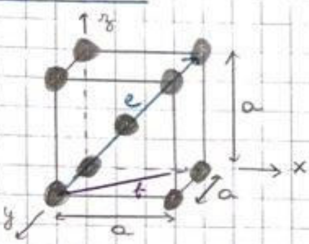
$\Delta_f H^\circ_{298K}(CaO)$ — $-635,09\ kJ\,mol^{-1}$

$CaO(s)$

$\Delta_{réseau} H^\circ = 3485\ kJ\,mol^{-1}$

$\Delta_{réseau} H^\circ = 702 + 249 + 1735 + 164 - (-635,09) = 3485\ kJ\,mol^{-1}$

Question 5



$(002) \rightarrow x : \frac{1}{0} = \infty$, $y : \frac{1}{0} = \infty$, $z : \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$n\lambda = 2d \sin\theta$ ($\theta \rightarrow 20,2°$)

$n = 1$, $\lambda = 0,114\ nm$, $d \rightarrow d_{002}$

$\Leftrightarrow d_{002} = 0,165\ nm \Rightarrow 2d = a$

$\Leftrightarrow a = 0,330\ nm$

a) $e^2 = f^2 + a^2$ $\qquad f^2 = a^2 + a^2$

$= 3a^2$

$\Leftrightarrow e = \sqrt{3}\, a$

$d_{internucléaire} = \frac{e}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0,330 = 0,286\ nm$

b) $V_{maille} = (0,330\ nm)^3 = 3,594 \cdot 10^{-2}\ nm^3 \xrightarrow{N_A} 2,164 \cdot 10^{22}\ nm^3$

$= 21,64\ cm^3$

cubique centré $\Rightarrow$ 2 atomes / maille $\rightarrow V_m = \frac{21,64}{2} = 10,82\ cm^3$

$M = \rho \cdot V_m = 8,57 \cdot 10,82 = 92,7274\ g\,mol^{-1}$

c) Nb

Question 6

a) Soufre

b) $1s$
$2s\ 2p$
$3s\ 3p\ 3d$
$4s$

$18\,e^- : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$

$C_2 < C_1 < C_3$

Interrogation de chimie de juin 2021 : partie Q1

QUESTION 1 (20 points)

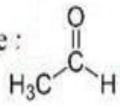
La plupart des autoroutes belges sont encore éclairées de nuit à l'aide d'ampoules à vapeur de sodium à basse pression. Ce type d'ampoule émet une lumière jaune-orangé caractéristique, correspondant à des photons émis à une longueur d'onde de 589 nm.

En considérant une ampoule standard libérant exclusivement ces photons à raison d'une puissance de 100 W, calculez le nombre de photons émis par une ampoule durant une nuit de 8,00 heures.

QUESTION 2 (20 points)

Les paramètres **a** et **b** de l'équation de van der Waals sont donnés ci-dessous pour l'éthanol, le propane et l'éthanal (ou acétaldéhyde). En utilisant vos connaissances, attribuez les paramètres à ces gaz.

La structure de l'éthanal est reproduite ci-contre :
Justifiez votre raisonnement.



Gaz	a / bar.L^2.mol^{-2}	B / L.mol^{-1}
1	11,37	0,08695
2	9,385	0,09044
3	12,56	0,08710

QUESTION 3 (20 points)

L'éthylène (C_2H_4) est un composé chimique utilisé massivement en milieu industriel, notamment en pétrochimie pour la fabrication de polymères. Il peut également être utilisé pour la synthèse d'éthanol par addition d'eau.

1) Écrivez l'équation de la réaction de formation de l'éthanol gazeux à partir d'éthylène gazeux et de vapeur d'eau.
2) Calculez la chaleur de réaction isobare à 25°C sous 1,00 bar. La réaction est-elle endothermique ou exothermique ? Justifiez.
3) Calculez la chaleur de réaction isochore à 25°C.
4) On suppose que la chaleur libérée à pression constante par la combustion complète d'éthanol liquide est totalement transférée à 500 g de glace à -20°C contenue dans un réacteur. Quel volume d'éthanol à 25 °C faut-il brûler pour porter le contenu du réacteur à la température de 95°C ? La pression de départ dans le réacteur vaut 1,00 bar et est maintenue constante au cours de l'opération. Tous les produits de la combustion de l'éthanol sont gazeux.

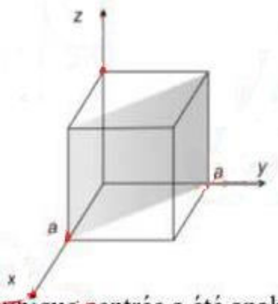
Remarque : l'enthalpie de fusion de la glace à 0°C vaut 6,07 kJ/mol, la chaleur spécifique de la glace 2,092 J/g.K. La masse volumique de l'éthanol à 25 °C vaut 0,789 g.cm^{-3}.

QUESTION 4 (20 points)

L'ion peroxynitrite est un isomère de l'ion nitrate : il possède la même formule moléculaire mais une structure différente. En sachant que le squelette de l'ion peroxynitrite est O-N-O-O, déterminez sa structure de Lewis, l'hybridation de l'atome d'azote et la charge formelle de chaque atome.

Structure de Lewis		
Hybridation de l'azote		Justification :
Charge formelle (numérotez chaque atome d'oxygène dans votre structure de Lewis)	N : O(1) : O(2) : O(3) :	

QUESTION 5 (20 points)



Un métal de structure cristalline cubique centrée a été analysé par diffraction des rayons X. La maille élémentaire et un plan sont schématisés ci-dessus.

Un rayonnement de 6,242 keV a donné, pour le plan représenté, une interférence constructive de premier ordre pour un angle incident de 26,63 degrés.

À partir de ces données et en détaillant vos démarches, déterminez :

1) les indices de Miller du plan de l'image,
2) la longueur d'onde du rayonnement incident,
3) le rayon cristallin d'un atome de cet élément.

Interrogation de chimie de juin 2021 : partie Q1

Question 1 :

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}626.10^{-34} \cdot 2{,}998.10^{8}}{589.10^{-9}} = 3{,}373.10^{-19}\ J$$

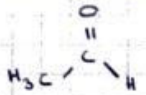
$100\,W = 100\,J/s$ pendant 8h ou 28 800 s

$\Rightarrow 28\,800 \cdot 100 = 2{,}88.10^{6}\ J$

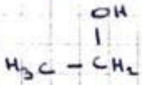
nb de photons : $\dfrac{2{,}88.10^{6}}{3{,}373.10^{-19}} = 8{,}54.10^{24}$ photons

Question 2 :

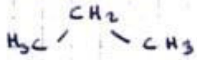
éthanal



éthanol



propane



D D → Keesom ① ← éthanal : μ, $\cancel{LH}$
Di D → Debye ③ ← éthanol : μ, LH
Di Di → London ② ← propane : $\underset{\approx 0}{\mu}$, $\cancel{LH}$

Question 3 :

1) $C_2H_4\,(g) + H_2O\,(g) \rightarrow C_2H_5OH\,(g)$

2) $Q_p = \Delta_r H^\circ_{298K} = -235{,}10 - (-241{,}82 + 52{,}26) = -45{,}54\ kJ/mol$
$\Rightarrow$ exothermique

3) $\Delta H = Q_v + \Delta(PV) \Leftrightarrow Q_v = \Delta H - \Delta(PV)$
$= \Delta H - \Delta(nRT)$
$= \Delta H - RT\,\Delta n_{gaz}$
$\quad \hookrightarrow = 1 - 2 = -1$

$\Rightarrow Q_v = -45{,}54 - 8{,}314.10^{-3} \cdot 298 \cdot (-1)$
$= -43{,}06\ kJ/mol$

4) $C_2H_5OH\,(l) + 3O_2\,(g) \rightarrow 2CO_2\,(g) + 3H_2O\,(g)$

$\Delta_r H^\circ_{298K} = 3 \cdot (-241{,}82) + 2 \cdot (-393{,}51) - (-277{,}69) = -1234{,}79\ kJ/mol$

$Q_p = C_{p,glace} \cdot m \cdot \Delta T_1 + n\,\Delta H^\circ_{fus} + C_{p,eau} \cdot n \cdot \Delta T_2$
$= 2{,}092 \cdot 500 \cdot 20 + \dfrac{500}{18{,}02} \cdot 6{,}07.10^{3} + 75{,}29 \cdot \dfrac{500}{18{,}02} \cdot 95$
$= 387{,}9\ kJ$

$n_{\text{éthanol}} = \dfrac{Q_p}{\Delta_r H^\circ} = 0{,}314\ mol$

$m_{\text{éthanol}} = 0{,}314 \cdot 46{,}07 = 14{,}46\ g$

$V = \dfrac{m}{\rho} = \dfrac{14{,}46}{0{,}789} = 18{,}33\ cm^3$

Question 4

- Structure de Lewis : $\overset{①}{|\bar{O}} = \bar{N} - \overset{②}{\bar{\underline{O}}} - \overset{③}{\bar{\underline{O}}|}\ ]^{-1}$

- hybridation de N : sp^2 car 3 liaisons effectives autour de l'atome N.

- charge formelle :
  - N : 0
  - O(1) : 0
  - O(2) : 0
  - O(3) : −1

Question 5 :

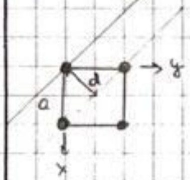
1) $h, k, l \rightarrow h = \frac{1}{x}$; $k = \frac{1}{y}$; $l = \frac{1}{z} \rightarrow \frac{1}{1} = 1$; $\frac{1}{1} = 1$, $\frac{1}{\infty} = 0$

$\Rightarrow (1, 1, 0)$

2) $1\,eV = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,J \rightarrow 6242\,eV = 1{,}000 \cdot 10^{-15}\,J$

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda = \frac{hc}{E} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34} \cdot 2{,}998 \cdot 10^{8}}{10^{-15}}$$
$$= 1{,}99 \cdot 10^{-10}\,m$$

3) $$n\lambda = 2d \sin\theta \Leftrightarrow d = \frac{1{,}99 \cdot 10^{-10}}{2 \cdot \sin 26{,}63°} = 2{,}22 \cdot 10^{-10}\,m$$



$a^2 = d^2 + d^2 = 2d^2 \Leftrightarrow a = \sqrt{2}\,d = 3{,}14 \cdot 10^{-10}\,m$

r : rayon cristallin

$$(4r)^2 = a^2 + (\sqrt{2}\,a)^2 = 3a^2$$
$$\Leftrightarrow r^2 = \frac{3a^2}{16}$$
$$\Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{3}\,a}{4} = 1{,}36 \cdot 10^{-10}\,m$$

EXAMEN CHIM-F101 JANVIER 2022

Partie exercices

ULB

QUESTION 1 *(40 points)* Partie exercice

Soient deux composés liquides (A et B) de formule générique $S_xO_yCl_z$. A a une masse volumique de 1,63 g/cm^3, présente une tension de vapeur de 400 mmHg à 56°C, et contient 59,6 % en masse de chlore. B a une masse volumique de 1,68 g/cm^3, présente une tension de vapeur de 477 mmHg à 56°C et contient 53% en masse de chlore.

a) Sachant que la vapeur de A a une densité de 4,107 par rapport à l'air (masse molaire 28,96 g/mol), et que A et B peuvent être considérés comme des gaz parfaits, quelle est la formule moléculaire de cette substance ?

b) Un mélange idéal à volumes égaux de A (liq) et B(liq) est placé dans une enceinte initialement vide, maintenue à 56°C. Une pression de 437 mmHg s'établit à l'équilibre.

Quelle est la fraction molaire de A dans la phase liquide ?

Quelle est la formule moléculaire de B ?

QUESTION 2 *(30 points)* Partie exercice

Les composés méthylés contenant un hétéroatome tel que O, S, N ou un halogène absorbent entre 167 et 227 nm. Certains de ces composés peuvent également servir à faire une méthylation de l'ammoniac, c'est-à-dire qu'ils peuvent réagir avec l'ammoniac afin de remplacer un ou plusieurs atomes d'hydrogène par un groupement CH_3 suivant les réactions (non équilibrées) :

$$NH_3 + CH_3X \rightarrow H_2N\text{-}CH_3$$

$$H_2N\text{-}CH_3 + CH_3X \rightarrow HN\text{-}(CH_3)_2$$

$$HN\text{-}(CH_3)_2 + CH_3X \rightarrow N\text{-}(CH_3)_3$$

$$N\text{-}(CH_3)_3 + CH_3X \rightarrow N^+\text{-}(CH_3)_4$$

a) Si une solution absorbe un rayonnement ayant une fréquence de $1{,}16.10^{15}\ s^{-1}$, quel composé méthylé contient-elle parmi ceux proposés dans le tableau suivant ?

Composé	λ_{max} (nm)	ε_{max} ($L.cm^{-1}.mol^{-1}$)
CH_3OH	167	1480
$(CH_3)_2O$	184	2520
CH_3Cl	173	200
CH_3I	258	365
$(CH_3)_2S$	229	140
CH_3NH_2	215	600
$(CH_3)_3N$	227	900

b) 250 mL de cette solution ayant une absorbance de 0,858, mesurée dans une cellule dont le chemin optique vaut 4,00 cm, sont mélangés avec 5,00 mL d'une solution d'ammoniac 25% en masse. Quelles seront les espèces présentes en solution à la fin de la réaction et leur quantité ?
(Densité ammoniac 25% = 0,892)

QUESTION 3 *(30 points)* Partie exercice

L'aniline ($C_6H_5NH_2$) se présente sous la forme d'un cycle aromatique, comme le benzène, avec une fonction amine greffée sur un des atomes de carbone. C'est un liquide dont la température d'ébullition est de 184,4°C sous 1 atm, et dont la tension de vapeur vaut 400 mmHg à 161,9°C.

a) Calculez l'enthalpie de vaporisation de l'aniline.

b) Le toluène ($C_6H_5CH_3$) présente la même structure que l'aniline, mais la fonction amine est remplacée par un groupe méthyle. Son enthalpie de vaporisation vaut 37 kJ/mol.
Dessinez les deux molécules (aniline et toluène), caractérisez les forces intermoléculaires dans les deux liquides et, sur cette base, justifiez la différence des enthalpies de vaporisation entre les deux liquides.

CHIM-F101 : examen janvier 2022
(Q1)

1. a) Pour 1 mol de A :

59,6 % de Cl => $m_{Cl} = 118,94 \cdot 0,596 = 70,88\ g$
=> 2 Cl vu que Cl = 35, ...

$M_{tot} = 118,96\ g/mol = 2 \cdot M_{Cl} + y \cdot M_O + x \cdot M_S$

=> $\boxed{\begin{matrix} z = 2 \\ y = 1 \\ x = 1 \end{matrix}}$ ⇝ seules solutions possibles.

b) Fraction molaire de A dans la phase liquide :

$P_{tot} = x_A^L \cdot P_A^\circ + x_B^L \cdot P_B^\circ$
$= x_A^L\ P_A^\circ + (1 - x_A^L)\, P_B^\circ$

(=) $437 = x_A^L \cdot 400 + (1 - x_A^L) \cdot 477$

(=) $x_A^L = 0,5195$

Formule moléculaire de B

$$x_A^L = \frac{n_A}{n_A + n_B} = \frac{m_A / M_A}{\frac{m_A}{M_A} + \frac{m_B}{M_B}}$$

↳ mélange à volumes égaux :
100 mL de A → $m_A = 1,63\ g/\cancel{cm^3} \cdot 100\ mL = 163\ g$
100 mL de B → $m_B = 1,68\ g/cm^3 \cdot 100\ mL = 168\ g$

(=) $0,5195 = \dfrac{163/118,94}{\frac{163}{118,94} + \frac{168}{M_B}}$ (=) $M_B = 132,54\ g/mol$

$m_{Cl} = 53\% \cdot 132,54 = 70,24\ g$ => 2 Cl

$M_{tot} = 132,54 = x \cdot M_S + y \cdot M_O + 2 \cdot M_{Cl}$ => $\begin{vmatrix} z = 2 \\ x = 1 \\ y = 2 \end{vmatrix}$

② a) $\nu = \dfrac{c}{\lambda} \iff \lambda = \dfrac{c}{\nu} = \dfrac{3\ 10^8\ 10^9}{1,16 \cdot 10^{15}} = 258\ nm$

$\Rightarrow$ la solution contient du CH_3I

b) $A = \varepsilon \cdot l\ c$

$\Rightarrow C_{CH_3I} = \dfrac{0,858}{365 \cdot 4} = 0,588 \cdot 10^{-3}\ mol/L$

Ammoniac 25% d'ammoniac et 75% d'eau

$m_{solution\ NH_3} = 5,00\ mL \cdot 0,892\ g/mL = 4,46\ g$

$m_{NH_3} = \%_{NH_3} \cdot m_{sol\ NH_3} = 25\% \cdot 4,46 = 1,115\ g$

$n_{NH_3} = \dfrac{m_{NH_3}}{M_{NH_3}} = \dfrac{1,115}{14+3} = 6,56 \cdot 10^{-2}\ mol$

	NH_3 +	CH_3X $\longrightarrow$	H_2N-CH_3 +	HI
	$n_{NH_3} = 6,56 \cdot 10^{-2}\ mol$	$n = c\ V$ $= 0,538\ 10^{-3} \cdot 250\ 10^{-3}$ $= 1,469\ 10^{-4}\ mol$ $\Rightarrow$ limitant	0	0
Fin réaction	$6,56 \cdot 10^{-2}$ $- 1,469 \cdot 10^{-4}$ $= 0,065\ mol$	0	$1,469 \cdot 10^{-4}$ mol	$1,469 \cdot 10^{-4}$ mol

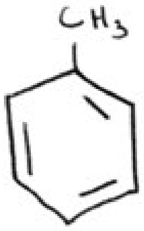
③ a) $\ln\left(\frac{P_1^\circ}{P_2^\circ}\right) = -\frac{\Delta H_{vap}}{R}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)$

↳ $\Delta H_{vap} = -\ln\left(\frac{760}{400}\right) \cdot 8{,}314 \cdot \left(\frac{1}{457{,}55} - \frac{1}{435{,}05}\right)^{-1}$

$= 47210{,}8 \text{ J/mol}$

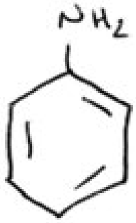
$= 47{,}21 \text{ kJ/mol}$

b)



toluène

DI - DI	1
DP - DP	~0
DP - DI	~0
LH	0



aniline

DI - DI	1
DP - DP	1
DP - DI	1
LH	1

↳ interactions + fortes

=> ΔH_{vap} + élevée

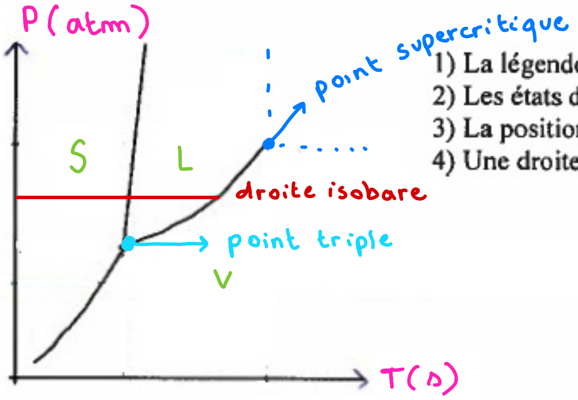
EXAMEN CHIM-F101 JANVIER 2022

Partie théorique

ULB

QUESTION 1 *(20 points)* Théorie

- Sur le diagramme des phases d'un corps pur ci-dessous, indiquez :



1) La légende pour les axes et les unités.
2) Les états de la matière dans les différentes zones du graphique.
3) La position du point triple et celle de la limite supercritique.
4) Une droite isobare traversant seulement deux états différents.
↳ pression constante

L'allure de ce graphique correspond-elle au diagramme de phase du CO_2 ou de H_2O (justifiez en 3 lignes maximum) ?

Déterminez la variance dans les conditions suivantes :

a) Au point triple $V = 1 - 3 + 2 - 0 = 0$

b) Sur la courbe d'équilibre liquide – vapeur $V = 1 - 2 + 2 - 0 = 1$

c) Dans la phase liquide uniquement $V = 1 - 1 + 2 - 0 = 2$

- Ecrivez l'équation mathématique décrivant la courbe d'équilibre solide-gaz, et explicitez chacune des grandeurs. (Soyez précis dans l'écriture des symboles.)

QUESTION 2 *(20 points)* Théorie

(a) Schématisez le diagramme d'orbitales moléculaires d'O_2 pour ses électrons de valence. Veillez à identifier les orbitales atomiques et moléculaires sur votre diagramme, indiquez l'axe d'énergie et remplissez les orbitales avec le bon nombre d'électrons.

$O: 1s^2 \underbrace{2s^2 2p^4}_{6e^- \text{ de valences}}$ donc pour O_2 on a 12 e^- de valences

(b) Écrivez la structure électronique correspondante.

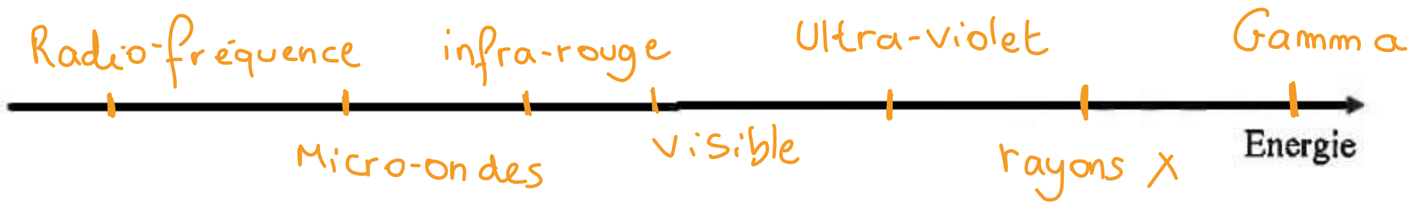
(c) Que vaut l'ordre de la liaison ? (Détaillez votre calcul.)

(d) La molécule de O_2 est-elle para ou diamagnétique ? Justifiez en 2 lignes maximum.

(e) L'ordre de liaison de O_2^+ est-il inférieur, supérieur, ou identique à celui de O_2 ? Justifiez en 2 lignes maximum.

QUESTION 3 *(15 points)* Théorie

Placez dans l'ordre d'énergie croissante, sur l'axe ci-dessous, les rayonnements Visible (Vis), Infrarouge (IR), Ultraviolet (UV), microonde (MO), X (RX), radiofréquence (RF) et gamma (γ).



Attention ⚠

On vous demande l'énergie donc $E = h\frac{c}{\lambda}$

Ainsi, + λ est grand => + l'E est petite

QUESTION 4 *(15 points)* théorie

a) Pour une solution idéale A-B, établissez mathématiquement la relation entre la fraction molaire de A en phase vapeur et la fraction molaire de A en phase liquide.

b) Si A est plus volatil que B, sa fraction molaire en phase vapeur est-elle supérieure inférieure, ou égale à celle de A en phase liquide ? (Entourez la bonne réponse et justifiez.)

QUESTION 5 (15 points) Théorie

QCM: Entourez la bonne réponse. Attention, une mauvaise réponse peut entraîner des points négatifs.

5.1. Le fer présente, à température ambiante, une maille cubique centré, représentée par l'Atomium à Bruxelles. Combien d'atomes comporte cette maille ?
- 9
- 2
- 4

5.2.
Dans l'équation de Bragg ($n\lambda = 2d\sin\theta$), utilisée en diffraction de rayons X, d représente :
- le diamètre des atomes
- la distance entre deux atomes
- la distance entre deux plans
- le diamètre du faisceau de rayons X

5.3.
Un interstice octaédrique est l'espace libre situé entre :
- 3 atomes
- 4 atomes
- 6 atomes
- 8 atomes

5.4. À molalité égale, quel sel abaisse le plus le point de congélation de l'eau ?

- chlorure de sodium
- chlorure de calcium
- nitrate d'ammonium
- chlorure de fer(III)

5.5. Le Césium se trouve dans la première colonne du tableau périodique, à la 6^{ième} ligne. Comparé à l'azote,
- son rayon atomique est plus petit et son énergie de première ionisation est plus petite
- son rayon atomique est plus grand et son énergie de première ionisation est plus petite
- son rayon atomique est plus petit et son énergie de première ionisation est plus grande
- son rayon atomique est plus grand et son énergie de première ionisation est plus grande

Théorie

QUESTION 6 *(15 points)*

Pourquoi le CO_2 est-il un gaz à effet de serre alors qu'il ne présente pas de moment dipolaire permanent ? Justifiez en trois lignes (éventuellement avec des schémas).

EXAMEN CHIM-F101 JUIN 2022 (Q2)

Partie exercices

ULB

① CHIMIE
Q2 2022
EXERCICES p. 1
/20

Écrivez les équations (ioniques nettes s'il y a lieu) des réactions qui se produisent si on mélange les substances suivantes. Indiquez de quel type de réaction il s'agit (oxydo-réduction, acido-basique, précipitation, substitution, autre, ...). Calculez la constante d'équilibre de chaque réaction et justifiez les unités.

ⓐ Bromure d'hydrogène (aq) et carbonate de magnésium (s) à 25°C

ⓑ Permanganate de potassium (aq) et hypochlorite de sodium (aq) en milieu basique à 25°C

ⓒ Méthane (g) et dichlore (g) pour former $CHCl_3$ et HCl (g) à 55°C, sachant que le point d'ébullition standard de $CHCl_3$ est de 61°C (négligez les éventuelles variations d'enthalpie et d'entropie avec la température).

ⓓ Quelle est l'enthalpie libre standard de vaporisation de $CHCl_3$ à 25°C ?

CHIMIE
Q2 2022
EXERCICES p. 2

② /20

La constante d'équilibre de la réaction suivante vaut 0,090 à 25°C : $H_2O(g) + Cl_2O(g) \rightleftharpoons 2HClO(g)$. L'enthalpie libre standard de formation de Cl_2O vaut 97,9 kJ/mol à 25°C

ⓐ Calculez les valeurs (à 25°C) de l'enthalpie libre standard de réaction et de l'enthalpie libre standard de formation de l'hypochlorite d'hydrogène (gazeux).

ⓑ Calculez la composition (en fraction molaire) du mélange à l'équilibre si on part quantités $H_2O(g)$ et $Cl_2O(g)$

ⓒ Quel serait l'effet d'une augmentation de la pression totale sur la composition à l'équilibre ? (Justifiez votre réponse)

ⓓ Uniquement pour les étudiants qui ont suivi le module 2 :
Si l'on dissout l'hypochlorite d'hydrogène dans une solution à pH bas ($\ll 5$) Quelle réaction a lieu ?

Soit la pile suivante :

CHIMIE
Q2 2022
EXERCICES p. 3
(3)
/20

$Ag(s) \mid AgBr(s),\ [Br^-] = 0{,}1\ \frac{mol}{L} \mid [XO_3^-] = 0{,}1\ \frac{mol}{L},\ [XO_4^-] = 0{,}05\ \frac{mol}{L},\ pH = 4 \mid Pt(s)$

(a) Écrivez les équations des réactions anodique, cathodique et globale.

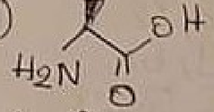
(b) En sachant que la force électromotrice de cette pile est de 0,822 V, déterminez par calcul la nature de l'élément X.

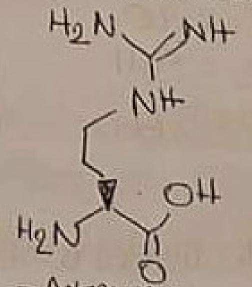
CHIMIE
Q2 2022
EXERCICES p.4

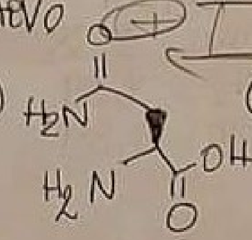
(4) Les chercheurs doivent réaliser l'électrophorèse d'un échantillon comprenant un mélange de 8 acides aminés. En utilisant une solution tampon de $pH = 6$, ils observent la migration de 6 acides aminés vers la borne négative. En réitérant l'expérience avec une solution de $pH = 3,50$ 2 acides aminés migrent vers la borne positive

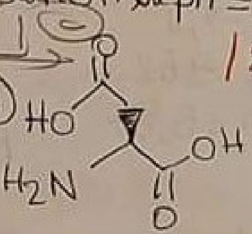
(+) (-)

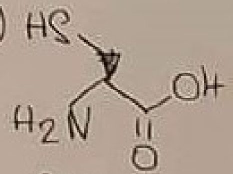
/20

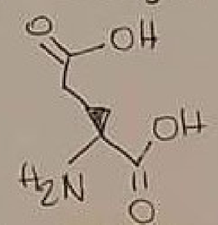
(1)

L-Alanine
$pKa_1 = 2,34$
$pKa_2 = 9,69$
$pH_{iso} = 6,01$

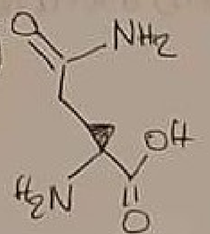
(2)

L-Arginine
$pKa_1 = 2,17$
$pKa_2 = 9,04$
$pH_{iso} = 10,8$

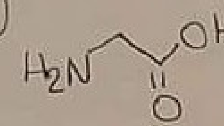
(3)

L-Asparagine
$pKa_1 = 2,02$
$pKa_2 = 8,08$
$pH_{iso} = 5,41$

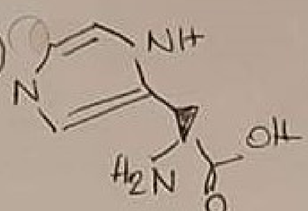
(4)

L-Acide aspartique
$pKa_1 = 2,19$
$pKa_2 = 9,60$
$pH_{iso} = 2,77$

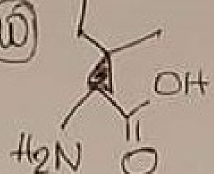
(5)

L-Cystéine
$pKa_1 = 1,96$
$pKa_2 = 8,18$
$pH_{iso} = 5,07$

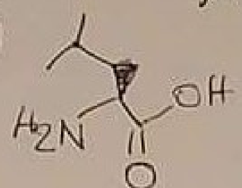
(6)

L-acide glutamique
$pKa_1 = 2,19$
$pKa_2 = 9,67$
$pH_{iso} = 3,22$

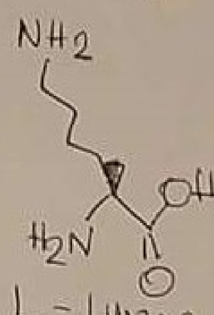
(7)

L-Glutamine
$pKa_1 = 2,17$
$pKa_2 = 9,13$
$pH_{iso} = 5,65$

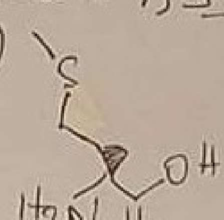
(8)

L-Glycine
$pKa_1 = 2,35$
$pKa_2 = 9,60$
$pH_{iso} = 5,97$

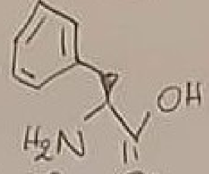
(9)

L-Histidine
$pKa_1 = 1,82$
$pKa_2 = 9,17$
$pH_{iso} = 7,59$

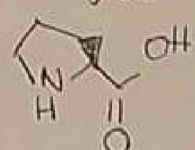
(10)

L-Isoleucine
$pKa_1 = 2,36$
$pKa_2 = 9,68$
$pH_{iso} = 6,02$

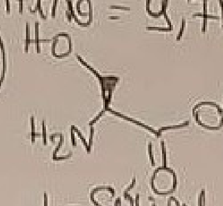
(11)

L-Leucine
$pKa_1 = 2,36$
$pKa_2 = 9,60$
$pH_{iso} = 5,98$

(12)

L-Lysine
$pKa_1 = 2,18$
$pKa_2 = 8,95$
$pH_{iso} = 9,74$

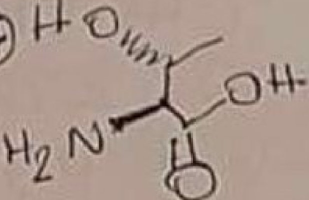
(13)

L-Méthionine
$pKa_1 = 2,28$ pH_{iso}
$pKa_2 = 9,21$ $= 5,74$

(14)

L-Phénylalanine
$pKa_1 = 1,83$ pH_{iso}
$pKa_2 = 9,13$ $= 5,48$

(15)

L-Proline
$pKa_1 = 1,99$ pH_{iso}
$pKa_2 = 10,96$ $= 6,48$

(16)

L-Sérine
$pKa_1 = 2,21$ pH_{iso}
$pKa_2 = 9,15$ $= 5,68$

(17)



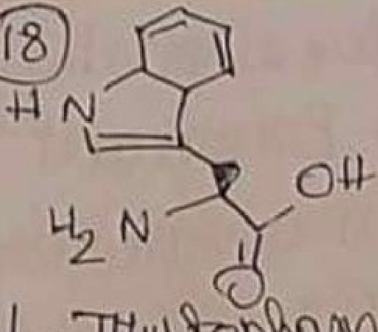
L-thréonine

$pKa_1 = 2,11$

$pKa_2 = 9,62$

$pH_{iso} = 5,87$

(18)



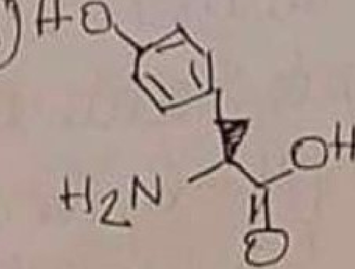
L-Tryptophane

$pKa_1 = 2,38$

$pKa_2 = 9,39$

$pH_{iso} = 5,89$

(19)



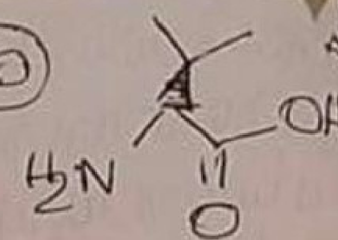
L-Tyrosine

$pKa_1 = 2,20$

$pKa_2 = 9,11$

$pH_{iso} = 5,66$

(20)



L-Valine

$pKa_1 = 2,32$

$pKa_2 = 9,62$

$pH_{iso} = 5,97$

(a) Identifiez, sur base du tableau ci-dessus, les acides aminés contenus dans le mélange (+ justification)

(b) Proposez sur base de vos tables de constantes, un ensemble de réactifs permettant la préparation d'une solution tampon de pH = 3,50 ainsi que les quantités (relatives) à utiliser.

≠ réaction $A(g) \rightarrow B(g) + 2C(g)$ a été étudiée à 25°C. En partant de A pur et en suivant la variation de la pression totale au cours du temps, les résultats suivants ont été obtenus: CHIMIE Q2 2022 EXERCICES P. 5 ⑤ /20

Temps (s)	0	20	50	100	180
Pression totale (atm)	1,000	1,659	2,266	2,729	2,945

ⓐ A partir de ce tableau, déterminez graphiquement l'ordre de la réaction directe et la valeur de la constante cinétique

ⓑ Après combien de temps la pression totale sera-t-elle égale à 2,0 atm?

Exercice 1 :

a) $2HBr_{(aq)} + MgCO_{3\,(s)} \rightleftharpoons H_2CO_{3\,(aq)} + MgBr_2$

acide base : $\cancel{C}O_3^{2-} + H_3O^+ \rightleftharpoons H_2O_{(l)} + HCO_{3\,(aq)}^-$ $\quad \frac{1}{Ka_2} = 1{,}78\ 10^{10}$

Précipitation : $MgCO_{3\,(s)} \rightleftharpoons Mg^{2+}_{(aq)} + \cancel{C}O_{3\,(aq)}^{2-}$ $\quad Ks = 6{,}82.10^{-6}$

$$MgCO_{3\,(s)} + H_3O^+_{(aq)} \rightleftharpoons HCO_3^- + Mg^{2+} + H_2O_{(l)}$$

$$K = \frac{[HCO_3^-][Mg^{2+}]}{[H_3O^+]} = \frac{Ks}{Ka_2} = 1{,}2.10^5$$

b) $ClO^-_{(aq)} + H_2O_{(l)} + 2e^- \rightleftharpoons Cl^-_{(aq)} + 2OH^-_{(aq)}$ $\quad \times 2$

$MnO_4^- + 2H_2O_{(l)} + 3e^- \rightleftharpoons MnO_{2\,(s)} + 4OH^-_{(aq)}$ $\quad \times 3$ $\quad 6e^-$

$E° = 0{,}890\,V$

$E° = 0{,}595\,V$

$$2MnO_{2\,(s)} + \cancel{8OH^-}\ 2OH^-_{(aq)} + 3ClO^-_{(aq)} + \cancel{3H_2O} \rightleftharpoons 2MnO^-_{4\,(aq)} + \cancel{4}H_2O_{(l)} + 3Cl^-_{(aq)} + \cancel{6OH^-}_{(aq)}$$

On a ici une Redox ! $K = \exp\left(\frac{n.F.\Delta E}{R.T}\right) = \exp\left(\frac{6\ 96485.(0{,}890 - 0{,}595)}{8{,}314\ .\ 298}\right)$

$K = 8{,}63.10^{29}$

c) $$CH_{4\,(g)} + 3Cl_{2\,(g)} \rightleftharpoons CHCl_{3\,(g)} + 3HCl_{(g)}$$

$6e^-$ $\quad 3e^-$

On a encore une Redox !

$K = \exp\left(\frac{\Delta S°}{R}\right) . \exp\left(\frac{-\Delta H}{RT}\right) = \exp\left(\frac{-\Delta G°}{RT}\right)$

$\Delta H° = 3(-92{,}3) - 103 + 74{,}81 - 3.0 = -305{,}22$ KJ/mol

$\Delta S° = 3.186{,}79 + 295{,}7 - 186{,}15 + 3.222{,}96 = 1338{,}8$ J/mol.K

$\Delta G_{328K} = -305{,}22.10^3 - 328{,}15 . 1338{,}8 = -744547{,}22$

$K = \exp\left(\frac{-\Delta G°}{RT}\right) = e^{277}$

d) $CHCl_{3\,(l)} \rightleftharpoons CHCl_{3\,(g)}$

On a une vaporisation !

$\Delta G° = -70{,}4 - (-73{,}7) = 3{,}3$ KJ/mol

Exercice 2 :

$H_2O(g) + Cl_2O(g) \rightleftarrows 2HClO(g)$

$\Delta_f G^\circ_{Cl_2O} = 97,9$ kJ/mol

$K = 0,09$

a) $K = \exp\left(-\frac{\Delta G^\circ}{RT}\right) \Leftrightarrow \ln K = -\frac{\Delta G^\circ}{RT}$

$\Leftrightarrow \Delta_r G^\circ = -\ln(K) . RT = -\ln(0,09) . 8,314 . 298,15$

$= 5968,86$ J/mol

$= 6$ kJ/mol

$\Delta_r G^\circ = \sum n_p \Delta_f G^\circ(\text{prod}) - \sum n_r \Delta_f G^\circ(\text{réa})$

$\Leftrightarrow 6 = 2 . \Delta_f G^\circ_{HClO} - \Delta_f G^\circ_{Cl_2O} - \Delta_f G^\circ_{H_2O}$

$\Leftrightarrow \Delta_f G^\circ_{HClO} = \frac{6 + 97,9 - 228,59}{2} = -62,36$ kJ/mol

b) * $K = \frac{(2x^2)}{(a-x)^2} \Leftrightarrow 0,09 = \frac{4x^2}{1 - x^2 - 2x} \Leftrightarrow x = 0,13$

* $n_{tot} = a \cancel{-x} + a \cancel{-x} + \cancel{2x}$

$= 2a$

$= 2 . 1 = 2$ mol

* $x_{H_2O} = \frac{a-x}{2a} = \frac{1-x}{2} = 0,43$

$x_{Cl_2O} = x_{H_2O} = 0,43$

$x_{HClO} = 1 - x_{H_2O} - x_{Cl_2O} = 0,13$

c) Aucune modification car K_p ne dépend que de la T°.

d) Formation de $Cl_2(g)$.

Exercice 3 :

a) Anode : $(AgBr_{(s)} + e^- \rightleftharpoons Ag_{(s)} + Br^-) \times 2$ $\quad \mathcal{E}^\circ = 0{,}071\ V$

Cathode : $[XO_4^-]_{(aq)} + 2H^+_{(aq)} + 2e^- \rightleftharpoons [XO_3^-] + H_2O_{(l)}$ $\quad \mathcal{E}^\circ = ?$

$$[XO_4^-]_{(aq)} + 2H^+_{(aq)} + 2Ag_{(s)} \rightleftharpoons [XO_3^-]_{(aq)} + H_2O_{(l)} + 2Ag_{(s)} + 2Br^-_{(aq)}$$

b) f.é.m = 0,822 V

$$E_{anode} = \mathcal{E}^\circ_{anode} - \frac{R.T}{n.F} \ln(0{,}1) = 0{,}071 - \frac{8{,}314 . 298}{2 . 96485} . \ln(0{,}1)$$

$$E_{anode} = 0{,}130\ V$$

$$\Delta E = E_{cath} - E_{an}$$

$$\Rightarrow E_{cath} = \Delta E + E_{an} = 0{,}822 + 0{,}130 = 0{,}952\ V$$

$$\mathcal{E}^\circ_{cath} = E_{cath} + \frac{R.T}{n.F} . \ln\left(\frac{0{,}1}{0{,}05 . 10^{-4}}\right) = 1{,}197\ V$$

C'est donc le chlore

Exercice 4 :

a) Dans le premier mélange ($pH = 6$), les a.a qui migrent vers la borne négative, ont un $pH_{iso} > 6$ ainsi ceux-ci sont : Alanine, Arginine, Histidine, isoleucine, lysine et la proline !
Dans le deuxième mélange ($pH = 3,5$), les a.a migrent vers la borne positive ! Ils ont donc un $pH_{iso} < 3,5$ c'est donc l'acide aspartique et l'acide glutamique

b) $pH = 3,5$

On va prendre l'acide qui a le pKa le plus proche de 3,5
c'est donc l'acide malique avec $Ka_1 = 3,9 \cdot 10^{-4}$ => $pKa = 3,4$
Vérifions notre choix :
$pH = 3,5 \rightarrow [H_3O^+] = 10^{-3,5} = 3,162 \cdot 10^{-4}$

$\frac{[H_3O^+]}{Ka_1} = 0,810$ ✓ $10^{-1} < \frac{cb}{ca} < 10^1$

Exercice 5 :

	$A_{(g)}$ $\rightarrow$	$B_{(g)}$ +	$2C_{(g)}$
i	1	0	0
f	1 - x	x	2x

$$P_{tot} = 1 - x + x + 2x$$
$$= 1 + 2x$$

$$x = \frac{P_{tot} - 1}{2}$$

À 0 s : $x = 0$

À 20 s : $x = \frac{1,659 - 1}{2} = 0,3295$

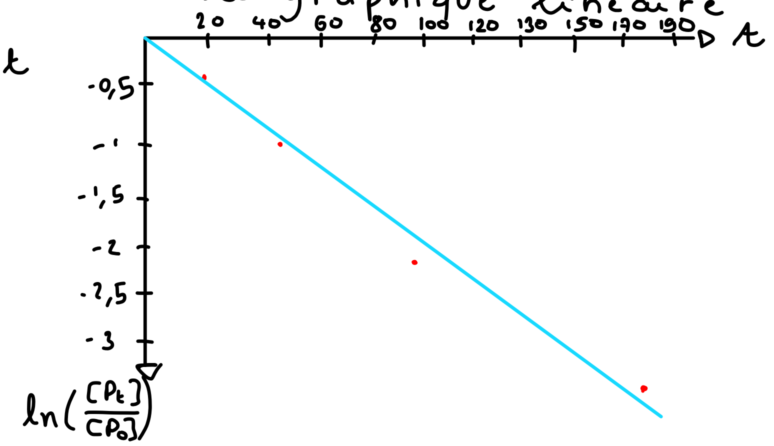
À 50 s : $x = \frac{2,266 - 1}{2} = 0,613$

À 100 s : $x = \frac{2,729 - 1}{2} = 0,8645$

À 180 s : $x = \frac{2,945 - 1}{2} = 0,9725$

Pour savoir l'ordre, il faut trouver le graphique linéaire

Ordre 1 : $\ln\left(\frac{[P_t]}{[P_0]}\right) = -ak.t$



À 20 s : $\ln\left(\frac{1 - 0,3295}{1}\right) = -0,400$

À 50 s : $\ln\left(\frac{1 - 0,613}{1}\right) = -0,95$

À 100 s : $\ln\left(\frac{1 - 0,8645}{1}\right) = -1,99$

À 180 s : $\ln\left(\frac{1 - 0,9725}{1}\right) = -3,59$

La courbe est linéaire donc l'ordre est 1 !

$k = ?$

$$\ln\left(\frac{[P_t]}{[P_0]}\right) = -ak.t$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{-\ln\left(\frac{[P_t]}{[P_0]}\right)}{t} = 1,9.10^{-2}\ s^{-1}$$

b) Pression totale = 2 atm

$$t = \frac{-\ln\left(\frac{[P_t]}{[P_0]}\right)}{k} = \frac{-\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{1,9.10^{-2}} = 34 \text{ secondes}$$

Phys-F104 / 10 crédits

Tu auras aussi ce cours pendant tout ton Q1 et la moitié de ton Q2. Des 3 matières scientifiques, je dirais que c'est le plus abordable. En septembre, les bases sont revues pour que tout le monde soit au même niveau. La matière de toute l'année est plus ou moins similaire à ce qui est généralement vu en secondaire.
Les cours théoriques sont intéressants pour comprendre certains concepts (et fun quand les profs font des expériences) mais pas nécessaires pour réussir car les notes postées par les profs sont selon moi bien complètes. Encore une fois, je te conseille d'aller aux séminaires pour pouvoir résoudre les exos avec les assistant.e.s et comprendre le genre de questions qui pourraient être posées à l'examen :)
D'ailleurs, l'examen (de janvier ou juin) est composé que d'exercices. Pas de théorie donc. D'autant plus que tu auras droit à prendre avec toi une feuille A4 recto verso sur laquelle tu auras écrit à l'avance toutes les formules/tips qui te seront utiles selon toi. À l'exam, essaie de gratter un max de points en écrivant toujours les formules utiles à la résolution de l'exercice, les unités de tes réponses, ton cheminement,... Bref, tout ce qui peut t'aider à gratter quelques points même si tu n'as pas la bonne réponse! Et n'oublie pas le test de novembre qui peut bien t'avancer dans les points aussi!
L'exam de janvier compte pour 2/3 et celui de juin, pour 1/3.
De nouveau pour préparer l'exam, refais un max de séminaires puis d'exams précédents. :)

Cercle des Sciences

Physique 1 PHYS - F104 (2015-2016)
Examen Janvier 2016

8 janvier 2016

Nom :

Prénom :

N° carte d'étudiant :

Cote :

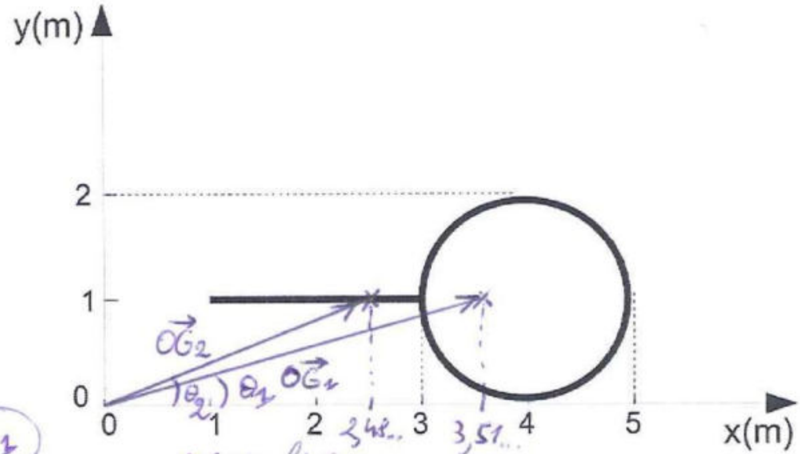
1. Écrivez immédiatement vos nom, prénom, numéro de carte d'étudiant.
2. Ne pas dégrafer les pages.
3. Vous pouvez consulter votre aide mémoire (une feuille A4 recto-verso manuscrite). Celui-ci doit porter votre nom et ne peut être prêté.
4. Les calculatrices ne peuvent être prêtées.
5. Les réponses doivent être clairement justifiées et les unités doivent être indiquées pour les résultats numériques.
6. Vous prendrez $g = 10\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ en cas de besoin.

1. (4pts) On considère un objet rigide et homogène formé d'un anneau de masse M et d'une tige de masse $m = \pi M$ (voir figure).

   (a) calculer la coordonnée en x du centre de masse.

   (b) calculer la coordonnée en y du centre de masse.

   (c) représenter le centre de masse sur la figure et calculer le module du vecteur $\vec{OG} = (G_x, G_y)$ ainsi que l'angle que fait ce vecteur avec l'axe $(O, \vec{x})$.



Centre de masse de la tige en (2, 1) car elle est homogène.

Centre de masse de l'anneau en (4, 1) car homogène.

Version 1

→ masse linéique (kg/m)

Homogène : $m_{tige} = 2 \cdot \lambda$

$m_{an.} = 2\pi \cdot \lambda$

(a) $$\boxed{G_x} = \frac{m_{tige} \cdot 2 + m_{an} \cdot 4}{m_{tige} + m_{an}} = \frac{(2 \cdot \lambda) \cdot 2 + (2\pi \cdot \lambda) \cdot 4}{2\lambda + 2\pi \cdot \lambda} = \frac{2 + 4\pi}{1 + \pi} = \boxed{3,5170933 \ldots m}$$

(b) $$\boxed{G_y = \frac{m_{tige} \cdot 1 + m_{an.} \cdot 1}{m_{tige} + m_{an.}} = 1\ m}$$

(c) $\vec{OG_1} = (3,517093 \ldots m, 1\ m)$

$$\boxed{\|\vec{OG}\| = 3,65694237 \ldots m}$$

$$\vec{OG} \cdot \vec{1_x} = \|\vec{OG}\| \cdot \|\vec{1_x}\| \cdot \cos(\theta)$$

$$\Leftrightarrow \theta = \arccos\left(\frac{\vec{OG} \cdot \vec{1_x}}{\|\vec{OG}\| \cdot \|\vec{1_x}\|}\right)$$

$$\boxed{\theta_1 = 15,871815 \ldots {}^\circ}$$

Version 2

$m_{tige} = \pi M$

$m_{an.} = M$

(a) $$\boxed{G_x} = \frac{m_{tige} \cdot 2 + m_{an} \cdot 4}{m_{tige} + m_{an}} = \frac{2\pi + 4}{\pi + 1} = \boxed{2,48290614 \ldots m}$$

(b) $$\boxed{G_y} = \frac{m_{tige} \cdot 1 + m_{an.} \cdot 1}{m_{tige} + m_{an.}} = \boxed{1\ m}$$

(c) $\vec{OG_2} = (2,48290614 \ldots m, 1\ m)$

$$\boxed{\|\vec{OG}\| = 2,67671856 5 \ldots m}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{OG} \cdot \vec{1_x}}{\|\vec{OG}\| \cdot \|\vec{1_x}\|}\right)$$

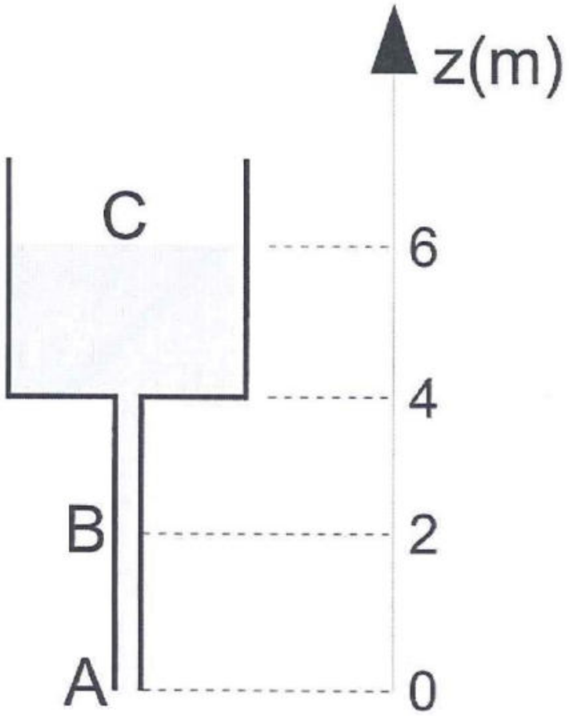
$$\boxed{\theta_2 = 21,93730175 \ldots {}^\circ}$$

2. (4pts) Un réservoir ouvert contient un liquide incompressible et non-visqueux dont la section est très grande par rapport à la section du tuyau (le point C à la surface de l'eau reste au même niveau). La masse volumique du liquide est de $10^3 \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. Que vaut la pression aux points A et B si

(a) le tuyau est bouché au point A.

(b) le liquide s'écoule (tuyau est ouvert au point A).

Pour $P_{atm} = 10^5$ Pa



(a) $P_A = P_{atm} + \rho g h_A$

$= P_{atm} + 10^3 . 10 . 6$ Pa

$\boxed{P_A = 1,6 . 10^5 \text{ Pa}}$

$P_B = P_{atm} + \rho g h_B$

$= P_{atm} + 10^3 . 10 . 4 . \text{Pa}$

$\boxed{P_B = 1,4 . 10^5 \text{ Pa}}$

(b) on a : $\underbrace{P_C}_{= P_{atm}} + \frac{1}{2}\rho \underbrace{v_C^2}_{= 0 \text{ m/s}} + \rho g z_C = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g z_B$

(car réservoir de très grande section en C par rapport à B ou A)

on utilise : $\underbrace{P_A}_{= P_{atm}} + \frac{1}{2}\rho V_A^2 + \rho g \underbrace{z_A}_{= 0} = \underbrace{P_C}_{= P_{atm}} + \frac{1}{2}\rho \underbrace{v_C^2}_{= 0} + \rho g z_C$

$\Leftrightarrow V_A = \sqrt{2 g z_C}$ et par l'équation de continuité :

$S_A V_A = S_B V_B$, comme $S_A = S_B \Rightarrow V_B = V_A$

$\Leftrightarrow P_{atm} + \rho g z_C = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g z_B$

$\Leftrightarrow P_{atm} + \cancel{\rho g z_C} = P_B + \cancel{\rho g z_C} + \rho g z_B$

$\Leftrightarrow \boxed{P_B = P_{atm} - \rho g z_B = P_{atm} - 2 . 10^4 \text{ Pa} = 0,8 . 10^5 \text{ Pa}}$

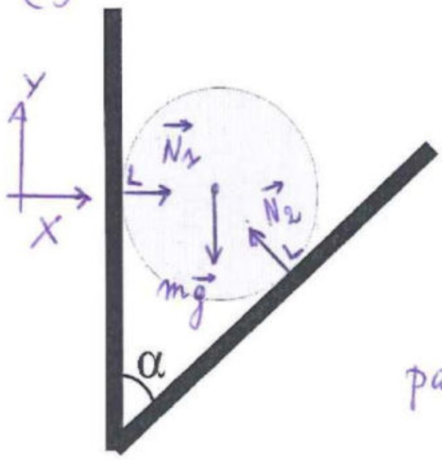
$\boxed{P_A = P_{atm} = 10^5 \text{ Pa}}$

3. (3pts) Une sphère de masse $m = 2$kg est coincée entre deux plans comme indiqué sur la figure. La sphère est en équilibre statique, avec $\alpha = 45°$. En négligeant les frottements entre la sphère et les deux plans

   (a) représenter toutes les forces extérieures qui agissent sur la sphère.

   (b) calculer en fonction de l'angle α et de la masse m, la force de réaction de chaque surface, puis effectuer l'application numérique.

(a)



(b) Selon OX : $\overset{0}{\overset{\|}{F_{tot,x}}} = N_1 - N_{2x}$ (1)

Selon OY : $\underset{0}{\underset{\|}{F_{tot,y}}} = N_{2y} - mg$ (2)

par (2) : $N_{2y} = mg \Leftrightarrow \boxed{N_2 = \dfrac{mg}{\cos(\alpha)}}$

par (1) : $N_1 = N_{2x}$

$= N_2 \cdot \sin(\alpha)$

$= \dfrac{mg}{\cos(\alpha)} \cdot \sin(\alpha)$

Remarque : $\cos(\alpha) = \sin(\alpha)$ car $\alpha = 45°$

$\Rightarrow \boxed{N_1 = mg}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} N_1 = 20\,N \\ N_2 = 28{,}2842712\ldots\,N \end{array}}$$

4. (3pts) Les forces $\vec{F_1} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ et $\vec{F_2} = -\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ sont exercées par deux hommes sur un chariot, considéré comme un point matériel. Le chariot se déplace sur un rail rectiligne du point A, défini par le vecteur position $\vec{OA} = 3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ jusqu'au point B, défini par $\vec{OB} = 5\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$.
   (a) déterminez la force $\vec{F_1} + \vec{F_2}$ ainsi que l'angle entre les forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$.
   (b) en négligeant les forces de frottements, quel est le travail effectué par la force $\vec{F_2}$ lors du déplacement de A à B ?

(a) $\vec{F_1} + \vec{F_2} = (\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) + (-\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k})$

$\Rightarrow \boxed{\vec{F_1} + \vec{F_2} = 4N\vec{j} - 2N\vec{k}}$

$\vec{F_1} \cdot \vec{F_2} = \|\vec{F_1}\| \cdot \|\vec{F_2}\| \cos(\theta)$

$\Leftrightarrow \theta = \arccos\left(\frac{\vec{F_1} \cdot \vec{F_2}}{\|\vec{F_1}\| \cdot \|\vec{F_2}\|}\right) = \arccos\left(\frac{4}{6}\right)$

$\Rightarrow \boxed{\theta = 48,189685...^\circ}$

(b) $W = \int_{P_i}^{P_f} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \vec{F_2} \cdot \vec{AB}$

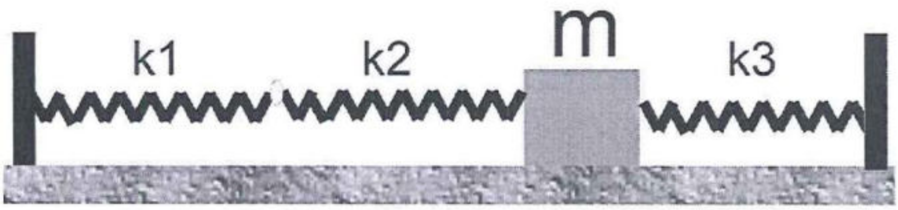
où $\vec{AB} = (5\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}) - (3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = (2\vec{i} + 0\vec{j} + 3\vec{k})$

$\Rightarrow W = (-\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) \cdot (2\vec{i} + 3\vec{k})$

$= -5\ J$

$\Rightarrow \boxed{W = -5\ J}$

5. (3pts) Une masse $m = 5$kg est fixée à deux ressorts de constantes de raideur k_2 et k_3 et peut glisser sans frottement sur le plan horizontal. Un troisième ressort, de constante k_1 est relié au ressort k_2. Les ressorts de raideurs k_1 et k_3 sont attachés aux parois fixes. Initialement, on communique une petite impulsion horizontale à la masse m. Celle-ci est alors animée d'un mouvement d'oscillation harmonique autour de sa position d'équilibre. Sachant que $k_1 = k_2 = 8\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ et $k_3 = 1\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$, calculer la période d'oscillation de la masse m.



Les ressorts 1 et 2 sont en série, donc

$$\frac{1}{k_{12}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \Rightarrow k_{12} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}} = \frac{k}{2} \quad \text{car } k_1 = k_2 = k = 8 N m^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{k_{12} = 4 N m^{-1}}$$

12 et 3 sont en parallèle : $k_{tot} = k_{12} + k_3$

$$\boxed{k_{tot} = 5 N m^{-1}}$$

La période est donnée par : $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{tot}}}$

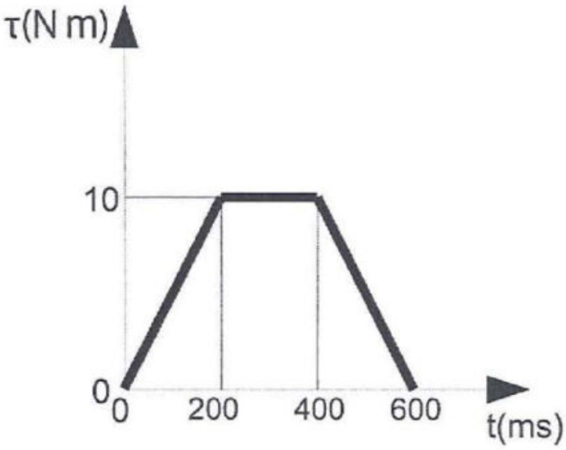
$$= 2\pi \cdot 1 \cdot s$$

$$\Rightarrow \boxed{T = 6{,}283185 \ldots s}$$

6. (3pts) Une fenêtre est initialement immobile. Lorsqu'on applique une force sur cette dernière, elle effectue un mouvement de rotation. Le moment de la force appliquée sur la fenêtre évolue au cours du temps, comme indiqué sur la figure. Le moment d'inertie de la fenêtre autour de son axe est $I = 10\text{kg}\cdot\text{m}^2$.

   (a) Que vaut le moment cinétique de la fenêtre après 400ms ?

   (b) Que vaut la vitesse angulaire de la fenêtre après 400ms ?



(a) $L = \int_0^{400\,ms} \tau \, dt = \int_0^{200\,ms} \tau \, dt + \int_{200\,ms}^{400\,ms} \tau \, dt$

$\Leftrightarrow L = \frac{200\,ms \cdot 10\,Nm}{2} + 200\,ms \cdot 10\,Nm$

$\Rightarrow \boxed{L = 3\ kg\,m^2/s}$

(b) $L = I \cdot \omega$

$\Leftrightarrow \omega = \frac{L}{I}$

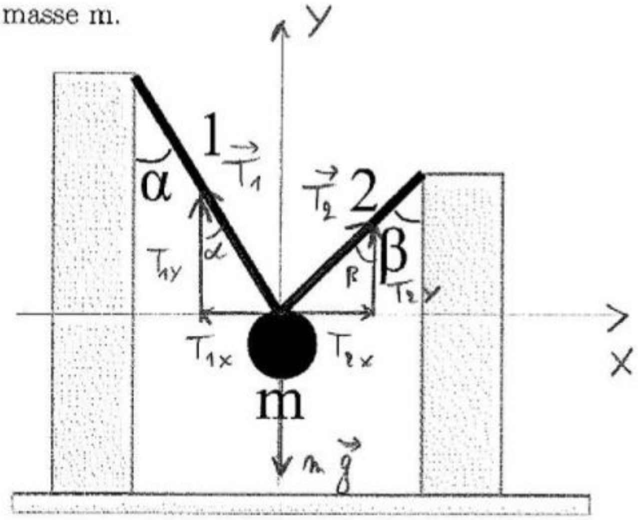
$\Rightarrow \boxed{\omega = 0{,}3\ rad/s}$

1. (3 points) Un objet rigide de masse m est attaché à deux cordes inextensibles et de masse négligeable (voir figure). Le module de la tension dans la corde 1 est $T_1 = 1000$ N et la masse m est en équilibre statique. Les angles sont donnés $\alpha = 45°$ et $\beta = 60°$.

   (a) Représenter toutes les forces extérieures qui agissent sur la masse m et écrire l'équation vectorielle correspondant à l'équilibre statique en fonction des données du problème.

   (b) Calculer la tension T_2 dans la corde 2.

   (c) Calculer la masse m.



$\alpha = 45°$

$\beta = 60°$

$T_1 = 1000\ N$

(a) $\vec{F}_{tot} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + m\vec{g} = \vec{0}$ (équilibre statique)

(b) Axe X: $0 = T_{2x} - T_{1x} \Leftrightarrow 0 = T_2 \sin(\beta) - T_1 \sin(\alpha)$ (1)

Axe Y: $0 = T_{1y} + T_{2y} - mg \Leftrightarrow 0 = T_1 \cos(\alpha) + T_2 \cos(\beta) - mg$ (2)

par (1) : $T_2 = \left(\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}\right) T_1 \Leftrightarrow \boxed{T_2 = 816{,}49658\ldots\ N}$

(c) par (2) : $m = \frac{T_1 \cos(\alpha) + T_2 \cos(\beta)}{g} = \frac{T_1 \cos(\alpha) + T_1 \frac{\sin(\alpha)}{\tan(\beta)}}{g}$

$T_2 = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} T_1$

$\Rightarrow \boxed{m = 111{,}535072\ldots\ kg}$

2. (3 points) Une petite particule est animée d'un mouvement de translation dont la vitesse est donneé par $v(t) = at^2 + b$. La position initiale (à t=0) est $x(0) = 0$ m.

   (a) Sachant que les vitesses à $t = 0$ et à $t = 1$s sont respectivement $v(0s) = 0$ et $v(1s) = -1$ m/s, calculer les constantes a et b et indiquer leurs unités.

   (b) Calculer l'accélération de la particule à t=0s et à t=2s.

   (c) Calculer la postion de cette particule à l'instant t=2s.

(a) $v(t) = at^2 + b$

$$\begin{cases} v(0) = b = 0 & \Rightarrow \\ v(1) = a + 0 = -1\,m/s & \Rightarrow \end{cases} \quad \boxed{\begin{array}{l} b = 0\,m/s \\ a = -1\,m/s^3 \end{array}}$$

(b) $a(t) = \dfrac{dv(t)}{dt} = -2t \Rightarrow \boxed{a(t) = -2t}$

$$\boxed{\begin{array}{l} a(0) = 0\,m/s^2 \\ a(2s) = -4\,m/s^2 \end{array}}$$

(c) $v(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} \Leftrightarrow \displaystyle\int_{t_i}^{t_f} v(t)\,dt = \int_{x_i}^{x_f} dx$

$$\Rightarrow (x_f - x_i) = \int_{t_i}^{t_f} -t^2\,dt = -\left[\frac{t^3}{3}\right]_{t_i}^{t_f} = -\left(\frac{\overset{2}{t_f^3}}{3} - \frac{\overset{0}{t_i^3}}{3}\right)$$

$$= -\frac{2^3}{3} = -\frac{8}{3}\,m$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t = 2s) = -\frac{8}{3}\,m = -2,666...\,m}$$

3. (4 points) La Lune effectue un mouvement circulaire stable autour de la Terre. Le rayon de cette orbite (séparant les deux centres de masse) est de $384 \cdot 10^3$ km. La masse de la Terre est donnée par $m_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg. La constante de gravitation universelle vaut $G=6,67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$. Trouver :
   (a) la vitesse de la Lune.
   (b) sa période de révolution autour de la Terre.
   (c) le rayon de l'orbite d'un satellite en orbite géostationnaire (de période de révolution 24 heures) autour de la Terre.

$R_{TL} = 384 \cdot 10^3 \, km = 384 \cdot 10^6 \, m$ | $M_T = 6 \cdot 10^{24} \, kg$

$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \, N \, m^2 \, kg^{-2}$

(b) $$\frac{R_{TL}^3}{T_L^2} = \frac{G M_T}{4\pi^2} \Leftrightarrow T_L = \sqrt{\frac{4\pi^2 R_{TL}^3}{G M_T}}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_L = 2\,363\,405,07... \, s \simeq 27 \text{ jours}}$$

(a) $d = 2\pi R_{TL}$

$t = T_L$

$$\Rightarrow V_L = \frac{d}{t} = \frac{2\pi R_{TL}}{T_L}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_L = 1020,87 \, m/s}$$

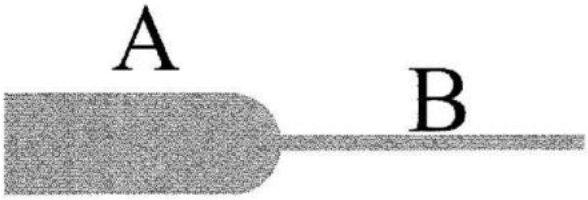
(c) $$\frac{R_{TS}^3}{T_S^2} = \frac{G M_T}{4\pi^2} \Leftrightarrow R_{TS} = \sqrt[3]{\frac{G M_T T_S^2}{4\pi^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{R_{TS} = 42,2875... \cdot 10^6 \, m}$$

4. (4 points) On considère l'écoulement d'un liquide incompressible et non-visqueux dans un tuyau dont la section droite en A est $S_A = 5\text{cm}^2$ et $S_B = 1\text{cm}^2$ en B. Le débit de l'écoulement dans ce tuyau est de $10^{-4}\text{m}^3/\text{s}$, la pression au point A est de $P_A = 15$ kPa et la masse volumique du liquide est de $10^3 kg/m^3$.

   (a) Que valent les vitesses aux points A et B ?

   (b) Que vaut la pression au point B ?



$S_A = 5\ \text{cm}^2 = 5.10^{-4}\ m^2$ | $S_B = 1\text{cm}^2 = 10^{-4}\ m^2$

$P_A = 15\ k\text{Pa} = 15.10^3\ \text{Pa}$

$D = 10^{-4}\ m^3/s$

(a) $V_A S_A = V_B S_B = D \Rightarrow V_A = \frac{D}{S_A} = \frac{10^{-4}}{5.10^{-4}} = 0{,}2\ m/s$

$V_B = \frac{D}{S_B} = \frac{10^{-4}}{10^{-4}} = 1\ m/s$

$\Rightarrow \boxed{V_A = 0{,}2\ m/s \text{ et } V_B = 1\ m/s}$

(b) $P_A + \frac{1}{2}\rho V_A^2 + \cancel{\rho g z_A} = P_B + \frac{1}{2}\rho V_B^2 + \cancel{\rho g z_B}$

car $z_A = z_B$

$\Rightarrow P_B = P_A + \frac{1}{2}\rho(V_A^2 - V_B^2) = 15.10^3 + \frac{1}{2}.10^3(0{,}2^2 - 1^2)$

$\Rightarrow \boxed{P_B = 1{,}452.10^4\ \text{Pa}}$

5. (3 points) Une masse m_A se déplace avec une vitesse $\vec{v_A} = (0, -2)$m/s. Elle rentre en collision avec une masse m_B dont la vitesse est $\vec{v_B} = (1, 0)$m/s. Après la collision, les deux masses restent accrochées l'une à l'autre. Sachant que la vitesse de l'ensemble formé par les deux masses après la collision vaut $\vec{v'} = (v'_x, -1)$ m/s :

   (a) que vaut le rapport des masses m_A/m_B ?

   (b) que vaut la composante v'_x de la vitesse de l'ensemble des deux masses après le choc ?

   (c) calculer l'angle α entre le vecteur vitesse et l'axe Ox après le choc.

   (d) calculer la quantité d'énergie dissipée lors de cette collision si $m_A = m_B = 5$kg.

$\vec{V_A} = (0, -2)$ m/s | $\vec{V}' = (V_x', -1)$ m/s

$\vec{V_B} = (1, 0)$ m/s

$$\vec{P_i} = \vec{P_f} \Rightarrow m_A \vec{V_A} + m_B \vec{V_B} = (m_A + m_B)\vec{V}'$$

(a) Axe X : $m_B \underbrace{V_{B,x}}_{=1} = (m_A + m_B) V_x'$ (1)

Axe Y : $m_A(-2) = (m_A + m_B)(-1)$ (2)

$$\Leftrightarrow 2m_A = m_A + m_B$$

$$\Leftrightarrow m_A = m_B$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{m_A}{m_B} = 1}$$

(b) par (1) : $V_x' = \dfrac{m_B}{m_A + m_B} = \dfrac{1}{2}$ m/s $\Rightarrow \boxed{V_x' = 0{,}5 \text{ m/s}}$

(c) $\vec{V}' \cdot \vec{1_x} = \|\vec{V}'\| \, \|\vec{1_x}\| \cos(\alpha) \Leftrightarrow \alpha = \arccos\left(\dfrac{V_x' \cdot 1 + 0}{\sqrt{0{,}5^2 + 1^2} \cdot 1}\right)$

$$\Rightarrow \alpha = 63{,}434948...°$$

(d) $\Delta E_c = E_{cf} - E_{ci} = \dfrac{1}{2}(m+m)\left(\sqrt{0{,}5^2 + 1^2}\right)^2 - \dfrac{1}{2} m (2)^2 - \dfrac{1}{2} m (1)^2$

$= m\left((0{,}5^2 + 1^2) - 2 \cdot \dfrac{1}{2}\right) = -6{,}25$ J $\Rightarrow \boxed{\text{én. dissipée} = 6{,}25}$

6. (3 points) On consière un ballon sphérique de masse M et de rayon R. Son moment d'inertie est donné par $I = 2MR^2/5$. On lui communique une vitesse angulaire initale ω_0 à t=0. Le ballon effectue un mouvement de rotation autour de son centre de masse (voir figure). Le coefficient de frottement $\mu_s = \mu_d = \mu$ est identique pour le mur et pour le sol. On demande de

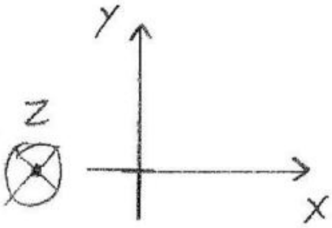
(a) représenter sur le schéma toutes les forces qui agissent sur le ballon.

(b) établir les relations entre les forces exprimant le fait que le centre de masse du ballon est immobile (équilibre de translation).

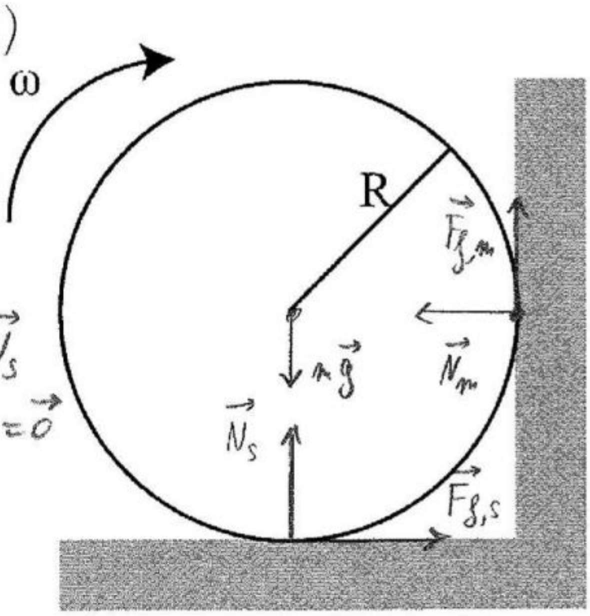
(c) établir l'expression des forces de réaction.

(d) établir l'expression de l'accélération angulaire de ce ballon.

(e) établir l'expression donnant le temps nécessaire à l'arrêt du ballon.



(a)



$I = \frac{2}{5} MR^2$

$\mu_s = \mu_d = \mu$

(b) $\vec{F}_{tot} = m\vec{g} + \vec{N}_m + \vec{N}_s + \vec{F}_{f,s} + \vec{F}_{f,m} = \vec{0}$

(c) Axe X : $0 = F_{f,s} - N_m = \mu N_s - N_m \iff \boxed{N_m = \mu N_s}$ (1)

Axe Y : $0 = F_{f,m} + N_s - mg = \mu N_m + N_s - mg$ (2)

par (1) et (2) : $0 = \mu^2 N_s + N_s - mg \iff 0 = N_s(\mu^2+1) - mg$

$$\Rightarrow \boxed{N_s = \frac{mg}{\mu^2+1} \quad \text{et} \quad N_m = \left(\frac{\mu}{\mu^2+1}\right) mg}$$

(d) $\vec{\tau}_{tot} = \vec{\tau}_{fm} + \vec{\tau}_{fs} \Rightarrow$ Axe Z : $I\alpha = -R F_{f,m} - R F_{f,s}$

$$\iff \frac{2}{5} \cancel{m} R^{\cancel{2}} \alpha = -\cancel{R}\frac{\mu^2}{\mu^2+1}\cancel{m} g - \cancel{R}\frac{\mu}{\mu^2+1}\cancel{m} g \Rightarrow \boxed{\alpha = -\frac{5g}{2R}\left(\frac{\mu^2+\mu}{\mu^2+1}\right)}$$

(e) $\omega^{0} = \omega_0 + \alpha . t \Rightarrow t = -\frac{\omega_0}{\alpha} \Rightarrow \boxed{t = \frac{\omega}{\frac{5g}{2R} \cdot \left(\frac{\mu^2+\mu}{\mu^2+1}\right)}}$

Physique 1 PHYS - F104 (2015-2016)
Examen Juin 2016
2eme Partie

10 juin 2016

Nom :

Prénom :

N° carte d'étudiant :

Cote :

1. Écrivez immédiatement vos nom, prénom, numéro de carte d'étudiant.
2. Ne pas dégrafer les pages.
3. Vous pouvez consulter votre aide mémoire (une feuille A4 recto-verso manuscrite). Celui-ci doit porter votre nom et ne peut être prêté.
4. Les calculatrices ne peuvent être prêtées.
5. Les réponses doivent être clairement justifiées et les unités doivent être indiquées pour les résultats numériques.
6. Vous prendrez $g = 10\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ en cas de besoin.

1. (4 Points) L'intensité lumineuse solaire reçue par la Terre est de 1360 W/m^2 et la distance Terre-Soleil est de 150×10^6 km.
(Indication : La relation entre intensité et puissance pour la lumière est la même que pour les ondes sonores.)

(a) Quelle est la puissance du soleil ?

(b) Sachant que la limite de sensibilité d'un oeil est de $5,0 \times 10^{-12}$ W/m^2, à quelle distance minimale du soleil devrait se trouver la Terre pour que nous ne percevions plus sa lumière à l'oeil nu ? Exprimez votre réponse en années-lumière. (1 année-lumière $= 9,5 \times 10^{15}$ m)

(c) Même question que pour le point (b) sauf que nous considérons en plus l'effet de l'atmosphère terrestre, à savoir que 75% de l'intensité solaire est perdue à cause d'elle. Exprimez votre réponse en années-lumière. (1 année-lumière $= 9,5 \times 10^{15}$ m)

(a) $I = \frac{P}{S} \Rightarrow P = I \cdot S = I \cdot (4\pi R_{TS}^2)$

$\Rightarrow \boxed{P = 3,8453... \cdot 10^{26} W}$

(b) $S = \frac{P}{I_{min}} \Leftrightarrow R = \sqrt{\frac{P}{4\pi \cdot I_{min}}} \Rightarrow \boxed{R = 2,47386... \cdot 10^{18} m}$

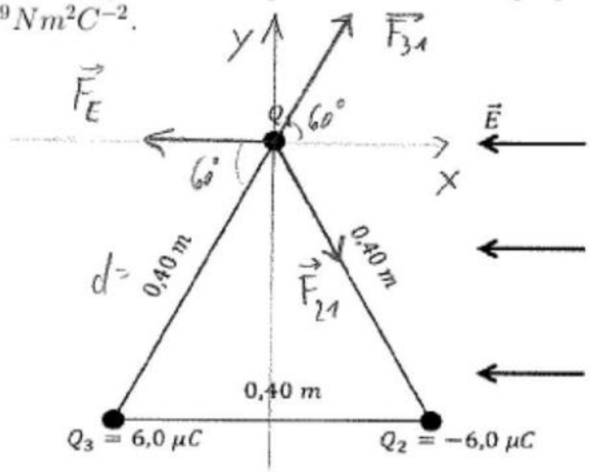
$\Rightarrow \boxed{R = 260,4066... \; AL}$

(c) $\underset{5.10^{-12} W/m^2}{=} I_{min, atm} = 0,25 \cdot I_{min}$

$\Rightarrow R = \sqrt{\frac{P}{4\pi \frac{5.10^{-12}}{0,25}}} = 1,2369... \cdot 10^{18} m$

$\Rightarrow \boxed{R = 130,203356... \; AL}$

2. (3 Points) On place trois particules de masse négligeable et de charges Q_1, $Q_2 = -6,0\ \mu C$, $Q_3 = 6,0 \mu C$ aux sommets d'un triangle équilatéral dont les côtés mesurent $0,40\ m$. Elles sont plongées dans un champ électrique horizontal uniforme dirigé vers la gauche dont la norme vaut $3,375 \times 10^5\ V/m$. Quelle est la force totale agissant sur Q_1 sachant que c'est une charge positive non-nulle ? Prenez $k = 9,0 \times 10^9 Nm^2C^{-2}$.



$$\|\vec{F}_{31}\| = \frac{k|q_1||q_3|}{d^2}$$

$$\|\vec{F}_{21}\| = \frac{k|q_1||q_2|}{d^2}$$

Axe Y : $F_{tot,y} = F_{31,y} - F_{21,y}$

$$= F_{31} \sin(60°) - F_{21} \sin(60°)$$

$$= \frac{k|q_1||q_3|}{d^2} \sin(60°) - \frac{k|q_1||q_2|}{d^2} \sin(60°)$$

$$= \frac{k|q_1|}{d^2} \sin(60°) \cdot (|q_3| - |q_2|) = 0\ N$$

$$\Rightarrow \boxed{F_{tot,y} = 0 N}$$

Axe X : $F_{tot,x} = F_{31,x} + F_{21,x} - |q_1||E|$

$$= \frac{k|q_1||q_3|}{d^2} \cos(60°) + \frac{k|q_1||q_2|}{d^2} \cos(60°) - |q_1||E|$$

car $|q_2| = |q_3| = q$ $\quad = |q_1| \cdot \left(\frac{2kq \cos(60°)}{d^2} - |E| \right)$

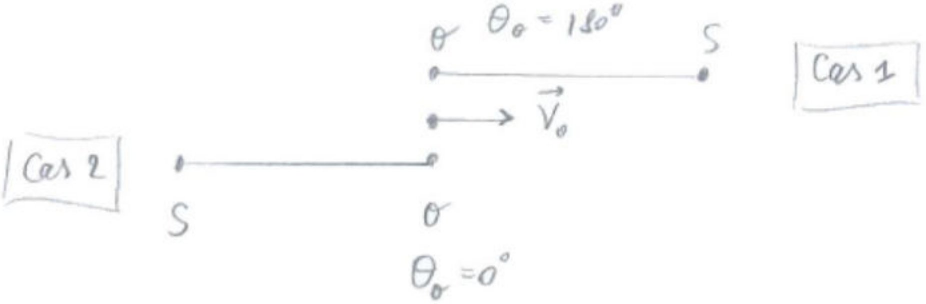
$$= |q_1| \cdot (3,375.10^5 - 3,375.10^5)$$

$$= 0\ N$$

$$\Rightarrow \boxed{F_{tot,x} = 0 N}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{tot} = (0,0)\ N}$$

3. (4 Points) Deux haut-parleurs se font face aux deux bouts d'un long corridor. Les haut-parleurs sont reliés à la même source qui produit un signal sinusoïdal de 440 Hz. Une personne marche d'un haut-parleur à l'autre à la vitesse constante de $2,0\ m/s$. Quelle fréquence de battements la personne entend-elle si la vitesse du son dans l'air est de $340\ m/s$?



$$f_\theta = f_{source}\left(\frac{V_{son} - V_\theta \cos(\theta_\theta)}{V_{son} - V_{source}\cos(\theta_s)}\right)$$

$$\text{Cas 1: } f_{\theta,1} = f_{source}\cdot\left(\frac{V_{son} - V_\theta \cdot 1}{V_{son} - 0}\right) = f_{source}\left(\frac{V_{son} - V_\theta}{V_{son}}\right)$$

$$= 440\left(\frac{340-2}{340}\right) = 437,41176\ldots \text{ Hz}$$

$$\text{Cas 2: } f_{\theta,2} = f_{source}\cdot\left(\frac{V_{son} - V_\theta(-1)}{V_{son} - 0}\right) = f_{source}\left(\frac{V_{son} + V_\theta}{V_{son}}\right)$$

$$= 440\cdot\left(\frac{340+2}{340}\right) = 442,5882\ldots \text{ Hz}$$

$$\Rightarrow f_{bat} = |f_{\theta,1} - f_{\theta,2}| = 5,1764706 \text{ Hz}$$

$$\Rightarrow \boxed{f_{bat} = 5,1764\ldots \text{ Hz}}$$

4. (3 points) Une source de lumière monochromatique éclaire dans l'air deux fentes derrières lesquelles se trouve un écran où apparaissent des raies lumineuses. La distance entre la frange centrale et celles qui se trouvent immédiatement de part et d'autre d'elle est $9,0\ mm$. Quelle sera cette distance si le dispositif est plongé dans un liquide dans lequel la vitesse de la lumière est de $1,5 \times 10^5\ km/s$?
(vitesse de la lumière dans le vide ou l'air $= 3,0\ \times 10^8\ m/s$)

$y = m \lambda \frac{D}{d}$ a est dans le cas $m = 1$.

On a $n_{air} = 1$ et $n_{liquide} = \frac{c}{v} = \frac{3,0 \cdot 10^8\ m/s}{1,5 \cdot 10^8\ m/s} = 2$

$n_{liq} \lambda_{liq} = n_{air} \cdot \lambda_{air} \Leftrightarrow \lambda_{liq} = \frac{\lambda_{air}}{n_{liq}} \Rightarrow \boxed{\lambda_{liq} = \frac{\lambda_{air}}{2}}$

$$\frac{y_{air}}{y_{liq}} = \frac{\lambda_{air} \cancel{(D/d)}}{\lambda_{liq} \cancel{(D/d)}} = \frac{\cancel{\lambda_{air}}}{\cancel{\lambda_{air}}/2} = 2$$

$\Rightarrow y_{liq} = \frac{y_{air}}{2} = 4,5 \cdot 10^{-3}\ m$

$\Rightarrow \boxed{y_{liq} = 4,5 \cdot 10^{-3}\ m}$

5. (3 Points) Vous disposez de trois lentilles. La première, recevant des rayons lumineux d'un objet situé à l'infini, forme une image à 2,5 cm du côté opposé à l'objet. Si on substitue la première lentille par la deuxième, l'image se forme 1 cm plus proche de la lentille.

(a) Quelles sont les puissances respectives de la première et de la deuxième lentille ?

(b) Quelle doit être la puissance de la troisième lentille si, en l'accolant à la deuxième, l'image se forme au même endroit que pour la première lentille ?

(c) Quel est le type de la troisième lentille ?

(Pour information : Un oeil peut être modélisé par une lentille (cornée) et un écran (rétine) situé à 2,5 cm de cette dernière. La première lentille représente la cornée d'un oeil normal et la deuxième la cornée d'un oeil myope. La lentille à accoler modélise une lentille de contact destinée à corriger la myopie.)

(a) $P = \frac{1}{f}$ et $P = \frac{1}{f} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s'}$

ici, $s = \infty \Rightarrow P = \frac{1}{s'}$

Première lentille : $P = \frac{1}{s'} = \frac{1}{2{,}5 \cdot 10^{-2}\,m} \Rightarrow \boxed{P_1 = 40 \text{ dioptries}}$

Deuxième lentille : $P = \frac{1}{s'} = \frac{1}{1{,}5 \cdot 10^{-2}\,m} \Rightarrow \boxed{P_2 = 66{,}6\ldots \text{ dioptries}}$

(b) $P_{tot} = P_2 + P_3$ et $P_{tot} = P_1 \Rightarrow P_1 = P_2 + P_3$

$\Leftrightarrow P_3 = P_1 - P_2 = 40 \text{ diop.} - 66{,}6\ldots \text{ diop.}$

$\Rightarrow \boxed{P_3 = -26{,}66\ldots \text{ dioptries}}$

(c) C'est une lentille divergente car P est négatif.

6. (3 Points) Un tube de 2,5 m de long est fermé à ses deux extrémités. Une source sonore de fréquence 170 Hz est placée à une extrémité. L'autre extrémité est mobile et se rapproche de l'extrémité fixe à la vitesse constante de 0,5 m/s. Après combien de temps une onde stationnaire se formera-elle dans le tube pour la première fois ?
(Indication : Négligez l'effet Doppler)
(la vitesse du son dans l'air est de 340 m/s)

L

Tube fermé aux 2 extrémités

$$L = \frac{N\lambda}{2}, \text{ où } N = 1, 2, 3, \dots$$

Comme $v = \lambda . f \Rightarrow \lambda = \frac{v}{f} = \frac{340}{170} = 2\,m \Rightarrow \boxed{\lambda = 2\,m}$

On aura une onde stationnaire si :

$L_1 = 1\,m$

$L_2 = 2\,m$

$L_3 = 3\,m$

$L_4 = 4\,m$

$\vdots$

nous commençons avec $L = 2,5\,m$ et la longueur diminue à la vitesse de $0,5\,m/s$ $\Rightarrow$ après 1 s nous rencontrons pour la 1ère fois une onde stationnaire (pour $L = 2\,m$

Physique 1 PHYSF104 (2015-2016)
Examen Aouˆt 2016
1`ere partie

19 aouˆt 2016

Nom :

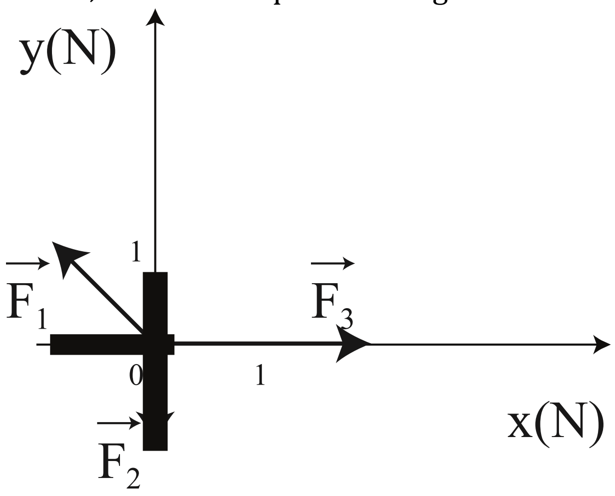
Pr´enom :

N° carte d'´etudiant :

Cote :

1. Ecrivez imm´ediatement vos nom, pr´enom, num´ero de carte d'´etudiant.´
2. Ne pas d´egrafer les pages.
3. Vous pouvez consulter votre aide m´emoire (une feuille A4 recto-verso manuscrite). Celui-ci doit porter votre nom et ne peut ˆetre prˆet´e.
4. Les calculatrices ne peuvent ˆetre prˆet´ees.
5. Les r´eponses doivent ˆetre clairement justifi´ees et les unit´es doivent ˆetre indiqu´eespour les r´esultats num´eriques.
6. Vous prendrez $g = 10\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ en cas de besoin.

1. (3 points) Une masse ponctuelle m situ´e `a l’origine du rep`ere ci-dessous subit l’action de trois forces, comme indiqu´e sur la figure.



   (a) Donner les composantes dans le rep`ere Oxy de la somme des trois forces, et la repr´esenter sur le sch´ema.

   (b) Quel angle fait la somme des forces avec l’axe Ox?

   (c) Donner le r´esultat du produit $\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2$ scalaire

   (d) Donner le module du produit $\vec{F}_1 \times \vec{F}_2$ vectoriel . Donner la direction et le sens de ce produit vectoriel.

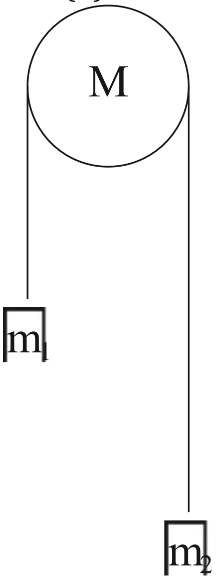
2. (3 points) Une poulie de masse M, de rayon R et de moment d’inertie I est libre de tourner autour de son axe de rotation. Deux masses m_1 et $m_2 = 2m_1$ y sont suspendues `a l’aide d’un fil inextensible et de masse n´egligeable. Les frottements sont n´eglig´es.

   (a) Dans quel sens la poulie tourne-t-elle?

(b) Indiquer toutes les forces s'appliquant aux différents éléments du système : poulie M et masses m_1, m_2.

(c) Calculer l'accélération de la masse m_1.

(d) Déterminer les tensions dans les différentes parties du fil T_1 et T_2.



3. (4 points) Un pêcheur sur une barque (l'ensemble ayant une masse M) attrape un saumon de masse m. La barque et le pêcheur sont alors immobiles. Insatisfait de sa prise, le pêcheur jette ce saumon dans l'eau, en direction du nord (à l'horizontale). On note la vitesse du saumon par rapport à la berge $\vec{v}_s$. On négligera les frottements dans les deux prochaines questions.

   (a) Déterminer la vitesse de l'ensemble pêcheur-barque par rapport à la berge juste après le lancer.

   (b) Lorsque le saumon aura parcouru une distance d à l'horizontale au cours de son vol, quelle distance aura parcourue la barque?

4. (4 points) Un enfant aspire de l’eau à l’aide d’une paille. Cette dernière est un tube de diamètre intérieur d = 5mm, et de longueur L = 20cm. La longueur de paille immergée est de 5cm. L’eau est considérée comme étant un liquide incompressible. L’enfant boit 1mL (1cm^3) d’eau par seconde. On néglige la variation du niveau de l’eau dans le verre. La pression atmosphérique est de $1{,}013 \cdot 10^5$Pa.

   (a) Calculer la vitesse d’écoulement de l’eau dans la paille.

   (b) Estimer la pression au niveau de la bouche de l’enfant.

5. (3 points) Pour mesurer le volume d'un objet, on peut l'immerger dans un récipient de section S connue. Le liquide présent dans ce récipient s'élèvera alors d'une hauteur h.

   (a) Donner la relation entre le volume V de l'objet et la hauteur h.

   Une fois cette mesure effectuée, on peut mesurer la masse volumique de l'objet, en le plongeant dans un liquide de masse volumique connue (comme par exemple de l'eau distillée) tout en le laissant pendre à un ressort de constante de raideur k.

   (b) Déterminer la masse volumique de cet objet de volume V lorsque celui-ci est accroché au ressort de raideur k (ressort subissant un allongement Δx à l'équilibre) et complètement immergé dans un liquide de masse masse volumique ρ_l.

6. (3 points) Une boule de billard A, de masse m est initialement au repos. Une boule de billard B, de même masse et lancée à une vitesse $v_0 = 5 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ la percute. Après la collision, la boule B est déviée de 60 degrés par rapport à sa vitesse initiale. Sa vitesse est alors $v_B = 2{,}5 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

   (a) Quel angle la boule A fait-elle avec la vitesse initiale de la boule B après le choc?

   (b) Quelle est sa vitesse après le choc v_A ?

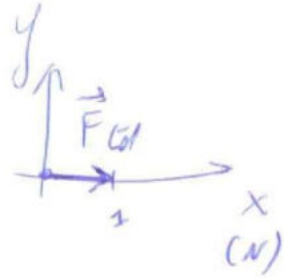
   (c) Le choc est-il élastique?

(1) $\vec{F}_1 = -1N\,\vec{1}_x + 1N\,\vec{1}_y$

$\vec{F}_2 = -1N\,\vec{1}_x$

$\vec{F}_3 = 2\,\vec{1}_x$

(a) $\boxed{\vec{F}_{tot} = 1N\,\vec{1}_x + 0\,\vec{1}_x}$ + dessin



(b) $\vec{O}_x \cdot \vec{F}_{tot} = \|\vec{O}_x\|\,\|\vec{F}_{tot}\| \cos(\theta)$

$\Leftrightarrow\ 1 + 0 = 1 \cdot 1\ \cos(\theta)$

$\Leftrightarrow\ \boxed{\theta = 0°}$

(c) $\boxed{\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 = 0 + 1(-1) = -1N^2}$

(d) $\boxed{\|\vec{F}_1 \times \vec{F}_2\|} = \|\vec{F}_1\|\,\|\vec{F}_2\|\ \sin(\alpha)$

$= \sqrt{2} \cdot 1 \cdot \sin(\alpha)$

où $\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 = \|\vec{F}_1\|\,\|\vec{F}_2\| \cos(\alpha)$

$-1 = \sqrt{2} \cdot 1\ \cos(\alpha)$

$\Leftrightarrow\ \alpha = a\cos\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = 135°$

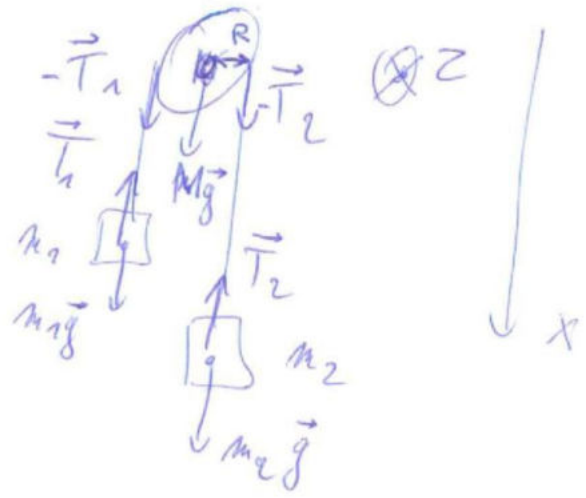
$= \sqrt{2} \cdot \sin(135°) = \boxed{1N^2}$

$\vec{F}_1 \times \vec{F}_2$ est dirigé $\perp$ à $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$. Le vecteur sort de la feuille.

② $M, I, m_1, m_2 = 2m_1$

(a) Dans le sens horaire (du côté de m_2 car $m_2 > m_1$)

(b)



$$\alpha = \frac{a}{R}$$

(c) Selon Ox : $-m_1 a = m_1 g - T_1$ (1)

$$m_2 a = m_2 g - T_2 \quad (2)$$

Selon Oz : $\tau_{tot} = -\tau_{T_1} + \tau_{T_2}$

$$I\alpha = -RT_1 + RT_2$$

$$I\frac{a}{R} = -RT_1 + RT_2 \quad (3)$$

par (1) $T_1 = m_1(a+g)$

(2) $T_2 = m_2(g-a)$

(3) $\Rightarrow a = -\frac{R^2}{I}T_1 + \frac{R^2}{I}T_2 = -\frac{R^2}{I}\cdot m_1(a+g) + \frac{R^2}{I}m_2(g-a)$

$\Leftrightarrow a + \frac{R^2 m_1}{I}a + \frac{R^2 m_2}{I}a = -\frac{R^2}{I}m_1 g + \frac{R^2}{I}m_2 g$

$\Leftrightarrow a = \left(\frac{\frac{R^2}{I}g\cdot(\overset{2m_1}{m_2} - m_1)}{1 + \frac{R^2}{I}(m_1 + \overset{2m_1}{m_2})}\right) = \left(\frac{\frac{R^2}{I}g(m_1)}{1 + \frac{R^2}{I}3m_1}\right) = \frac{g}{\frac{I}{m_1 R^2} + 3}$

(d) $T_1 = m_1 (a + g)$

$$= m_1\left(\frac{g}{\frac{I}{m_1 R^2} + 3} + g\right)$$

$$\Rightarrow T_1 = m_1 \cdot g \cdot \left(\frac{1}{\frac{I + 3 m_1 R^2}{m_1 R^2}} + 1\right)$$

$$\boxed{T_1 = m_1 g \left(\frac{m_1 R^2}{I + 3 m_1 R^2} + 1\right)}$$

et $T_2 = m_2 (g - a)$

$$= m_2 \left(g - \frac{g}{\frac{I}{m_1 R^2} + 3}\right)$$

$$\boxed{T_2 = m_2 g \left(1 - \frac{m_1 R^2}{I + 3 m_1 R^2}\right)}$$

3

(a) Conservation de la quantité de mouvement :

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$

Avant de jetter le saumon : $\vec{P}_i = \vec{0}$

Juste après : $\vec{P}_f = \underbrace{M \vec{V}_p}_{\text{quantité de mouvement du pêcheur-barque}} + \underbrace{m \vec{V}_s}_{\text{quantité de mouvement du saumon}}$

$$\Rightarrow \quad M \vec{V}_p + m \vec{V}_s = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad M \vec{V}_p = - m \vec{V}_s$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{V}_p = - \frac{m}{M} \vec{V}_s}$$

(b) Pas de frottement $\Rightarrow$ la vitesse reste constante.

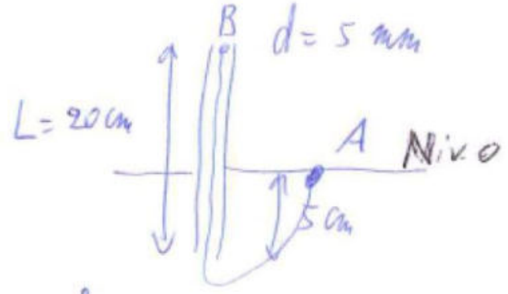
on utilise $V = \dfrac{d}{t}$ et $V_s = \dfrac{d_s}{t_f} = \dfrac{3m}{t_f} \Rightarrow \boxed{t_f = \dfrac{3m}{V_s}}$

$$V_p = \frac{d_p}{t_f} \Leftrightarrow d_p = V_p \cdot t_f$$

$$= \frac{m}{M} \cdot \cancel{V_s} \cdot \frac{3m}{\cancel{V_s}}$$

$$\Rightarrow \boxed{d_p = 3m \cdot \frac{m}{M}}$$

(4)



$D = 1\,mL$
$= 1\,cm^3/s$
$= 10^{-6}\,m^3/s$
$D = V \cdot S$

(a) $D = V \cdot S$

où $S = \pi r^2 = \pi \cdot \left(\frac{0{,}005\,m}{2}\right)^2 = 1{,}9635\ldots 10^{-5}\,m^2$

$$\Rightarrow \boxed{V = \frac{D}{S} = \frac{10^{-6}\,m^3/s}{1{,}9635\ldots 10^{-5}\,m^2} = 5{,}0925\ldots 10^{-2}\,m/s \simeq 0{,}05\,m/s}$$

(b) Bernoulli entre A et B (même ligne de courant).

$$\underset{P_{atm}}{P_A} + \cancel{\tfrac{1}{2}\rho V_A^2} + \rho g z_A = P_B + \tfrac{1}{2}\rho \underset{\frac{D}{S}=V}{V_B^2} + \rho g z_B$$

$V_A \simeq 0\,m/s$

$$\Leftrightarrow \quad P_{atm} + \rho g z_A = P_B + \tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z_B$$

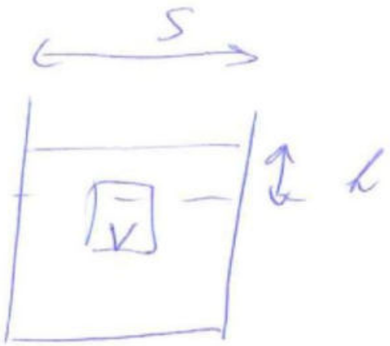
$$\Leftrightarrow \quad P_B = P_{atm} - \tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho g \underbrace{(z_A - z_B)}_{0{,}15\,m}$$

$$\Rightarrow \quad P_B = 1{,}013 \cdot 10^5\,Pa - \overbrace{\tfrac{1}{2} \cdot 10^3 \cdot \left(5{,}0925\ldots 10^{-2}\right)^2}^{1{,}296677\ldots\,Pa} + \overbrace{10^3 \cdot 10 \cdot 0{,}15\,m}^{1500\,Pa}$$

$$= 99\,798{,}70332\ldots\,Pa$$

$$\Rightarrow \boxed{P_B \simeq 9{,}9798 \cdot 10^4\,Pa}$$

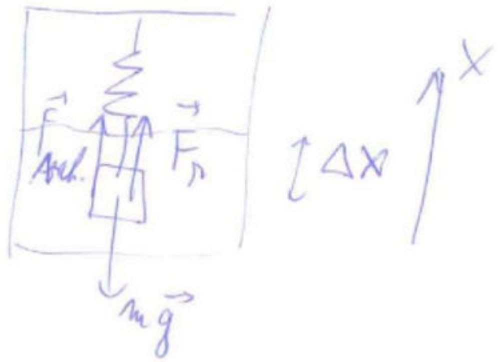
(5)



(a) $V = V_{supl} = S \cdot h$

$$\boxed{V = S \cdot h}$$

(b)



Selon OX :

$$0 = F_{Arch} + F_r - mg$$

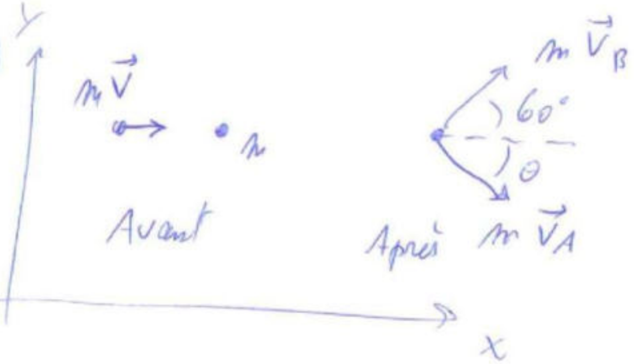
$$0 = \rho_{liq} V g + k \Delta x - mg$$

$$\Leftrightarrow \quad mg = \rho_{liq} V g + k \Delta x$$

$$\Leftrightarrow \quad m = \rho_{liq} V + k \Delta x / g$$

$$\boxed{\rho = \frac{m}{V} = \rho_{liq} + \frac{k \cdot \Delta x}{V \cdot g}}$$

(6)



(a) Conservation de la quantité de mouvement suivant OX :

$$m V_0 = m V_B \cos(60°) + m V_A \cos(\theta)$$

Conserv. quant. de mvt selon OY :

$$0 = m V_B \sin(60°) - m V_A \sin(\theta)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_A \sin(\theta) = V_B \sin(60°) \\ V_A \cos(\theta) = V_0 - V_B \cdot \cos(60°) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tan(\theta) = \frac{V_B \sin(60°)}{V_0 - V_B \cos(60°)}$$

$$\Rightarrow \theta = \operatorname{Atan}\left(\frac{V_B \sin(60°)}{V_0 - V_B \cos(60°)}\right) = 30°$$

(b) $V_A \sin(\theta) = V_B \sin(60°) = 0{,}5 \cdot V_A = 2{,}5\ m/s \cdot 0{,}866...$

$$\Rightarrow V_A = 4{,}33...\ m/s$$

(c) $E_{c,i} = \dfrac{m V_0^2}{2}$

$E_{c,f} = \dfrac{m}{2} \cdot \left(V_A^2 + V_B^2\right)$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{m} V_0^2}{\cancel{2}} \overset{?}{=} \frac{\cancel{m}}{\cancel{2}}\left(V_A^2 + V_B^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 25\ m^2/s^2 \overset{?}{=} 18{,}7499...\ m^2/s^2 + 6{,}25\ m^2/s^2$$

oui ! ⇒ choc élastique.

Physique 1 PHYS - F104 (2015-2016)
Examen Aouˆt 2016
2eme Partie

19 aouˆt 2016

Nom :

Pr´enom :

N°carte d’´etudiant :

Cote :

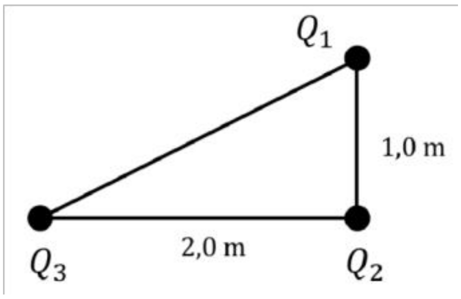
1. Ecrivez imm´ediatement vos nom, pr´enom, num´ero de carte d’´etudiant.´
2. Ne pas d´egrafer les pages.
3. Vous pouvez consulter votre aide m´emoire (une feuille A4 recto-verso manuscrite). Celui-ci doit porter votre nom et ne peut ˆetre prˆet´e.
4. Les calculatrices ne peuvent ˆetre prˆet´ees.
5. Les r´eponses doivent ˆetre clairement justifi´ees et les unit´es doivent ˆetre indiqu´eespour les r´esultats num´eriques. Les simples affirmations du type oui/non ne seront pas prises en compte.
6. Vous prendrez $g = 10\text{m/s}^2$ en cas de besoin.

1. (4 Points) Une personne est immobile le long d’une voie de chemin de fer. Un train arrivant sur la voie actionne son sifflet et la personne perçoit une fréquence de 1000 Hz. Après que le train l’a dépassée, la fréquence perçue par la personne n’est plus que de 800 Hz. Quelle est la vitesse du train en supposant qu’elle est constante? (v_{son}=340 m/s)

2. (4 Points) Un personne se trouve à côté de la ligne de départ d'une course automobile de F1 sur laquelle sont alignées trois voitures identiques. La première se trouve à 3 m de la personne, la deuxième à 5 m et la troisième à 7 m. Lors du démarrage, l'intensité sonore perçue par la personne due à la première voiture est de 1 W/m^2. (a) Quelle est la puissance sonore de son moteur?

   (b) Sachant que les trois voitures démarrent en même temps, quel est le niveau d'intensité total que percevra la personne? (pour rappel, le niveau d'intensité s'exprime en dB)

3. (3 Points) On place trois charges a` chaque coin d'un triangle rectangle (voir figure ci-dessous). La charge Q_2 est au sommet de l'angle droit. La distance entre Q_1 et Q_2 est de 1,0 m et la distance entre Q_3 et Q_2 est de 2,0 m. Ces charges Q_1, Q_2, Q_3 valent respectivement -5,0 μC, -3,0 μC et -7,0 μC. Quelle est le module de la force totale agissant sur Q_1 et l'angle qu'elle forme avec l'horizontale? Prenez $k = 9,0 \times 10^{9} Nm^{2}C^{-2}$.



4. (3 Points) Une corde vibrant à une fréquence de 300 Hz et de 1 m de long est attachée à ses deux extrémités. Une tension initiale de 1200 N lui est appliquée et la corde est ensuite détendue jusqu'à 100 N. Sachant que la masse de cette corde est de 3 g, quelle(s) harmonique(s) va-t-on rencontrer lors de la détente?

5. (3 Points) Une diapositive se trouvant a` 2,0 cm d’une lentille de distance focale 15 mm est ´eclair´ee par une lampe de forte intensit´e. Une image se forme sur un mur distant de 4 m de la lentille.

   (a) Prouvez que l’image qui se forme sur le mur est floue.

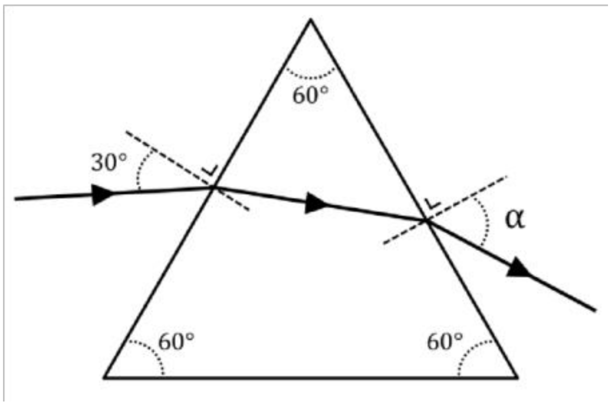
   (b) Quelle devrait ˆetre la distance focale de la lentille pour que l’image apparaissantsur le mur soit nette?

6. (3 Points) Un rayon de lumière monochromatique jaune de 570 nm de longueur d'onde se propageant dans le vide vient frapper une face d'un prisme équilatéral selon un angle de 30° (voir la figure ci-dessous). L'indice de réfraction du prisme est de 1,2.

   (a) Calculez l'angle de sortie α du rayon lumineux sur la face opposée.

   (b) Quelle est la longueur d'onde du rayon lumineux dans le prisme? A quellecouleur correspond cette valeur?
   (la gamme approximative des longueurs d'onde pour chaque couleur est : rouge de 700 à 600 nm, orange de 600 à 579 nm, jaune de 579 à 568 nm, vert de 568 à 490 nm, bleu de 490 à 466 nm, violet de 466 à 380 nm)

   (c) Existe-t-il un angle d'incidence tel que la totalité du rayon lumineux arrivantsur le prisme soit réfléchi? Justifiez votre réponse et dans l'affirmative, donnez sa valeur.



Physique 1 PHYS - F104 (2016-2017)
Examen de janvier 2017

Nom :

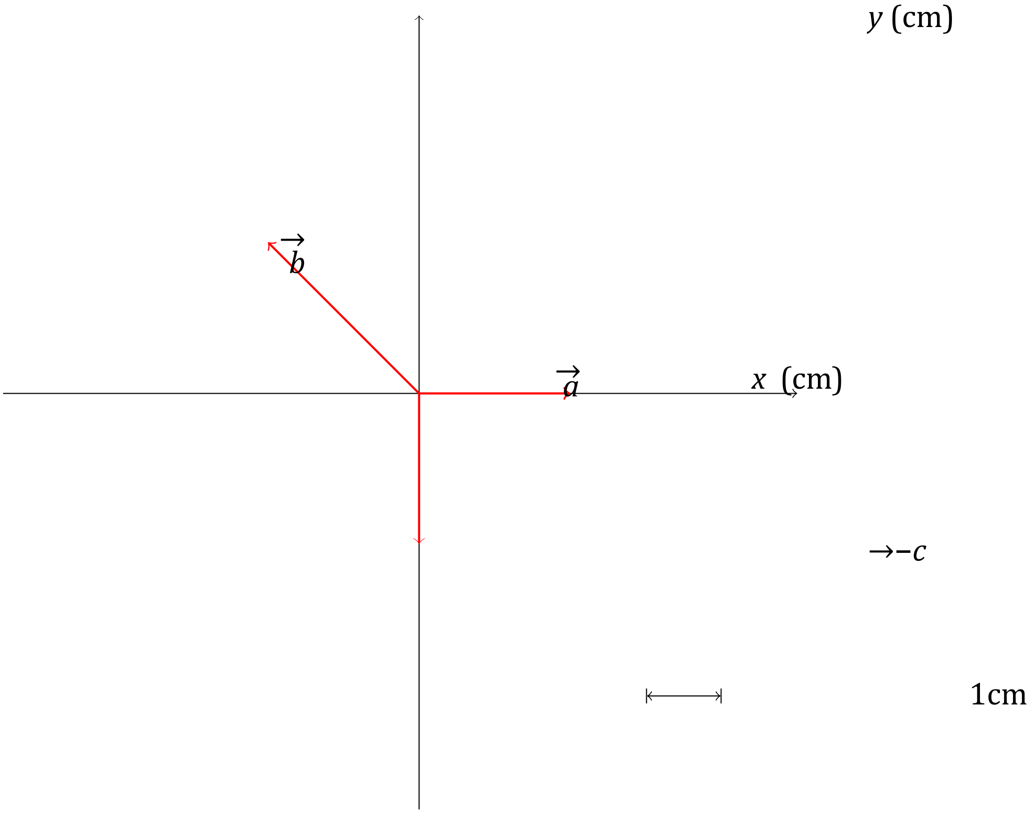
Prénom :

N° carte d'étudiant :

Cote :

1. Ecrivez immédiatement vos nom, prénom et numéro de carte d'étudiant.
2. Ne pas dégrafer les pages.
3. Vous pouvez consulter votre aide mémoire (une feuille A4 recto-verso manuscrite). Celui-ci doit porter votre nom et ne peut être prêté.
4. Les calculatrices ne peuvent être prêtées.
5. Les réponses doivent être clairement justifiées et les unités doivent être indiquées pour les résultats numériques.
6. Vous prendrez $g = 10 \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ pour les éventuelles applications numériques.

1. (3 points) Soient trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$, tels que d´ecrits dans la figure cidessous.



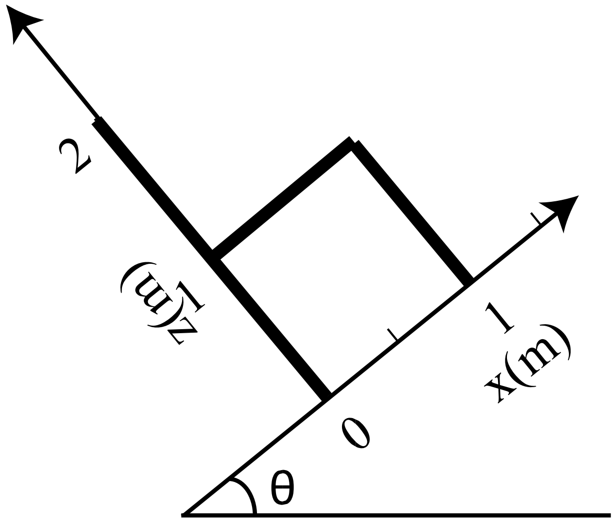
D´eterminez

(a) le vecteur $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

(b) les quantités $\vec{a} \cdot \vec{b}$ et $\vec{a} \cdot \vec{c}$.

(c) le vecteur $\vec{a} \wedge \vec{b}$: module et direction.

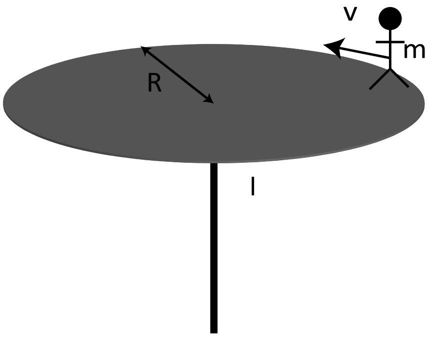
2. (3 points)Pour des raisons artistiques, une gigantesque chaise a été construite à partir de trois tiges minces et homogènes. Une vue de côté est présentée cidessous. Le sol fait un angle θ avec l'horizontale. La chaise est fixée au plan incliné.



(a) Calculer les coordonnées du centre de masse de cette chaise G_x, G_y. Représentez ce point sur la figure.

(b) Si la chaise n'est pas fixée sur le plan incliné et qu'on néglige les frottements, basculera-t-elle, restera-t-elle en place, ou glissera-t-elle? Justifiez.

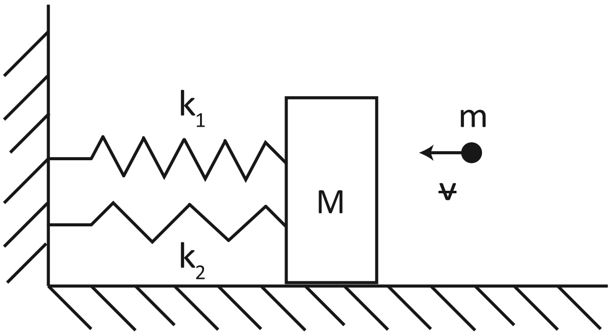
3. (4 points)Une plate-forme circulaire de 10m de diam`etre, ayant un moment d'inertie par rapport a` un axe passant par son centre de 2000 kg·m^2 est immobile. Cette derni`ere est libre de tourner sans frottements autour de son axe de rotation. Une personne de masse m=75 kg se d´eplace sur le bord de cette plateforme, `a une vitesse de 4 m·s^{-1}, dans une direction tangente au cercle. D`es que cette personne s'est mise en mouvement, la plateforme se met a` tourner dans le sens inverse du d´eplacement de la personne. On assimile dans la suite du probl`eme la personne `a un point mat´eriel.



(a) Pourquoi la plate-forme se met-elle en mouvement? Quelle loi physique d´ecrit ce ph´enom`ene?

(b) Quelle est alors la vitesse angulaire de la plateforme?

4. (4 points)Une petite bille de masse m=10 g se d´eplace `a l'horizontale avec une vitesse $v$=250 m·s$^{-1}$. Elle percute alors un bloc de bois de masse M=5 kg intitalement au repos, et accorch´e a` deux ressorts en parall`ele, de raideurs respectives $k_1$= 100 N·m$^{-1}$ et $k_2$= 200 N·m$^{-1}$, et de mˆeme longueur au repos. La bille se loge alors dans le bois et l'ensemble commence alors `a osciller. On n´egligera les massses des ressorts, ainsi que les forces de frottement.

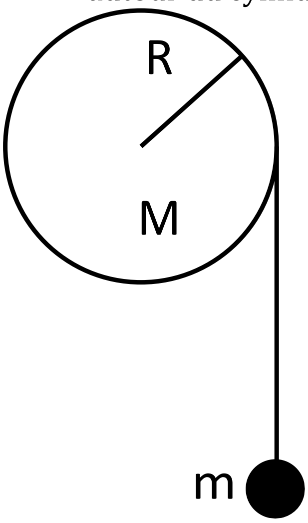


(a) Quelle est la vitesse de la masse M juste apr`es la collision?

(b) Quel est le d´eplacement maximum des ressorts par rapport `a leur position d'´equilibre?

(c) Calculer la p´eriode des oscillations.

5. (3 points) Un cylindre de masse M=250 g et de rayon R=5 cm est fix´e au mur, tout en ´etant capable de tourner librement autour de son axe. Une masse m=100 g est accroch´ee a` l'extr´emit´e d'un fil inextensible et de masse n´egligeable, enroul´e autour du cylindre. Le moment d'inertie du cylindre vaut $I = \frac{MR^2}{2}$.

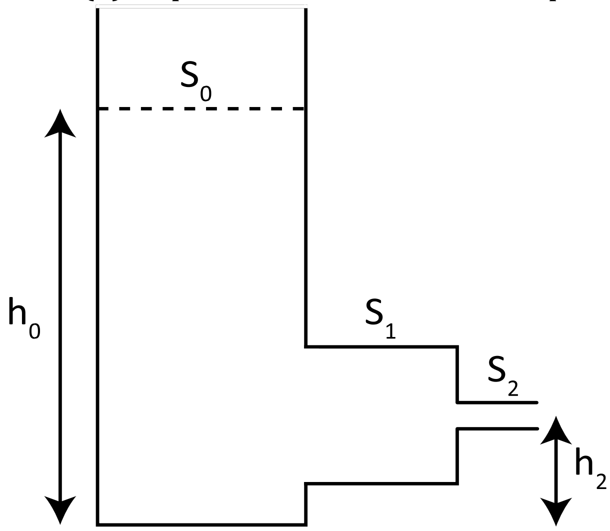


(a) Quelle est l'acc´el´eration de la masse m?

(b) Que vaut la tension dans le fil?

6. (3 points) Un grand r´eservoir contenant un liquide incompressible et non visqueux de masse volumique ρ = 10^3 kg·m^{-3} se vide. La partie gauche du r´eservoir, de section S_0, est beaucoup plus grande que les autres parties du r´eservoir. Elle est remplie jusqu'a` un niveau $h_0$ = 1 m. Ensuite, l'eau s'´ecoule dans un r´eservoir interm´ediaire de section $S_1$=10 cm$^2$, puis dans une derni`ere partie, de section S_2=1 cm^2. Le niveau de la sortie est h_2 =0,1 m.D´eterminez (a) La vitesse de sortie du fluide.

   (b) La pression dans la deuxi`eme partie du r´eservoir, de section S_1



8. **Les réponses doivent toutes être clairement justifiées et les unités doivent être indiquées pour les résultats numériques.**
9. Vous prendrez g = 10m/s^2 en cas de besoin.
10. L'examen dure **deux heures (120 minutes)**.

Bon travail !

1. (3 points) : Soient deux vecteurs $\vec{u} = \vec{i} + (a-1)\vec{j}$ et $\vec{v} = b\vec{i} + 2\vec{j}$.

a) Donnez les coordonnées cartésiennes du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$, sa norme et l'angle formé avec l'axe $O\vec{i}$, en fonction des paramètres a et b.

b) Déterminez a et b pour que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$.

c) Soient les vecteurs $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{w} = -\vec{u} - \vec{v}$. Estimez $\vec{s} \wedge \vec{w}$.

2. (3 points) : La puissance d'une machine à laver est de P = 2300W. Il s'agit ici de la puissance maximale, déployée lors d'un cycle d'essorage à vitesse maximale (1000 tours par minute). Cette puissance est alors utilisée pour faire tourner le tambour et le linge contenu dans ce dernier, de moment d'inertie total I = 2kgm^2.

a) Quel est le moment cinétique du tambour chargé lors du cycle d'essorage?

b) Quelle est alors l'énergie cinétique de rotation du tambour chargé?

c) En combien de temps la machine à laver peut-elle passer de 0 à 1000 tours par minute? On négligera ici les différents frottements et imperfections du système.

/3	/3	/4	/4	/3	/3

3. **(4 points) :** Un ressort de longueur au repos $l_0 = 1$m est suspendu au plafond, à l'air libre. On lui accroche une boule de rayon r = 5cm, et de masse m = 1kg. Sa longueur devient l = 1,5m. a) Quelle est la constante de raideur k de ce ressort?

Cette boule est ensuite plongée dans l'eau, dont la masse volumique est $\rho_e = 10^3$ kg/m^3.

b) Si on détache la boule du ressort, flotte-t-elle dans l'eau? Justifiez.

Si vous pensez qu'elle coule :

c) Calculez la longueur du ressort lorsque la boule accrochée au ressort est plongée dans l'eau.

Si vous pensez qu'elle flotte :

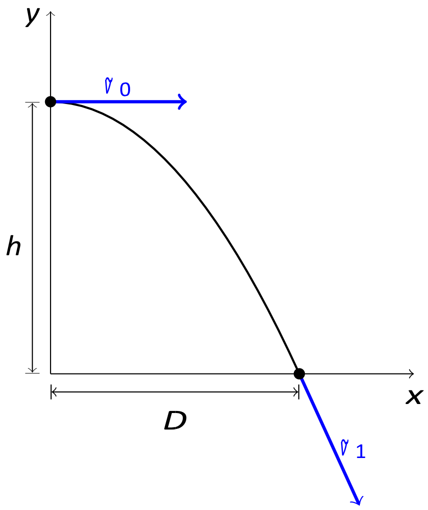
c) En accrochant le ressort au fond d'un réservoir, quelle sera la longueur du ressort allongé par la boule plongée dans l'eau?

4. (4 points) : Mécontent des résultats de ses simulations numériques, un chercheur jette horizontalement par la fenêtre un ordinateur portable de masse m = 2kg, lui fournissant ainsi une énergie cinétique initiale E_c = 20J.

a) Déterminez la vitesse initiale de l'ordinateur $\vec{v}_0$.

b) Ce lancer a été effectué à une altitude h = 25m. À quelle distance de la façade D l'ordinateur s'écraserat-il?

c) Quelles seront alors les coordonnées cartésiennes de sa vitesse $\vec{v}_1$?

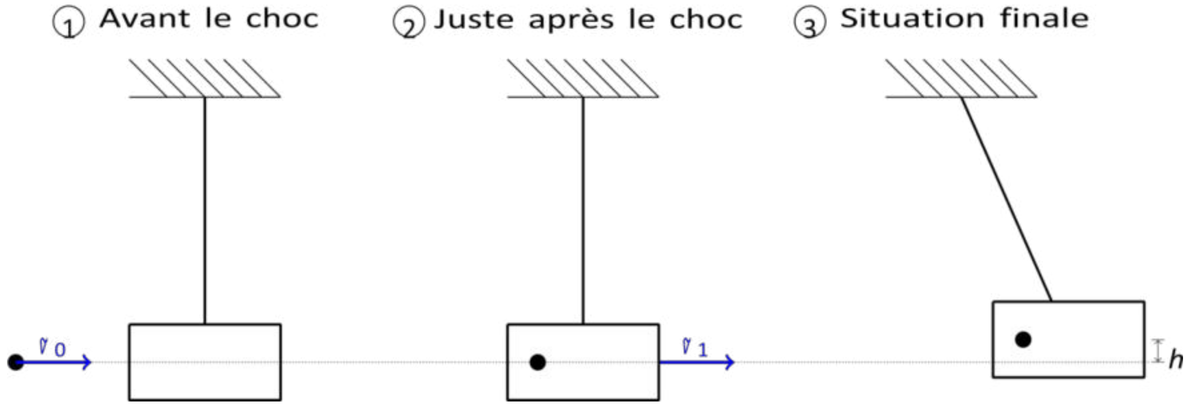


5. (3 points) : Un pendule consiste en un bloc de bois, de masse M = 2,5kg, suspendu à un fil de longueur l = 1m. Lorsqu'une balle de fusil, de masse m = 10g, se loge dans ce bloc, ce dernier s'élève de h = 10cm.

a) Quelle est la vitesse v_1 de l'ensemble formé par le bloc et la balle qui y est encastrée, juste après le choc?

b) Quelle était la vitesse v_0 de la balle de fusil avant qu'elle ne s'encastre dans le bloc?

c) Estimer la quantité d'énergie dissipée lors de la collision.



6. (3 points) : Une baignoire consiste en un parallélépipède de 50cm × 150cm × 35cm.

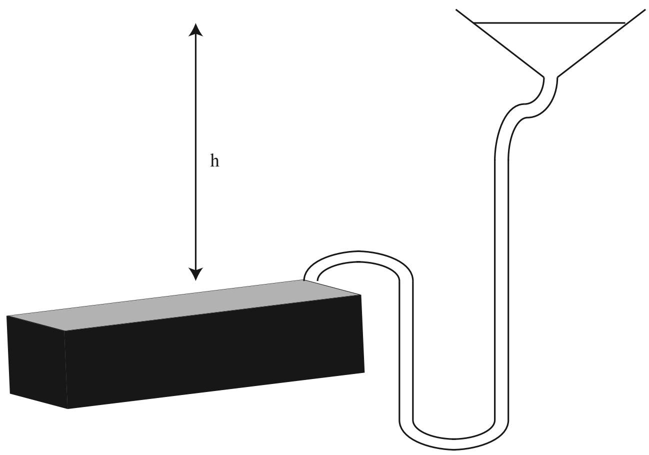
a) Quel doit être le débit volumique du robinet pour que celle-ci soit remplie en cinq minutes?

La sortie du robinet est un disque de 2cm de diamètre.

b) Quelle est alors la vitesse de sortie de l'eau?

c) À quelle hauteur *h* doit-être située la surface du chateau d'eau approvisionnant cette salle de bains (voir schéma)?

Remarque : On définit ici le niveau du chateau d'eau à partir du niveau du robinet, et non depuis le niveau de la mer!



Physique 1 — PHYS-F-104 (2016–2017)
Examen de juin 2017
Seconde partie

Nom :

Prénom :

N° de carte d'étudiant :

Section (entourer) : Biologie — Géographie — Géologie — Pharmacie

Consignes générales :

1. Écrivez immédiatement vos prénom, nom, numéro de carte d'étudiant et section.
2. Vérifiez que votre énoncé comporte bien **7 feuilles** (6 questions).
3. Ne dégrafez pas les pages.
4. Les GSM, tablettes, smartwatches et autres moyens de communication sont interdits. Ils doivent être éteints et rangés dans les sacs le long du mur. En aucun cas vous ne pouvez avoir un GSM (ou autre moyen de communication) à portée de main, même éteint.
5. Vous pouvez consulter votre aide mémoire (une feuille A4 recto-verso manuscrite). Celui-ci doit porter votre nom et ne peut pas être prêté.
6. Les calculatrices ne peuvent pas être prêtées.
7. Ne répondez pas en rouge, cette couleur étant réservée pour la correction.
8. **Les réponses doivent toutes être clairement justifiées et les unités doivent être indiquées pour les résultats numériques.**
9. En cas de besoin, vous prendrez les valeurs de constantes suivantes :

   — Permittivité du vide : $_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\ A^2s^4kg^{-1}m^{-3}$; —

   Seuil d'audibilité : $I_0 = 10^{-12}\ W/m^2$; — Vitesse

   du son dans l'air : $v_{air} = 344 m/s$.
10. L'examen dure **deux heures (120 minutes)**.

Bon travail!

Correctif

/3	/3	/4	/4	/3	/3

1. **(3 points) :** On projette une diapositive de 24×36mm sur un écran de [1],20×1,80m, éloigné de 4,5m de la lentille du projecteur.

a) La lentille utilisée dans le projecteur doit-elle être convergente ou divergente pour avoir une image agrandie?

b) Quelle doit être l'orientation de la diapositive pour avoir une image dans le bon sens?

c) Quelle devrait être la distance focale de la lentille pour que l'image remplisse tout l'écran en hauteur?

d) Si cette lentille est en verre (indice de réfraction 1,50) et qu'une de ses faces est plate, quel doit être le rayon de courbure de l'autre face?

Réponse :

a) Comme on veut une image réelle (qui se forme de l'autre côté de la lentille), on doit prendre une lentille $\boxed{\textit{convergente}}$ *(sinon, il est impossible de focaliser l'image).*

b) Comme l'image est virtuelle, on a s > 0 *et* $s^0 > 0$ *(image réelle). Puisque* $\frac{h^0}{h} = -\frac{s^0}{s}$, *on a que le rapport* $\frac{h^0}{h}$ *doit être négatif, et donc que l'image sera renversée. Il faut donc mettre la diapositive* $\boxed{\textit{à l'envers}}$.

c) Pour déterminer la distance focale, on doit d'abord déterminer la distance à l'objet (s). On sait que s^0 = 4,5m *(distance image, entre le projecteur et l'écran),* $|h|$ = 24mm *(taille de l'objet, ici la diapositive) et* $|h^0|$ = 1,2m *(taille de l'écran). On a donc :*

$$\cancel{h0} = s0 \Rightarrow \quad s \quad \_h\, s0 = 90\text{mm.}$$

$$h \quad s \quad = h0$$

On trouve ensuite la distance focale à l'aide de la relation de conjugaison :

$$f1 = 1s + s1_0 \Rightarrow \quad f = \cancel{sss+0s0} = \boxed{8{,}8\text{cm}}.$$

Remarque : le résultat était exactement identique si on voulait remplir tout l'écran en largeur plutôt qu'en hauteur.

$$\underline{1} = (n-1)\cdot{}^{1}\underline{\qquad\quad} \Rightarrow \qquad R = (n-1)\cdot f = \boxed{4{,}4\text{cm}}.$$

d) On se sert de la formule des opticiens. Un des deux rayons est infini (le rayon de courbure d'une face plate est infini) et on suppose que la lentille fonctionne dans l'air (indice de réfraction de 1). Il faut trouver le rayon de courbure de l'autre face. Cela donne :

f R

2. (3 points) : Deux cordes de piano sont censées vibrer à 132Hz mais un accordeur entend deux battements par seconde lorsqu'on les joue ensemble. On supposera que les cordes sont de même longueur et sont construites dans le même matériau.

a) Si l'une des cordes vibre effectivement à 132Hz, quelle(s) valeur(s) peut prendre la fréquence de l'autre?

b) Établissez l'expression de la différence de tension entre les deux cordes, en fonction de la fréquence de chacune des cordes.

c) De combien doit-on, en pourcentage, augmenter ou diminuer la tension de l'une des cordes pour accorder les deux cordes?

Réponse :

a) Il faut que la valeur absolue de la différence de fréquence soit égale à la fréquence de battements, 2Hz. Cela est possible pour deux valeurs de fréquence : $\boxed{130\text{Hz ou }134\text{Hz}}$.

b) On part de la relation suivante entre la vitesse de l'onde et la tension pour une corde :

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}},$$

où F_T est la force de tension et μ est la masse linéique de la corde. On a donc :

$$F_T = v^2 \cdot \mu.$$

On sait que $v = \lambda f$, et que $\lambda = \frac{L}{2}$ où L est la longueur de la corde (la longueur d'onde correspondant à la fréquence fondamentale pour une corde fixée à ses deux extrémités est de $\frac{L}{2}$). On peut donc écrire :

$$F_T = \frac{L^2}{4}\mu f^2.$$

Comme la longueur et la masse linéique dont les mêmes pour les deux cordes (c'est bien le cas pour la masse linéique puisqu'elles sont construites dans le même matériau), on peut exprimer la différence de tension entre les deux cordes comme :

$$\boxed{F_{T2} - F_{T1} = \frac{L^2}{4}\mu\left(f_2^2 - f_1^2\right)}.$$

c) Supposons que l'on change la tension de la corde qui n'est pas à 132Hz (c'est le but de l'accordage), et appelons cette corde la corde 1. Il y a deux cas possibles.

— La corde désaccordée est à 130Hz, donc trop basse. Il faut alors changer sa tension de :

$$\frac{T_2 - T_1}{T_1} = \frac{f_2^2 - f_1^2}{f_1^2} = 0{,}0310 = \boxed{+3{,}10\%}.$$

Donc, on doit augmenter sa tension de 3,10%.

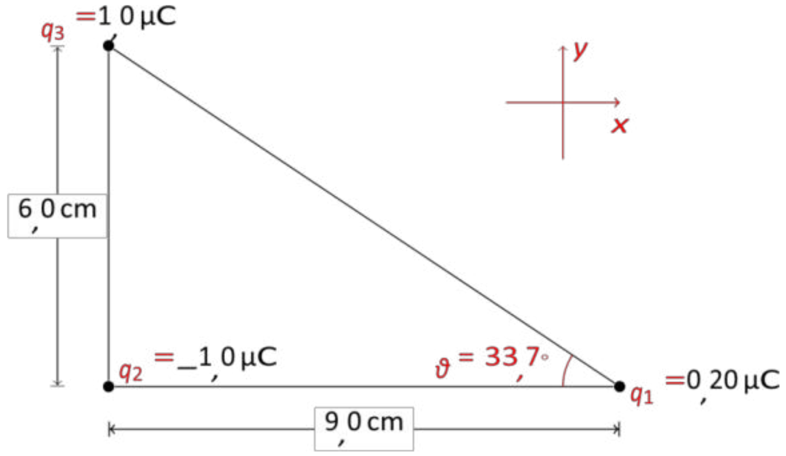
— *La corde désaccordée est à* 134Hz, *donc trop haute. Il faut alors changer sa tension de :*

$$\frac{T_2 - T_1}{T_1} = \frac{f_2^2 - f_1^2}{f_1^2} = -0{,}0296 = \boxed{-2{,}96\%}.$$

Donc, on doit diminuer sa tension de 2,96%.

Notez que les deux réponses ne sont pas équivalentes et doivent être calculées séparément.

3. **(4 points) :** Trois charges, situées dans le vide, sont disposées dans l'espace sur les trois sommets d'un triangle rectangle, comme représenté dans le figure ci-dessous. Un champ électrique externe $\vec{E}$ est appliqué sur l'ensemble du système.



a) Quelle est la force électrostatique exercée par la charge de −1,0µC sur la charge de 0,20µC (norme et direction)?

b) Quelle est la force électrostatique exercée par la charge de 1,0µC sur la charge de 0,20µC (norme et direction)?

c) Que doit valoir le champ $\vec{E}$ (norme et direction) pour que la charge de 0,20µC reste immobile?

(On suppose que les charges de 1,0µC et de −1,0µC sont fixes.)

Réponse : *(Voir le schéma pour le choix du système d'axes.)*

a) La norme de la force est : $\|\vec{F}_{21}\| = k\frac{|q_2 q_1|}{r_{21}^2} = \boxed{0{,}222N}$.

Pour ce qui est de la direction, il s'agit d'une force attractive (charges de signe opposé), donc la force va de la charge q_1 *vers la charge* q_2*, c'est-à-dire vers la* $\boxed{\textit{gauche}}$ $(-\vec{i})$.

b) La norme de la force est :

$$\|\vec{F}\| = k\frac{|q_3 q_1|}{r_{31}^2} = k\frac{|q_3 q_1|}{r_{21}^2 + r_{32}^2} = \boxed{0{,}154N}.$$

31 r_{31}

On a utilisé Pythagore pour trouver la distance r_{13}. Pour ce qui est de la direction, il s'agit d'une force répulsive, qui va donc dans la direction opposée à la ligne qui rejoint q_1 et q_3. Elle fait donc un angle $-\vartheta$ (voir schéma) avec l'axe des x positifs. L'angle ϑ se trouve par trigonométrie sur le triangle rectangle représenté :

$$\vartheta = \arctan \frac{6{,}0}{9{,}0} = 33{,}7^\circ.$$

Donc cette force s'exerce à un angle depar $\boxed{-33{,}7^\circ}$ *rapport à l'axe x.*
Même si ce n'est pas demandé, calculons les composantes de cette force selon notre système d'axes car cela servira par la suite :

$$\vec{F}_{31} = F_{31}\cos\vartheta\,\vec{i} - F_{31}\sin\vartheta\,\vec{j} = 0{,}128\text{N}\,\vec{i} - 0{,}085\text{N}\,\vec{j}.$$

c) *Il faut que la somme vectorielle des forces s'exerçant sur q_1 soit nulle. Il y a trois forces qui s'exercent sur q_1 : les forces $\vec{F}_{21}$ et $\vec{F}_{31}$, calculées aux points précédents, et la force due au champ électrique : $\vec{F}_E = q_1\vec{E}$. On a donc :*

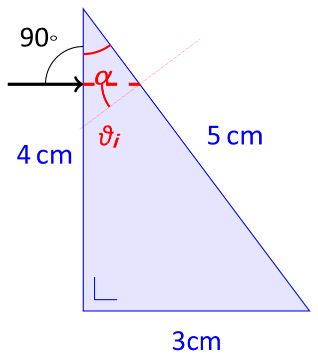
$$\vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} q_1\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} = -q \quad 1_1 \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} = -0 \text{———} ,2 \times 1 10^{-6}\, -0{,}222\vec{i} + 0{,}128\vec{i} - 0{,}085\vec{j} \text{ N/C.}$$

Cela donne $\vec{E}$ = 4,70 × 10 $^{-5}\vec{i} + 4{,}25 \times 10^5\vec{j}$ N/C. *On peut transformer ce résultat en norme et direction par la routine habituelle :*

$$,34 \times 10^5 \text{ N/C} \qquad \|\vec{E}\| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 6\ ;$$

$$\vartheta_E = \arctan \frac{E_y}{E_x} = 42\ \boxed{,1^\circ}\ .$$

4. **(4 points) :** De la lumière frappe, avec une incidence normale, un prisme en verre crown (n = 1,56) formant un triangle rectangle, comme représenté sur la figure ci-dessous.



a) À quel angle (par rapport à la normale) le faisceau est-il réfracté juste après avoir touché le prisme?

b) Calculez l'angle (par rapport à la normale) auquel la lumière sort de la face opposée.

c) Quel est le pourcentage d'intensité lumineuse entrant dans le prisme, par rapport au faisceau incident?

Réponse :

a) *Puisque l'incidence est normale, l'angle incident est de 0° (pour rappel, l'angle incident est toujours défini par rapport à la normale dans la loi de Snell-Descartes) L'angle de réfraction est donc.* $\boxed{0^\circ}$

b) *Il faut commencer par trouver l'angle auquel le faisceau arrive par rapport à la normale à la surface (la face de longueur* 5cm.

Commençons par remarquer que l'angle entre les côtés de 4cm *et de* 5cm *(noté α sur le schéma) est de* $\arctan\frac{3}{4} = 36,9^\circ$.
Il suffit alors de remarquer que l'angle ϑ_i *est le complémentaire du complémentaire de α, autrement dit :* $\vartheta_i = \alpha = 36,9^\circ$.

L'angle de sortie se trouve dès lors facilement avec la loi de Snell-Descartes :

$$n_{verre}\sin\vartheta_i = n_{air}\sin\vartheta_r \Rightarrow \qquad \vartheta_r = \arcsin(1,56\cdot\sin 36,9^\circ) = \boxed{69,5^\circ}$$

c) *On sait que la fraction d'intensité lumineuse réfléchie (lors d'une incidence normale) vaut :*

$$\frac{I_r}{I_0} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2.$$

La fraction d'intensité entrant dans le prisme est donc 1− *cette quantité, c'est-à-dire :*

$$1 - \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 = 1 - \left(\frac{0,56}{2,56}\right)^2 = \boxed{95,2\%}.$$

5. **(3 points) :** Un employé travaille à son bureau situé à 5m d'une soufflerie ayant une puissance sonore de 5×10^{-5} W.

a) Quel est le niveau d'intensité (en dB) que ressent cette personne?

b) L'équipe d'entretien commence alors à passer l'aspirateur (puissance sonore de 4×10^{-3} W) à une distance de 15m de son bureau. Quel est alors le niveau d'intensité total perçu?

Réponse :

a) *Le niveau d'intensité est donné par :*

$$\beta = 10\log\frac{I}{I_0},$$

où $I_0 = 10^{-12}$ W/m². *L'intensité lumineuse est trouvée à partir de la puissance, dans la supposition que la source émet de la même manière dans toutes les directions : on prend comme surface de même intensité une sphère de rayon égal à la distance à la source :*

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi r^2} = 1,59 \times 10^{-7}\ \mathrm{W/m^2}.$$

Cela donne donc : $\boxed{\beta = 52\mathrm{dB}}$.

b) *Ce sont les intensités qui s'additionnent et non les niveaux d'intensité. Un raisonnement similaire à celui du point précédent nous permet de trouver que l'intensité sonore de l'aspirateur est :*

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = 1,41 \times 10^{-6}\ \mathrm{W/m^2}.$$

L'intensité totale vaut donc $1,57 \times 10^{-6}$ W/m², *ce qui correspond à un niveau d'intensité de*

$\boxed{62dB}$.

6. **(3 points) :** Vous savez que la sirène d'une ambulance émet un son correspondant à un *la* (440Hz). Alors que vous traversez à un passage pour piétons, vous apercevez une ambulance à une distance de 50m arrivant droit sur vous (à une vitesse constante), et vous entendez le son de la sirène comme correspondant à un *si bémol* (466Hz).

a) Quelle est la vitesse de l'ambulance?

b) Combien de temps avez-vous pour vous écarter?

Réponse :

a) *Il s'agit d'une application de l'effet Doppler, dans le cas où la source et l'observateur se rapprochent. On connaît la fréquence émise f = 440Hz et la fréquence perçue f^0 = 466Hz. On connaît également la vitesse du son dans l'air (v = 344m/s). On suppose l'observateur immobile (ou en tout cas, n'ayant pas de composante de sa vitesse parallèle à la route). On veut trouver la vitesse de la source v_S. À partir de l'effet Doppler, on trouve donc :*

$$f^0 = f \cdot \frac{v}{v - v_S}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{f^0}{f} = \frac{v}{v - v_S}$$

$$\Leftrightarrow \quad v - v_S = v \cdot \frac{f}{f^0}$$

$$\Leftrightarrow \quad v_S = v \cdot \left(1 - \frac{f}{f^0}\right)$$

$$\Rightarrow \quad v_S = 19{,}2\text{m/s} = \boxed{69\text{km/h}}.$$

b) *Comme l'ambulance se déplace à vitesse constante, on a que* $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. *On connaît la distance à parcourir* Δx = 50m, *on en déduit donc que* $\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \boxed{2{,}6s}$. *On a donc un peu plus de 2 secondes pour s'écarter.*

Physique 1 – PHYS-F104 (2018-2019)

Examen de novembre 2018

30 octobre 2018

Nom :

Prénom :

N° de matricule :

Section (entourer) : Biologie — Géographie — Géologie — Pharmacie

Consignes générales :

1. Écrivez immédiatement vos prénom, nom, numéro de matricule et section.
2. Vérifiez que votre énoncé comporte bien **7 feuilles** (6 questions).
3. Ne dégrafez pas les pages.
4. Vous n'avez droit à rien d'autre que de quoi écrire, votre formulaire, votre calculatrice et votre carte d'étudiant.
5. Les GSM, tablettes, smartwatches et autres moyens de communication sont interdits. Ils doivent être éteints et rangés dans les sacs le long du mur. En aucun cas vous ne pouvez avoir un GSM (ou autre moyen de communication) à portée de main, même éteint.
6. Ne répondez pas en rouge, cette couleur étant réservée pour la correction.
7. **Les réponses doivent toutes être clairement justifiées et les unités doivent être indiquées pour les résultats numériques.**
8. En cas de besoin, vous prendrez **l'accélération gravitationnelle terrestre** $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.
9. Cet examen dure **2 heures (120 minutes)**.

Bon travail !

/3	/3	/3	/4	/4	/3	/20

Question 1 (3 points) Dans un repère orthonormé (O,x,y), soient deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ donnés par $\vec{a} = 2\,\vec{1}_x + \frac{5}{2}\,\vec{1}_y$ et $\vec{b} = -2\,\vec{1}_x + \frac{1}{2}\,\vec{1}_y$.

a) Déterminer les modules de $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

b) Donner les composantes du vecteur $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$. Quel est son module ?

c) Déterminer l'angle entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{c}$.

Solution.

a) $\|\vec{a}\| = \sqrt{2^2 + (\frac{5}{2})^2} = \dfrac{\sqrt{41}}{2}$ $\qquad \left\|\vec{b}\right\| = \sqrt{(-2)^2 + (\frac{1}{2})^2} = \dfrac{\sqrt{17}}{2}$

b) $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b} = (4-2)\,\vec{1}_x + \left(\dfrac{10}{2} + \dfrac{1}{2}\right)\vec{1}_y = 2\vec{1}_x + \dfrac{11}{2}\vec{1}_y$

$\|\vec{c}\| = \sqrt{2^2 + (\frac{11}{2})^2} = \dfrac{\sqrt{137}}{2}$

c) $\vec{a} \cdot \vec{c} = 2 \times 2 + \frac{5}{2} \times \frac{11}{2} = \frac{71}{4}$

$\vec{a} \cdot \vec{c} = \|\vec{a}\|\,\|\vec{c}\| \cos\theta$

$\Leftrightarrow \cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{\|\vec{a}\|\|\vec{c}\|} = \dfrac{71}{4 \times \frac{\sqrt{41}}{2} \times \frac{\sqrt{137}}{2}} = 0{,}947$

$\theta = \arccos(0{,}947) = 18{,}68°$

Question 2 (3 points)
Il est possible de déterminer les unités d'une constante physique en analysant une équation dans laquelle cette constante apparaît. Considérons trois équations célèbres.

a) L'énergie d'un photon s'écrit

$$E = h\nu$$

où l'énergie E du photon s'exprime en joules ($\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}$) et sa fréquence ν s'exprime en s^{-1}. Quelles sont alors les unités de la constante de Planck h ?

b) L'équation de Newton pour la force de gravité entre deux masses m_1 et m_2 séparées par une distance R s'écrit

$$F = G\frac{m_1 m_2}{R^2}$$

où la force s'exprime en newtons (c'est-à-dire en $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$). Quelles sont les unités de la constante de Newton G ?

c) L'équation des gaz parfaits s'écrit

$$PV = Nk_BT$$

où P est la pression du gaz en pascals ($\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$), V est son volume, N est une grandeur sans unités correspondant au nombre d'atomes ou de molécules dans le gaz, et T est la température du gaz en kelvins (K). k_B est la constante de Boltzmann. En quelles unités s'exprime-t-elle ?

Solution.

a) $\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}} = [h]\,\mathrm{s^{-1}} \Leftrightarrow [h] = \mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}} = \mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}\,s} = \mathrm{J\,s}$

b) $\mathrm{kg\,m\,s^{-2}} = [G]\,\mathrm{kg^2\,m^{-2}} \Leftrightarrow [G] = \mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$

c) $\mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-2}\,m^3} = [k_\mathrm{B}]\,\mathrm{K} \Leftrightarrow [k_\mathrm{B}] = \mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}\,K^{-1}} = \mathrm{J\,K^{-1}}$

Question 3 (3 points)

Mario souhaiterait envoyer un bouquet de fleurs à sa princesse qui se trouve au balcon d'un immeuble situé à une hauteur de 8,0 m. Pour cela, il dispose d'un canon que son frère Luigi lui a fabriqué, placé à 10 m du pied de l'immeuble, dont l'inclinaison par rapport à l'horizontale est de 60 degrés et dont il peut ajuster la vitesse d'envoi initiale v_0.

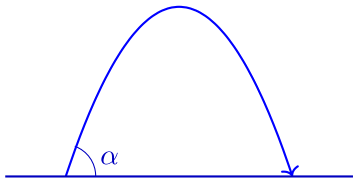
a) Exprimer le temps nécessaire au bouquet pour atteindre la princesse en fonction de v_0.

b) Que doit valoir v_0 pour que le bouquet atteigne les mains de la princesse ?

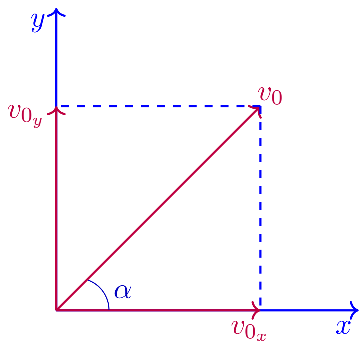
c) Le bouquet était-il alors dans la phase ascendante ou descendante de son mouvement ?

Solution.

a) L'objet effectue un MRU à l'horizontale et un MRUA à la verticale.



Il faut commencer par projeter la vitesse initale v_0, orientée avec un angle $\alpha = 60°$ par rapport à l'horizontale. La composante horizontale de la vitesse est donnée par $v_{0_x} = v_0 \cos(\alpha)$ et la verticale est $v_{0_y} = v_0 \sin(\alpha)$.



Le mouvement vertical est donc décrit par $y(t) = v_{0_y} t - \frac{gt^2}{2}$, et le mouvement horizontal est décrit par $x(t) = v_{0_x} t$.

Pour atteindre sa cible, l'objet doit parcourir horizontalement une distance $d = 10\,\text{m}$. C'est ça qui va fixer la durée du parcours. Dans ce cas, $x(t_{\text{total}}) = d = v_{0_x} t_{\text{total}}$. On peut alors isoler le temps, et $t_{\text{total}} = \dfrac{d}{v_{0_x}} = \dfrac{d}{v_0 \cos(60°)} = \dfrac{2d}{v_0}$.

b) Il faut maintenant déterminer la vitesse initiale nécessaire pour que le bouquet atteigne la hauteur du balcon. Il faut donc regarder l'équation décrivant le mouvement vertical, et il faut qu'au moment t_{total} où l'objet a parcouru la distance d horizontalement, l'objet atteigne la hauteur du balcon $h = y(t_{\text{total}}) = 8\,\text{m}$. On a donc $h = v_{0_y} t_{\text{total}} - \frac{g t_{\text{total}}^2}{2}$. Il reste maintenant à isoler v_0.

$$\begin{aligned} h &= v_{0_y} t_{\text{total}} - \frac{g t_{\text{total}}^2}{2} \\ &= v_{0_y} \frac{2d}{v_0} - \frac{g(2d)^2}{2v_0^2} \end{aligned}$$

où on a utilisé que $t_{\text{total}} = \dfrac{2d}{v_0}$.

$$\begin{aligned}
h &= v_0 \sin(\alpha) \frac{2d}{v_0} - \frac{g(2d)^2}{2v_0^2} \\
&= 2d \sin(\alpha) - \frac{2d^2 g}{v_0^2} \\
\Leftrightarrow \frac{2d^2 g}{v_0^2} &= 2d \sin(\alpha) - h \\
\Leftrightarrow \frac{v_0^2}{2d^2 g} &= \frac{1}{2d \sin(\alpha) - h} \\
\Leftrightarrow v_0^2 &= \frac{2d^2 g}{2d \sin(\alpha) - h} \\
\Leftrightarrow v_0 &= d \sqrt{\frac{2g}{2d \sin(\alpha) - h}} \\
&= 15\,\mathrm{m/s}
\end{aligned}$$

Et on peut retourner remplacer ceci dans $t_{\text{total}} = \dfrac{2d}{v_0} = 1{,}4\,\mathrm{s}$.

c) Il faut donc regarder le signe de la vitesse verticale au moment où l'objet atteint sa cible. Ceci est donné par $v_y(t) = v_{0_y} - gt$ vu que c'est un MRUA. On calcule donc

$$v_y(t_{\text{total}}) = v_0 \sin(\alpha) - g t_{\text{total}} = -0{,}96\,\mathrm{m/s}$$

La vitesse est négative, et nous avions choisi que l'axe était positif en pointant vers le haut : l'objet est donc dans sa phase descendante.

Question 4 (4 points) Le moteur ionique est une nouvelle façon d'accélérer des engins dans l'espace. Cette technologie est encore en cours de recherche et développement. Elle présente un gros avantage : pour une même quantité de carburant, un moteur ionique permet d'atteindre une vitesse maximale bien plus élevée qu'un moteur classique. L'inconvénient, c'est que la puissance est très faible.
Supposons qu'une sonde équipée d'un moteur ionique est lancée vers l'extérieur du système solaire. La sonde a une vitesse initiale de 7 000 m/s lorsqu'elle allume son moteur ionique à proximité de la Terre. Son moteur ionique fournit une accélération constante de 0,001 m/s^2. On néglige les effets de la gravité du Soleil, de la Terre et de toute autre planète. L'orbite moyenne de la Terre est d'environ 150 millions de km alors que celle de la dernière planète du système solaire, Neptune, est environ 30 fois plus grande.

a) Exprimer la vitesse et la position de la sonde en fonction du temps.

b) Quelle est la vitesse de la sonde après 1 jour d'accélération ?

c) Combien de temps faut-il à la sonde pour parcourir la distance séparant l'orbite de la Terre de celle de Neptune ? Exprimer le résultat en secondes et en jours.

d) Quelle est la vitesse de la sonde lorsqu'elle atteint l'orbite de Neptune ?

Solution.

a) La sonde subit un MRUA. Sa vitesse est donc donnée par $v(t) = v_0 + at$ et sa position par $x(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2}$, où $v_0 = 7\,000\,\mathrm{m/s}$ et $a = 0{,}001\,\mathrm{m/s^2}$.

b) Un jour correspond à 86400 secondes (24 heures × 60 minutes × 60 secondes). On calcule alors $v(86\,400\,\mathrm{s}) = v_0 + at = 0{,}001 \times 86400 + 7000 = 7\,086{,}4\,\mathrm{m/s}$.

c) La distance à parcourir est $d = (30 - 1) \times 150 \times 10^6\,\mathrm{km} = 4{,}35 \times 10^{12}\,\mathrm{m}$. On va donc chercher le temps $t_{\text{Terre-Neptune}}$ qui correspond au moment où la sonde parcouru la distance entre l'orbite terrestre et l'orbite de Neptune, $x(t_{\text{Terre-Neptune}}) = d$.

$$d = v_0 t_{\text{Terre-Neptune}} + \frac{a}{2} t^2_{\text{Terre-Neptune}}$$
$$0 = \frac{a}{2} t^2_{\text{Terre-Neptune}} + v_0 t_{\text{Terre-Neptune}} + d$$

C'est une équation du second degré de la forme $0 = at^2 + bt + c$ à résoudre avec la méthode du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$:

$$\Delta = v_0^2 - 4\frac{a}{2}d = 8{,}749\,\mathrm{m^2/s^2}$$
$$t_{\text{Terre-Neptune}} = \frac{-v_0 \pm \sqrt{\Delta}}{a} = 86{,}536 \times 10^6\,\mathrm{s} = 1001{,}58 \text{ jours}$$

On a rejeté la solution négative (un temps négatif n'a pas de sens).

d) Il faut donc déterminer la vitesse de la sonde au temps calculé au point précédent : $v(86{,}536 \times 10^6\,\mathrm{s}) = 0{,}001 \times 86{,}536 \times 10^6 + 7000 = 93{,}536 \times 10^3\,\mathrm{m/s}$.

Question 5 (4 points) Un parachutiste saute d'un avion à une altitude $h_0 = 1\,000\,\mathrm{m}$ avec une vitesse initiale de descente nulle. Il est en chute libre jusqu'à une altitude $h_1 = 875\,\mathrm{m}$, lorsqu'il ouvre son parachute. Dès l'ouverture de son parachute, il suit un autre MRUA d'accélération a (qui sera à déterminer) jusqu'à une altitude $h_2 = 500\,\mathrm{m}$, où il atteint une vitesse $v_2 = -3{,}00\,\mathrm{m/s}$. Entre l'altitude h_2 et le sol, la vitesse du parachutiste reste constante et égale à v_2.

a) Exprimer la vitesse et la position du parachutiste, en fonction du temps, pour chacune des trois étapes de sa descente (chute libre, freinage du parachute, descente à vitesse constante). Écrire ces expressions sous forme algébrique, c'est-à-dire sans remplacer les quantités physiques par leurs valeurs numériques.

b) Combien de temps faut-il au parachutiste pour atteindre l'altitude h_1 ? Quelle est sa vitesse v_1 en cette altitude ?

c) Combien de temps faut-il au parachutiste pour passer de l'altitude h_1 à l'altitude h_2 ? Quelle est la valeur de l'accélération a pendant la phase de freinage ?

d) Quelle est la durée totale de la descente du parachutiste, de h_0 jusqu'au sol ?

Solution.

a) Lors de la chute libre, le parachutiste suit un MRUA de vitesse initiale nulle, de position initiale h_0 et d'accélération $-g$:

$$x_a(t) = h_0 - \frac{gt^2}{2}, \;\; v_a(t) = -gt$$

Une fois le parachute ouvert, celui-ci freine le mouvement. La personne suit un MRUA de vitesse initiale v_1 (qui est la vitesse finale du mouvement en chute libre), de position initiale h_1, et d'accélération totale a :

$$x_b(t) = h_1 + v_1 t + \frac{at^2}{2}, \;\; v_b(t) = v_1 + at$$

L'accélération est elle orientée vers le haut (la force de freinage tire vers le haut), elle est donc positive.

Finalement, durant l'étape de descente à vitesse constante, le parachute suit un MRU de vitesse initiale v_2 (qui est la vitesse finale du mouvement de freinage) et de position initiale h_2 :

$$x_c(t) = h_2 + v_2 t, \;\; v_c(t) = v_2$$

b) Il faut calculer le temps t auquel $x_a(t) = h_1$ pour la première phase, celle de chute libre. On doit donc résoudre $875 = 1000 - \frac{10t^2}{2}$. En isolant le temps, $t^2 = 25\,\mathrm{s}^2$ et donc $t = 5\,\mathrm{s}$. On peut ensuite déterminer la vitesse à ce moment, $v_a(5\,\mathrm{s}) = -10 \times 5 = -50{,}0\,\mathrm{m/s}$. Celle-ci correspond donc à v_1, et est négative vu que la vitesse est dirigée vers le bas.

c) Comme au point précédent, nous remplaçons la position finale de ce mouvement dans l'équation pour déterminer le temps qu'il prend :

$$x_b(t) = h_2 = h_1 + v_1 t + \frac{at^2}{2}$$

Pareil pour la vitesse :

$$v_b(t) = v_2 = v_1 + at$$

Nous avons ici deux inconnues (la durée t du mouvement de freinage et l'accélération a) et deux équations (position et vitesse), ce système est résoluble. A partir de l'équation pour la vitesse, nous trouvons $a = \frac{v_2 - v_1}{t}$, que nous remplaçons dans l'équation de la position :

$$
\begin{aligned}
h_2 &= h_1 + v_1 t + \frac{(v_2 - v_1)t^2}{2t} \\
&= h_1 + v_1 t + \frac{(v_2 - v_1)t}{2} \\
&= h_1 + t\left(v_1 + \frac{(v_2 - v_1)}{2}\right) \\
&= h_1 + t\left(\frac{(v_2 + v_1)}{2}\right) \\
\Leftrightarrow t &= \frac{h_2 - h_1}{\left(\frac{(v_2+v_1)}{2}\right)} = \frac{2(h_2 - h_1)}{v_2 + v_1} = \frac{2(500 - 875)}{-50 - 3} = 14{,}15\,\mathrm{s}
\end{aligned}
$$

On peut utiliser ceci pour déterminer a à partir de $\dfrac{v_2 - v_1}{t} = \dfrac{-3 - (-50)}{14{,}15} = 3{,}32\,\mathrm{m/s^2}$.

d) Il reste à calculer la durée de la chute à vitesse constante jusqu'au sol, puis à l'additionner aux durées des deux phases précédentes que nous avons déjà calculé. Il faut donc déterminer le moment où le parachutiste atteint le sol, $x_c(t) = 0 = h_2 + v_2 t$. On isole le temps t : $t = -\frac{h_2}{v_2} = -\frac{500}{-3} = 167\,\mathrm{s}$.
On additionne finalement cette durée aux précédentes, et la durée de chute totale est $t_{\text{total}} = 166{,}67 + 14{,}15 + 5 = 186\,\mathrm{s}$.

Question 6 (3 points) Une personne en rollerblade s'engage dans un tournant à pleine vitesse. Pendant ce mouvement, elle suit un arc de cercle de rayon 4,5 m à vitesse constante de 5,0 m/s.

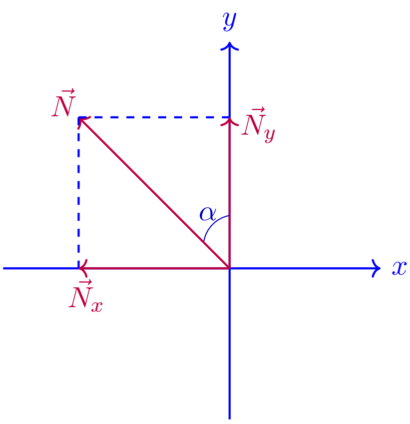
a) Quelle est son accélération centripète au cours de ce mouvement ? Quelle est sa direction et son sens ?

b) Quel angle doit faire son corps avec la verticale de manière à épouser la courbe sans tomber ? (Indication : la réaction du sol sur le corps est dirigée selon la direction du corps)

Solution.

a) L'accélération centripète pour un mouvement circulaire uniforme est donné par $a_c = \frac{v^2}{R}$ où R est le rayon du cercle. Il suffit de calculer, $a_c = \frac{5{,}0^2}{4{,}5} = 5{,}6\,\mathrm{m/s^2}$. Elle est orientée vers le centre du cercle formé par sa trajectoire.

b) Il faut projeter la réaction du sol orientée sur le corps en ses composantes x et y, afin que la composante verticale se compense avec la gravité et que la composante horizontale corresponde à la force centripète qui permet d'avoir une trajectoire courbe.
La seconde loi de Newton indique que $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}_c$. Les deux forces en présence sont donc la gravité et la réaction du sol, $\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{N}$.



Projetons maintenant sur les axes x et y :
Sur x : $N\sin(\theta) = ma_c$,
Sur y : $N\cos(\theta) = mg$.
En divisant ces deux équations, on obtient $\tan(\theta) = \dfrac{ma_c}{mg} = \dfrac{a_c}{g} = \dfrac{5{,}6}{10} = 0{,}56$, et donc l'angle vaut $\theta = \arctan(0{,}56) = 29°$.

PHYS-F104

Examen de janvier

12 janvier 2018

Nom :

Prénom :

N° de carte d'étudiant :

Section (entourer) : Biologie — Géographie — Géologie — Pharmacie

---

Consignes générales :

1. Écrivez immédiatement vos prénom, nom, numéro de carte d'étudiant et section.
2. Vérifiez que votre énoncé comporte bien **7 feuilles** (6 questions).
3. Ne dégrafez pas les pages.
4. Les GSM, tablettes, smartwatches et autres moyens de communication sont interdits. Ils doivent être éteints et rangés dans les sacs le long du mur. En aucun cas vous ne pouvez avoir un GSM (ou autre moyen de communication) à portée de main, même éteint.
5. Vous pouvez consulter votre aide mémoire (une feuille A4 recto-verso manuscrite). Celui-ci doit porter votre nom et ne peut pas être prêté.
6. Vous pouvez utiliser une calculatrice.
7. Les calculatrices ne peuvent pas être prêtées.
8. Ne répondez pas en rouge, cette couleur étant réservée pour la correction.
9. **Les réponses doivent toutes être clairement justifiées et les unités doivent être indiquées pour les résultats numériques.**
10. En cas de besoin, vous prendrez les valeurs de constantes suivantes :
    - Accélération de la pesanteur à la surface de la Terre : $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$;
    - Constante de Newton : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2}$.
11. L'examen dure **deux heures (120 minutes)**.

Bon travail !

/3	/3	/4	/4	/3	/3	/20

Question 1 (3 points) Une voiture d'une demi-tonne se déplaçant à une vitesse de 20 m/s entre en collision avec une camionnette à l'arrêt. Après l'accident, les épaves sont accrochées l'une à l'autre et se déplacent à une vitesse de 18 km/h.

a) Quelle était la masse de la camionnette ?

b) Calculer l'énergie dissipée lors de la collision.

Solution. On utilise la conservation de la quantité de mouvement. Avant la collision, la quantité de mouvement totale vaut :

$$P = p_v + p_c = m_v v_v + m_c v_c = m_v v_v,$$

où l'indice v correspond à la voiture et l'indice c à la camionnette.
Après collision, les deux véhicules sont collés ensembles et ont donc la même vitesse $v' = 18\,\text{km/h} = 5\,\text{m/s}$. On trouve :

$$P' = (m_v + m_c)v'.$$

Par conservation de la quantité de mouvement,

$$P' = P$$

En remplaçant par les valeurs obtenues plus haut,

$$(m_v + m_c)v' = m_v v_v$$

Ce qui donne :

$$m_c v' = m_v v_v - m_v v'$$

Et enfin :

$$m_c = m_v \left(\frac{v_v}{v'} - 1\right) = 500\,\text{kg}\left(\frac{20}{5} - 1\right) = 1\,500\,\text{kg}.$$

L'énergie cinétique dissipée correspond à la différence entre l'énergie cinétique avant collision K et l'énergie cinétique après collision K'. On trouve pour ces deux quantités :

$$\begin{cases} K &= \frac{1}{2}m_v v_v^2 + \frac{1}{2}m_c v_c^2 = \frac{1}{2}m_v v_v^2 \\ K' &= \frac{1}{2}(m_v + m_c){v'}^2 \end{cases}$$

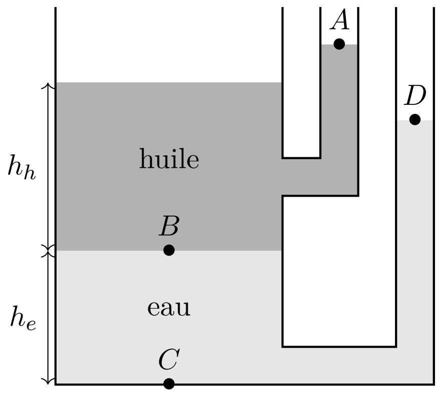
L'énergie dissipée vaut donc :

$$\begin{aligned} \Delta K = K - K' &= \frac{1}{2}m_v v_v^2 - \frac{1}{2}(m_v + m_c){v'}^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 500\,\text{kg} \times (20\,\text{m/s})^2 - \frac{1}{2} \times 2\,000\,\text{kg} \times (5\,\text{m/s})^2 \\ &= 75\,\text{kJ}. \end{aligned}$$

Question 2 (3 points) Soit un réservoir ouvert et rempli par deux liquides :

— De l'eau de masse volumique $\rho_{\text{eau}} = 10^3\,\text{kg/m}^3$, sur une hauteur $h_e = 4\,\text{m}$;

— De l'huile de masse volumique $\rho_{\text{h}} = 850\,\text{kg/m}^3$, sur une hauteur $h_h = 5\,\text{m}$.



a) Calculer la hauteur du point A par rapport au bas du récipient, et corriger l'erreur sur le schéma ;

b) Si la pression atmosphérique est de $P_{\text{atm}} = 10^3\,\text{hPa}$, calculer la pression en les points B et C ;

c) Calculer la hauteur du point D par rapport au bas du réservoir.

Solution. Sur le schéma, le niveau de l'huile devrait être le même dans le réservoir principal et dans le tuyau. Le point A est alors situé à une hauteur $h_h + h_e = 9\,\text{m}$ au-dessus du fond.
La pression en B est égale à la pression atmosphérique plus la pression de la couche d'huile :

$$\begin{aligned} P_B &= P_{\text{atm}} + P_h = P_{\text{atm}} + \rho_h g h_h \\ &= 10^5\,\text{Pa} + 850\,\text{kg/m}^3 \times 10\,\text{m/s}^2 \times 5\,\text{m} \\ &= 143 \times 10^3\,\text{Pa}. \end{aligned}$$

Un raisonnement similaire conduit à la pression en C :

$$\begin{aligned} P_C &= P_B + P_h = P_B + \rho_e g h_e \\ &= 143 \times 10^3\,\text{Pa} + 10^3\,\text{kg/m}^3 \times 10\,\text{m/s}^2 \times 4\,\text{m} \\ &= 183 \times 10^3\,\text{Pa}. \end{aligned}$$

Pour trouver la hauteur du point D, on cherche la hauteur de la colonne d'eau nécessaire pour créer la pression qu'on a trouvée en C – sans oublier la pression atmosphérique :

$$P_C = P_{\text{atm}} + \rho_e g h.$$

La seule inconnue présente dans cette équation étant h, on peut l'isoler :

$$\begin{aligned} h &= \frac{P_C - P_{\text{atm}}}{\rho_e g h} = \frac{\rho_h g h_h + \rho_e g h_e}{\rho_e g h} = \frac{\rho_h}{\rho_e} h_h + h_e \\ &= \frac{850}{1000} \times 5\,\text{m} + 4\,\text{m} = 8{,}25\,\text{m}. \end{aligned}$$

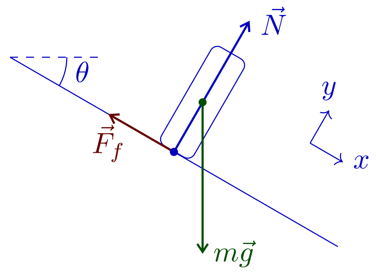
Question 3 (4 points) Deux skieurs de masses $m_1 = 50\,\mathrm{kg}$ et $m_2 = 100\,\mathrm{kg}$ s'élancent, sans vitesses initiales, du haut d'une piste inclinée à $30°$ par rapport à l'horizontale. On considère les frottements sur la neige, dont le coefficient est $\mu_d = 0{,}1$.
Calculer :

a) Les forces de frottement que les deux skieurs subissent ;

b) Les accélérations des deux skieurs ;

c) Leurs vitesses après 5 s. Qui arrivera le premier en bas de la pente ?

Solution. On tient le raisonnement pour un skieur de masse m, qu'on remplacera ensuite par m_1 et m_2. La situation peut être représentée ainsi :



Si on projette les forces sur les axes x et y représentés sur le dessin, on obtient :

$$\begin{cases} \text{Selon } x : & mg\sin\theta - F_f = ma_x, \\ \text{Selon } y : & mg\cos\theta - N = ma_y. \end{cases}$$

Comme le skieur ne peut pas rentrer dans le sol ni s'envoler, il ne peut pas y avoir d'accélération selon y : $a_y = 0$. On trouve donc $N = mg\cos\theta$.
La force de frottement dynamique F_f est donnée par la relation :

$$F_f = \mu_d N = \mu_d mg\cos\theta.$$

En remplaçant m par m_1 et m_2, on trouve $F_{f1} = 43\,\mathrm{N}$ et $F_{f2} = 87\,\mathrm{N}$.

Une fois qu'on a trouvé l'intensité de la force de frottement, on utilise l'équation selon x pour trouver l'accélération :

$$mg\sin\theta - F_f = ma_x$$
$$\Rightarrow \quad a_x = g(\sin\theta - \mu_d\cos\theta) = 4{,}1\,\mathrm{m/s^2}.$$

Notons que l'accélération ne dépend pas de la masse, et que les deux skieurs auront donc toujours la même vitesse.

Les accélérations étant constantes (elles ne dépendent pas du temps) et identiques, nous sommes en présence d'un seul MRUA. La vitesse après un temps t est donc donnée par :

$$v(t) = v_0 + at.$$

Ici, la vitesse initiale est nulle et l'accélération est a_x. En $t = 5\,\mathrm{s}$, on trouve donc :

$$v = 21\,\mathrm{m/s}.$$

Comme les deux skieurs ont la même accélération, ils arriveront en même temps en bas de la pente.

Question 4 (4 points) Un objet de masse $m = 0{,}5\,\mathrm{kg}$ est attaché à un ressort de raideur $k = 20\,\mathrm{N/m}$ et de masse négligeable dont une des extrémités est fixée à un support. On allonge le ressort et on lâche la masse sans vitesse initiale. La masse m glisse sans frottement sur le plan horizontal. L'énergie totale de cette oscillation harmonique simple est $E_{\mathrm{tot}} = 0{,}1\,\mathrm{J}$.

a) Déterminer l'amplitude maximale A des oscillations ;
b) Déterminer la vitesse à la position d'équilibre $x = 0$;
c) Trouver une expression reliant la vitesse de l'objet et sa position ;
d) (Bonus) Représenter celle-ci sur un graphique de v en fonction de x.

On rappelle que l'équation suivante correspond à une ellipse dans le plan (x, y), centrée en $(0, 0)$ et de demi-axes a et b :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Solution. L'énergie du système est donnée par :

$$E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2. \tag{1}$$

L'amplitude du mouvement correspond à la position x en laquelle la vitesse est nulle. Si on met $v = 0$ dans l'équation ci-dessus, on trouve :

$$E = \frac{1}{2}kA^2,$$

ce qui donne le résultat suivant :

$$A = \sqrt{\frac{2E}{k}} = 10\,\mathrm{cm}.$$

En mettant $x = 0$ dans l'équation de l'énergie, on trouve :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2E}{m}} = 0{,}63\,\mathrm{m/s}.$$

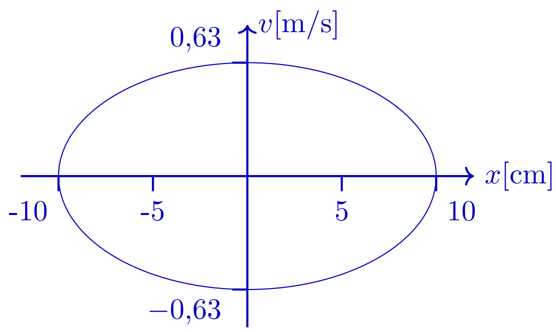
L'équation (1) répond déjà à la question. On peut la résoudre pour trouver :

$$v = \pm\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{kx^2}{m}}.$$

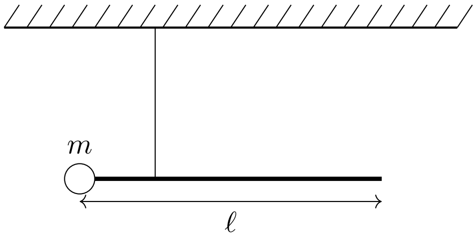
En divisant les deux membres de l'équation (1) par E, on obtient :

$$\frac{k}{2E}x^2 + \frac{m}{2E}v^2 = 1,$$

ce qui correspond à une ellipse dans le plan (x, v). On peut utiliser les résultats des questions a) et b) pour trouver les échelles des axes. Le graphique ressemble à :



Question 5 (3 points) Une barre homogène de longueur ℓ et de masse $M = 5\,\text{kg}$ est attachée au plafond par un fil d'acier fixé au quart de sa longueur. Une sphère de bois de masse m est attachée à son extrémité la plus proche du fil.



a) Pour quelle valeur de m la barre reste-t-elle horizontale ?

b) Donner dans ce cas la position du centre de masse du système.

La masse m est en réalité de $1\,\text{kg}$, et la barre ne reste donc pas horizontale. On décide d'utiliser un grand ballon rempli d'hélium ($\rho_{\text{He}} = 0{,}2\,\text{kg/m}^3$) et de volume $V = \frac{4}{3}\text{m}^3$ pour maintenir la barre. On laisse la sphère de bois en place.
Si la masse volumique de l'air ambiant est $\rho_{\text{air}} = 1{,}2\,\text{kg/m}^3$,

c) Où faut-il attacher le ballon sur la barre pour la maintenir horizontale ?

Solution. La barre reste horizontale si la somme des moments est égale à $\vec{0}$. Calculons celle-ci par rapport au point d'attache du fil :

$$\sum \vec{\mathcal{M}} = \vec{\mathcal{M}}_m + \vec{\mathcal{M}}_T + \vec{\mathcal{M}}_M,$$

où $\vec{\mathcal{M}}_m$ est le moment du poids de la sphère, $\vec{\mathcal{M}}_T$ le moment de la tension dans le fil et $\vec{\mathcal{M}}_M$ le moment du poids de la barre.
On calcule les moments en utilisant la définition $\vec{\mathcal{M}} = \vec{x}_F \times \vec{F}$. On trouve :

— Le moment de $\vec{T}$ est nul, $\vec{\mathcal{M}}_T = \vec{0}$, parce que $\vec{x}_T = \vec{0}$;

— $\vec{\mathcal{M}}_m$ sort de la feuille et a pour module :

$$|\vec{\mathcal{M}}_m| = |\vec{x}_m||m\vec{g}| \sin 90^\circ = \frac{\ell}{4} gm\,;$$

— $\vec{\mathcal{M}}_M$ rentre dans la feuille et a pour module :

$$|\vec{\mathcal{M}}_M| = |\vec{x}_M||M\vec{g}| \sin 90^\circ = \frac{\ell}{4} gM.$$

Pour que la somme des moments soit nulle, le moment rentrant doit exactement compenser le moment sortant, ce qui est le cas seulement si $m = M$. On trouve donc $m = 5\,\text{kg}$.

* * *

Méthode 1. Pour que le système soit en équilibre, son centre de masse doit être situé exactement sous son point d'attache, ce qui donne sa position dans le plan horizontal. Il reste à déterminer sa hauteur, qu'on trouve être celle du centre de la barre par symétrie. Le CM est donc situé au centre de la barre, à hauteur du point de fixation du fil.
Méthode 2. Le système étant composé de deux objets, on peut trouver la position du centre de masse par calcul direct :

$$\vec{x}_{\text{CM}} = \frac{m\vec{x}_m + M\vec{x}_M}{m + M}.$$

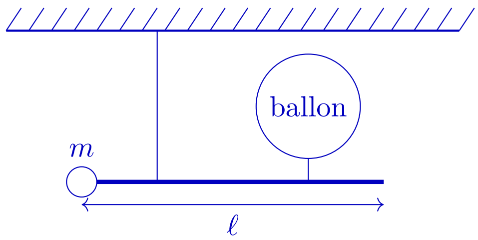
Si on prend un axe x horizontal dont l'origine est au point d'attache de la corde, on trouve :

$$\vec{x}_m = -\frac{\ell}{4}\vec{i} \quad \text{et} \quad \vec{x}_M = \frac{\ell}{4}\vec{i}.$$

Comme, dans le cas qui nous occupe, $m = M$, on obtient $\vec{x}_{\text{CM}} = \vec{0}$, soit le même résultat que précédemment.

* * *

Quand la masse m est de 1 kg, elle ne peut plus retenir la barre (on a montré qu'il faudrait pour ça une masse de 5 kg). Le système se met donc naturellement à tourner dans le sens des aiguilles d'une montre.
Le ballon est rempli d'hélium, un gaz plus léger que l'air (ce qu'on voit en comparant les masses volumiques). Un tel ballon a tendance à s'envoler, porté par la force d'Archimède. Il va donc tirer la barre vers le haut, et il faudra l'attacher à droite du point de suspension :



Si le ballon tire la barre vers le haut avec une force $\vec{F}_{\text{ballon/barre}}$, la barre tire le ballon vers le bas avec une force $\vec{F}_{\text{barre/ballon}} = -\vec{F}_{\text{ballon/barre}}$. On peut la calculer en faisant le bilan des forces sur le ballon à l'équilibre :

$$\sum \vec{F} = m_{\text{ballon}}\vec{g} + \vec{F}_a + \vec{F}_{\text{barre/ballon}} = \vec{0},$$

où $\vec{F}_a$ est la poussée d'Archimède.
En projetant cette équation sur un axe vertical, on trouve :

$$-m_{\text{ballon}}g + F_a + F_{\text{barre/ballon}} = 0,$$

ou encore, en écrivant $m_{\text{ballon}} = \rho_{\text{He}}V$:

$$F_{\text{barre/ballon}} = \rho_{\text{air}}gV - m_{\text{ballon}}g = \rho_{\text{air}}gV - \rho_{\text{He}}Vg = (\rho_{\text{air}} - \rho_{\text{He}})gV.$$

On peut maintenant imposer que la somme des moments soit nulle, ce qui correspond à l'équilibre :

$$\sum \vec{\mathcal{M}} = \vec{\mathcal{M}}_m + \vec{\mathcal{M}}_T + \vec{\mathcal{M}}_M + \vec{\mathcal{M}}_F = \vec{0}.$$

Comme précédemment, $\vec{\mathcal{M}}_m$ est sortant avec $|\vec{\mathcal{M}}_m| = \frac{\ell}{4}mg$, $\vec{\mathcal{M}}_T = \vec{0}$ et $\vec{\mathcal{M}}_M$ est rentrant avec $|\vec{\mathcal{M}}_M| = \frac{\ell}{4}Mg$. Il reste à calculer $\vec{\mathcal{M}}_F = \vec{x}_F \times \vec{F}$, qui est sortant si le ballon est attaché à droite du fil. On trouve :

$$|\vec{\mathcal{M}}_F| = x_F F = x_F(\rho_{\text{air}} - \rho_{\text{He}})gV.$$

Pour que les moments sortants compensent les moments rentrants, il faut que :

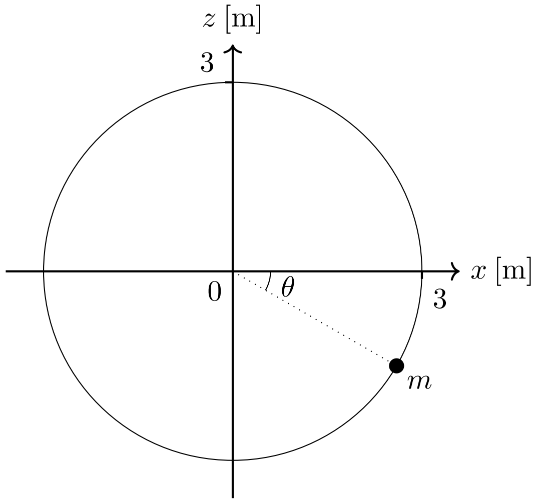
$$\frac{\ell}{4}mg + x_F(\rho_{\text{air}} - \rho_{\text{He}})gV = \frac{\ell}{4}Mg$$

$$\Leftrightarrow \qquad x_F(\rho_{\text{air}} - \rho_{\text{He}})V = \frac{\ell}{4}(M - m)$$

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow \qquad x_F &= \frac{\ell}{4}\frac{M-m}{(\rho_{\text{air}}-\rho_{\text{He}})V} \\
&= \frac{\ell}{4} \times \frac{5\,\text{kg} - 1\,\text{kg}}{(1{,}2\,\text{kg/m}^3 - 0{,}2\,\text{kg/m}^3) \times \frac{4}{3}\text{m}^3} \\
&= \frac{3}{4}\ell.
\end{aligned}
$$

Il faut donc attacher le ballon à l'extrémité de la barre opposée à la sphère de bois.

Question 6 (3 points) Un skater de masse $m = 50\,\mathrm{kg}$ entame un « looping », suivant une trajectoire circulaire de rayon $R = 3\,\mathrm{m}$ dans le plan vertical.



Afin de simplifier le problème, on considère le skateur comme un point matériel situé sur le bord du cercle (voir schéma ci-dessus), et on néglige les frottements.

a) Au moment où le skateur passe par la position faisant un angle de $\theta = 30°$ sous l'horizontale, sa vitesse est de $11\,\mathrm{m/s}$. Déterminer en ce point :

   i) L'accélération tangentielle a_τ ;

   ii) L'accélération normale a_n ;

   iii) La réaction du support (ou force normale) ;

b) Que vaut la vitesse au point le plus bas, sachant qu'elle vaut $6\,\mathrm{m/s}$ au sommet de la trajectoire ?

Solution. La première partie se résout en écrivant $\sum \vec{F} = m\vec{a}$; on trouve :

$$a_\tau = \pm g\cos\theta = \pm 8{,}7\,\mathrm{m/s^2},$$
$$a_n = \frac{v^2}{R} = 40\,\mathrm{m/s^2},$$
$$N = ma_n + mg\sin\theta = 2{,}3\,\mathrm{kN}.$$

Le $\pm$ qui apparaît dans l'accélération tangentielle traduit le fait que l'énoncé ne précise pas le sens de parcours du skateur.

La seconde partie se résout en utilisant la conservation de l'énergie ; on trouve :

$$v = \sqrt{4gR + v_{\text{sommet}}^2} = 12\,\mathrm{m/s}.$$

Physique 1 – PHYS-F104 (2017-2018)

Examen de juin 2018
Première partie

14 juin 2018

Nom :

Prénom :

N° de matricule :

Section (entourer) : Biologie — Géographie — Géologie — Pharmacie

---

Consignes générales :

1. Écrivez immédiatement vos prénom, nom, numéro de matricule et section.
2. Vérifiez que votre énoncé comporte bien **7 feuilles** (6 questions).
3. Ne dégrafez pas les pages.
4. Vous n'avez droit à rien d'autre que de quoi écrire, votre formulaire, votre calculatrice et votre carte d'étudiant.
5. Les GSM, tablettes, smartwatches et autres moyens de communication sont interdits. Ils doivent être éteints et rangés dans les sacs le long du mur. En aucun cas vous ne pouvez avoir un GSM (ou autre moyen de communication) à portée de main, même éteint.
6. Ne répondez pas en rouge, cette couleur étant réservée pour la correction.
7. **Les réponses doivent toutes être clairement justifiées et les unités doivent être indiquées pour les résultats numériques.**
8. En cas de besoin, vous prendrez les valeurs de constantes suivantes :
   densité de l'eau : $\rho_{\text{eau}} = 1\,000\,\text{kg/m}^3$
   accélération gravitationnelle terrestre : $g = 10\,\text{m/s}^2$
9. Cette partie dure **2 heures (120 minutes)**.

Bon travail !

/3	/3	/4	/4	/3	/3	/20

Question 1 (3 points) Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soient deux vecteurs $\vec{u}(1, s, 0)$ et $\vec{v}(\sqrt{2}, -1, 0)$ ainsi qu'un point $A(0, -1, 2)$.

a) Calculez s tel que $\vec{u} \perp \vec{v}$.

b) Avec cette valeur de s, calculez le module de $\vec{u} \wedge \vec{v}$, et indiquez sa direction et son sens.

c) Déterminer les composantes du vecteur $\vec{x}$ tel que $\vec{u} + \vec{x} = \vec{v}$.

d) Trouvez les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{x} + \vec{u} + \vec{v}$

Solution.

a) Pour avoir $\vec{u} \perp \vec{v}$, il faut que le produit scalaire entre les deux vecteurs soit nul, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Le produit scalaire est donné par

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times \sqrt{2} + s \times -1 + 0 \times 0 = 0.$$

L'équation à une inconnue obtenue est alors $\sqrt{2} - s = 0$. Il reste à isoler s, ce qui donne $s = \sqrt{2}$.

b) Vu que les deux vecteurs sont perpendiculaires, l'angle θ entre les deux vecteurs vaut 90° et la norme du produit vectoriel vaut $|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin(\theta) = |\vec{u}||\vec{v}|$. Il reste à calculer les normes des deux vecteurs,

$$|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + \sqrt{2}^2 + 0^2} = \sqrt{3},$$
$$|\vec{v}| = \sqrt{\sqrt{2}^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{3},$$
$$|\vec{u} \wedge \vec{v}| = \sqrt{3}\sqrt{3} = 3.$$

La direction de ce produit vectoriel est

c) Il faut résoudre une équation vectorielle. Si les composantes de $\vec{x}$ sont (x_a, x_b, x_c), l'équation est

$$(1 + x_a, \sqrt{2} + x_b, 0 + x_c) = (\sqrt{2}, -1, 0)$$

ce qui fait trois équations à une inconnue à résoudre. On obtient alors $x_a = \sqrt{2} - 1, x_b = -1 - \sqrt{2}, x_c = 0)$.

d) Si les composantes du point M sont (M_x, M_y, M_z), l'équation vectorielle à résoudre ici est

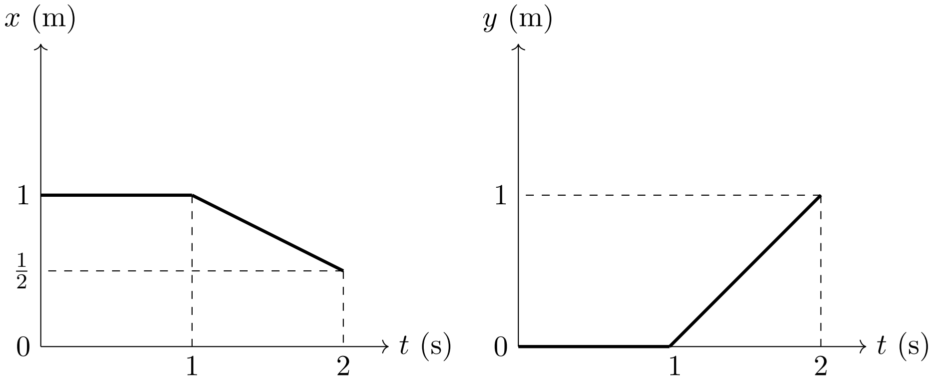
$$(M_x - 0, M_y + 1, M_z - 2) = (2\sqrt{2}, -2, 0)$$

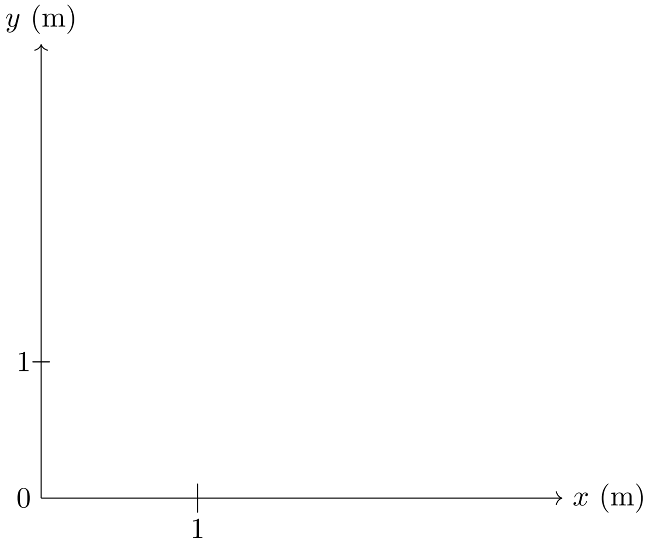
ce qui donne de nouveau trois équations à une inconnue à résoudre. On obtient $M_x = 2\sqrt{2}, M_y = -3, M_z = 2$.

Question 2 (3 points)
Soit le mouvement d'un mobile dans un plan (O,x,y) durant deux secondes. Les positions $x(t)$ et $y(t)$ sont représentées sur les graphes ci-dessous.

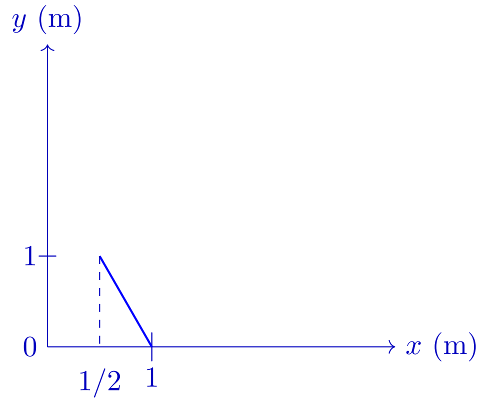
a) Dessinez la trajectoire sur le graphe de y en fonction de x durant les 2 secondes.

b) Quelle est le vecteur position à $t = 2\,\mathrm{s}$? Quelle est la distance parcourue par le mobile entre $t = 0\,\mathrm{s}$ et $t = 2\,\mathrm{s}$?





Solution.



a)

b) Le vecteur position est $\vec{x} = (\frac{1}{2}, 1)$. La distance parcourue est $\Delta x = |\vec{x} - \vec{x}_0|$ où $\vec{x}_0$ est le vecteur décrivant la position initiale, $(1, 0)$. Ceci donne

$$\Delta x = \sqrt{(\frac{1}{2} - 1)^2 + (1 - 0)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Question 3 (4 points) Une bombe immobile explose en deux fragments dans un plan horizontal. Le fragment A est deux fois plus lourd que le fragment B, $m_A = 2m_B$.

a) Si le fragment A parcourt 2 m, quelle est la distance parcourue par le fragment B ?

b) Cette explosion conserve-t-elle l'énergie mécanique ? (Justifiez en une phrase).

Imaginons maintenant que la bombe explose en trois fragments.

c) Exprimez la loi de la conservation de la quantité de mouvement dans ce système.

d) Supposons $m_A = m_B = m_C$, $\vec{v}_A = (v_x, 1)$m/s, $\vec{v}_B = (1, v_y)$m/s et $\vec{v}_C = (0, -1)$m/s. Déterminez v_x et v_y.

Solution.

a) Comme la quantité de mouvement doit être conservée et qu'elle est initialement nulle, la quantité de mouvement des deux fragments de la bombe doivent suivre

$$\begin{aligned} m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B &= 0, \\ \vec{v}_B &= -\frac{m_A}{m_B}\vec{v}_B \\ &= -2\vec{v}_B. \end{aligned}$$

Le fragment A va donc deux fois plus vite que le fragment A. Le signe $-$ indique que les deux fragments vont dans des sens opposés. Si le fragment A parcourt 2 m, le fragment B parcourera 4 m.

b) Non, puisque l'énergie mécanique initiale est nulle, alors qu'elle est non-nulle après. L'énergie cinétique des fragments de la bombe provient de l'énergie potentielle chimique de la bombe.

c) $\vec{P}_{final} = m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B + m_C\vec{v}_C = \vec{P}_{initial} = \vec{0}$

d) Les masses se simplifient toutes, et il reste

$$(v_x + 1 + 0, 1 + v_y - 1) = (0, 0).$$

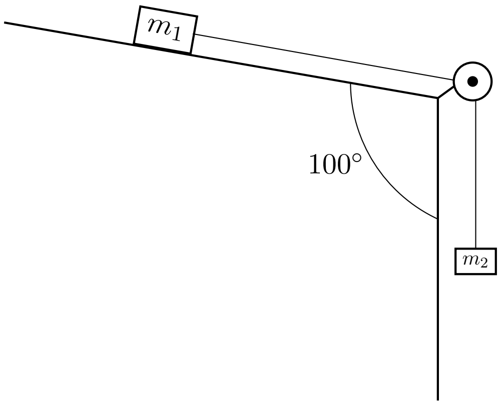
Il faut donc résoudre deux équations à une inconnue, qui nous donnent $v_x = -1$ et $v_y = 0$.

Question 4 (4 points) Soit une poulie de masse négligeable. La masse m_1 est deux fois plus grande que m_2, $m_1 = 2m_2 = 1\,\text{kg}$. Elles sont reliées par un fil inextensible et de masse négligeable comme indiqué sur le schéma, et on néglige les frottements entre le fil et la poulie. La masse m_2 pend au bout du fil, alors que m_1 est posée sur un plan incliné. μ_s est le coefficient de frottement statique entre le plan incliné et la masse m_1.

a) Représenter toutes les forces qui agissent sur les masses m_1 et m_2 sur le schéma et écrire les équations vectorielles décrivant l'équilibre statique du système.

b) Que vaut le coefficient de frottement statique μ_s tel que les masses m_1 et m_2 restent en équilibre statique ?

c) Supposons que le système se mette en mouvement, avec la masse m_2 se déplaçant vers le bas. Sachant que le coefficient de frottement cinétique est $\mu_d = 0.2$, calculez l'accélération du système ainsi que la tension dans le fil.



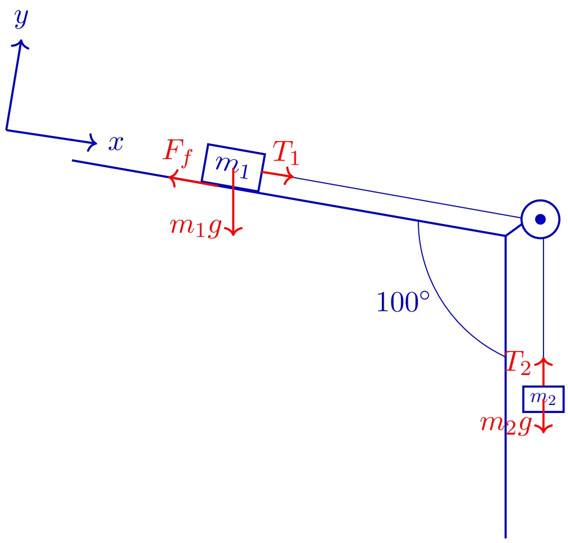
Solution.

a) Le bilan de force est donné pour la masse m_1 par

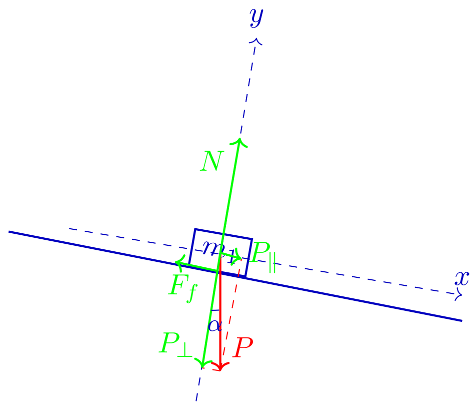
$$\vec{P}_1 + \vec{F}_f + \vec{T}_1 = \vec{0},$$

et pour la masse m_2 par

$$\vec{P}_2 + \vec{T}_2 = \vec{0}.$$



b) L'équilibre statique est donné pour la masse m_1 en considérant le bilan de forces usuel d'un plan incliné. L'angle entre le plan incliné et l'horizontal est $\alpha = 10°$. Si on pose son système d'axe comme dans le schéma, on peut projetter les différentes forces dessus.



$$P_\parallel + T - F_f = 0,$$
$$-P_\perp + N = 0,$$

les forces de frottement sont donnés par $F_f = \mu_s N = \mu_s P_\perp$ et vu que le fil est inextensible et de masse négligeable, $T = m_2 g$. On peut donc isoler μ_s dans cette équation,

$$m_1 g \sin(10) + T - \mu_s m_1 g \cos(10) = 0,$$
$$\mu_s = \frac{m_1 g \sin(10) + m_2 g}{m_1 g \cos(10)}.$$

On peut remplacer par les valeurs numériques, ce qui donne $\mu_s = 0.68$.

c) Dans ce cas, le bilan de forces précédent devient

$$m_1 g \sin(10) + m_2 g - \mu_d m_1 g \cos(10) = Ma.$$

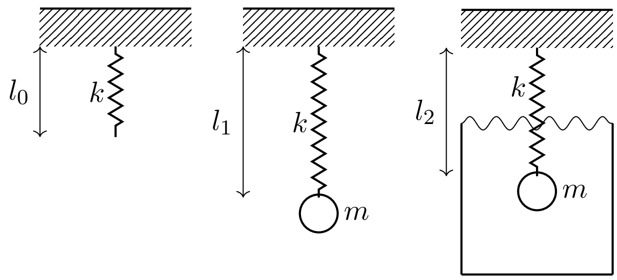
où $M = m_1 + m_2$. Cette fois, on isole l'accélération

$$a = \frac{m_1 g \sin(10) + m_2 g - \mu_d m_1 g \cos(10)}{M}.$$

En remplaçant par les valeurs numériques, on obtient $a = 3{,}18\,\mathrm{m/s^2}$.

Question 5 (3 points)

Soit une masse sphérique de rayon $r = 5\,\mathrm{cm}$ et de masse $m = 1\,\mathrm{kg}$ accrochée à un ressort de constante de rappel $k = 20\,\mathrm{N/m}$. Au repos, le ressort a une longueur l_0. Avec la masse accrochée à l'air libre, cette longueur devient l_1. Lorsque la masse accrochée est plongée dans de l'eau, la longueur devient l_2. Déterminez $(l_2 - l_1)$.



Solution. L'équilibre statique pour la masse pendant à l'air libre est $mg = k(l_1 - l_0)$. L'équilibre statique pour la masse plongée dans l'eau est $mg = k(l_2 - l_0) + \rho_{eau} g V$ avec cette fois-ci la contribution de la force d'Archimède. La masse est une sphère, donc $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Si on fait la différence entre les deux équations, on obtient

$$0 = k(l_2 - l_0) - k(l_1 - l_0) + \rho_{eau} g V.$$

Si on effectue,

$$0 = k(l_2 - l_1) + \rho_{eau} g V,$$
$$(l_2 - l_1) = -\frac{\rho_{eau} g V}{k}.$$

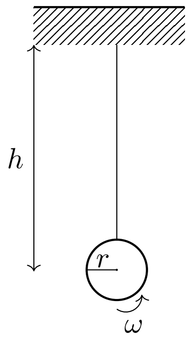
Il ne reste plus qu'à remplacer par les valeurs numériques, ce qui fournit $(l_2 - l_1) = -0{,}26\,\mathrm{m}$.

Question 6 (3 points) Soit un yo-yo, qui est un cylindre de masse $m = 50\,\mathrm{g}$ et de rayon $r = 2\,\mathrm{cm}$. Il est initialement lâché avec une vitesse initiale nulle.

a) Une fois le fil entièrement déroulé, le yo-yo est au plus bas de sa trajectoire, à une hauteur $h = 1\,\mathrm{m}$ (voir schéma). Il y reste indéfiniment à tourner sur lui-même sans monter ni descendre, tant que l'on ne fait pas de mouvement de poignet pour le faire remonter. Déterminez la vitesse angulaire ω du yo-yo pendant ce temps où le yo-yo tourne sur lui-même, à cette hauteur h.

b) Calculez la tension dans le fil ainsi que l'accélération tangentielle du yo-yo durant ce même moment.

Remarque : Le moment d'inertie d'un cylindre est $I = \frac{1}{2}mr^2$.



Solution.

a) La vitesse angulaire est donnée par la conversation de l'énergie mécanique. L'énergie initiale qu'avait le yo-yo lorsqu'on l'a lancé tout en haut était uniquement potentielle, mgh (lâché avec une vitesse initiale nulle). Une fois arrivé en bas, et alors qu'il tourne sans mouvement de montée ou de descente, le yo-yo a uniquement une énergie cinétique de rotation $\frac{1}{2}I\omega^2$ qui détermine la vitesse angulaire constante à laquelle il va tourner. Il ne reste qu'à égaliser ces deux énergies et à isoler ω,

$$mgh = I\omega^2,$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgh}{I}}.$$

On peut alors remplacer par les valeurs numériques, et on obtient $\omega = 223{,}6\,\mathrm{rad/s}$

b) Vu qu'il n'y a aucun mouvement de montée ou de descente, il n'y a aucune accélération. Autrement dit, le centre de masse de l'objet est immobile, le yo-yo est donc en fait en équilibre statique. Le bilan de force donne alors que la tension est simplement $T = mg$.
L'accélération tangentielle est donnée par $a_t = r\alpha$, où α est l'accélération angulaire. Le yo-yo tourne à vitesse angulaire constante, il n'y a aucune accélération tangentielle, $\alpha = 0$ et donc $a_t = 0$. Une autre manière de le voir est que $I\alpha$ est égal au bilan des moments de force présents dans le système. Tous les moments de forces ici valent zéro (si on prend le centre du yo-yo comme point de référence, le vecteur position du point d'application et la force elle-même sont parallèles pour les deux forces présentes dans le système, la tension et le poids).

Physique 1 – PHYS-F104 (2017-2018)

Examen de juin 2018
Seconde partie

14 juin 2018

Nom :

Prénom :

N° de matricule :

Section (entourer) : Biologie — Géographie — Géologie — Pharmacie

---

Consignes générales :

1. Écrivez immédiatement vos prénom, nom, numéro de matricule et section.
2. Vérifiez que votre énoncé comporte bien **7 feuilles** (6 questions).
3. Ne dégrafez pas les pages.
4. Vous n'avez droit à rien d'autre que de quoi écrire, votre formulaire, votre calculatrice et votre carte d'étudiant.
5. Les GSM, tablettes, smartwatches et autres moyens de communication sont interdits. Ils doivent être éteints et rangés dans les sacs le long du mur. En aucun cas vous ne pouvez avoir un GSM (ou autre moyen de communication) à portée de main, même éteint.
6. Ne répondez pas en rouge, cette couleur étant réservée pour la correction.
7. **Les réponses doivent toutes être clairement justifiées et les unités doivent être indiquées pour les résultats numériques.**
8. En cas de besoin, vous prendrez les valeurs de constantes suivantes :

constante de Coulomb :	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	$=$	$9{,}00 \times 10^9\,\mathrm{N\,m^2/C^2}$
seuil d'audibilité de l'oreille humaine :	I_0	$=$	$1{,}00 \times 10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}$
vitesse de la lumière :	c	$=$	$3{,}00 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$
vitesse du son dans l'air :	v_{air}	$=$	$340\,\mathrm{m/s}$
indice de réfraction de l'air :	n_{air}	$=$	$1{,}00$
densité de l'air :	ρ_{air}	$=$	$1{,}3\,\mathrm{kg/m^3}$

9. Cette partie dure **2 heures (120 minutes)**.

Bon travail !

/3	/3	/4	/4	/3	/3	/20

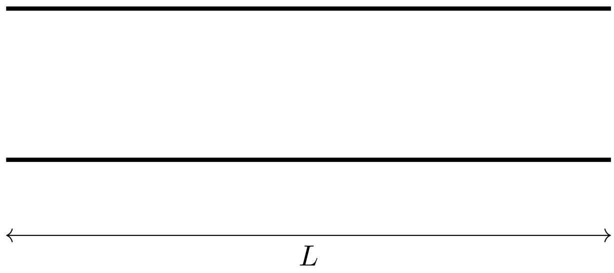


Schéma 1

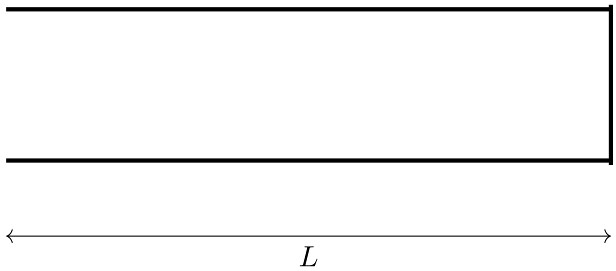


Schéma 2

Question 1 (3 points) On souffle dans un instrument à vent qui peut être modélisé comme un simple tube dont les deux extrémités sont ouvertes (schéma 1). Il produit un son qui correspond à la note la_3, c'est-à-dire à une fréquence de 440 Hz. L'instrument a une longueur $L = 1{,}55\,\text{m}$. On considère qu'en soufflant dans l'instrument, on excite la quatrième harmonique.

a) Dessinez la quatrième harmonique sur le schéma 1 et déterminez sa longueur d'onde.

b) Retrouvez la vitesse du son dans l'air à partir des informations de l'énoncé et de la première question.

c) Si on ferme l'une des extrémités du tube (voir schéma 2) tout en continuant à exciter la quatrième harmonique en soufflant, que devient la fréquence jouée par l'instrument ? Tracez la quatrième harmonique sur le schéma 2 pour vous aider.

Solution.

a) La formule liant la longueur d'onde et la longueur du tube pour les ondes stationnaires dans un tuyau ouvert-ouvert est

$$L = \frac{n\lambda}{2}.$$

Ici, $n = 4$ car on considère la quatrième harmonique. Dans ce cas,

$$\lambda = L/2 = 1,55/2 = 77{,}5\,\text{cm}.$$

b) La vitesse du son est donnée par

$$v = \lambda f = 0,775 \times 440 \approx 340\,\text{m/s}.$$

c) Le tube est maintenant ouvert/fermé. La relation devient

$$L = \frac{(2n-1)\lambda}{4}$$

et donc

$$\lambda = 4L/7 = 4 \times 1,55/7 = 44{,}29\,\mathrm{cm},$$
$$f = v/\lambda = 340/0,8857 = 383{,}88\,\mathrm{Hz}.$$

On obtient un son plus grave, correspondant à peu près au sol_3.

Question 2 (3 points)

a) La sonnerie de l'École Européenne utilise un haut-parleur qui émet une puissance sonore de 0,5 W.

   1) Si cette école se trouve à 200 m des Forums où se passe l'examen, quel est le niveau sonore en dB que nous percevons lorsque la sonnerie retentit ?

   2) Quelle est l'amplitude de pression qui est exercée sur notre tympan ?

b) Après les examens, un étudiant va se relaxer à l'après-midi gazon qui est organisée sur la pelouse du bâtiment NO. Cet étudiant se trouve à 50 m de la sono. Le seuil de douleur de l'oreille humaine est de $\beta_1 = 120\,\mathrm{dB}$ alors qu'un niveau d'intensité $\beta_2 = 160\,\mathrm{dB}$ détruit le tympan. Quelle puissance ne doit pas atteindre la sono de l'après-midi gazon pour que l'étudiant :

   1) commence à avoir mal aux oreilles ?

   2) devienne sourd ?

Solution.

a) 1) Le niveau sonore est défini comme

$$\beta = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right).$$

L'intensité I est donnée par

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}$$

où P est la puissance de la source sonore et r la distance entre la source et l'observateur. En combinant les deux formules, on obtient

$$\beta = 10 \log \left(\frac{P}{I_0 4\pi r^2} \right) = 10 \log \left(\frac{0.5}{10^{-12} 4\pi (200)^2} \right) \approx 60\,\mathrm{dB}.$$

2) L'amplitude de pression Δp se retrouve dans la définition de l'intensité

$$I = \frac{\Delta p^2}{2\rho v}$$

où ρ est la masse volumique de l'air et v la vitesse du son dans l'air. On peut alors isoler

$$\Delta p = \sqrt{2I\rho v} = \sqrt{2\rho v \frac{P}{4\pi r^2}} = 0{,}03\,\mathrm{Pa}.$$

b) On isole l'intensité dans la définition du niveau sonore

$$I = I_0 10^{\beta/10}$$

1)

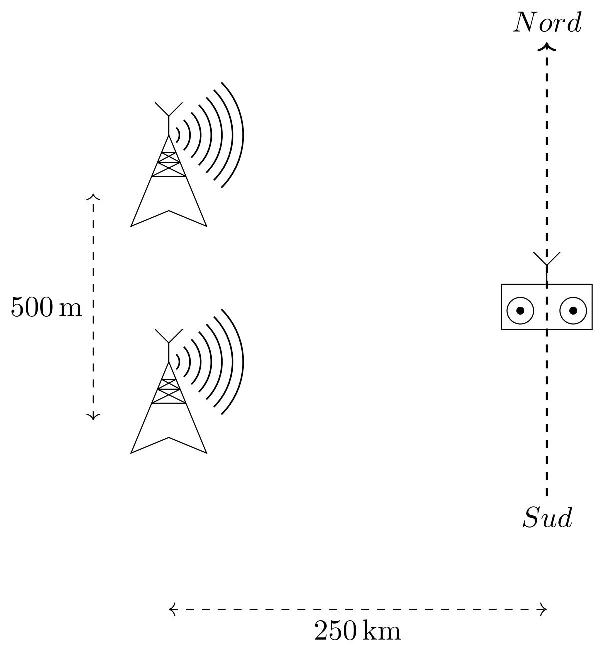
$$I_{\text{douleur}} = I_0 10^{120/10} = 1\,\mathrm{W/m^2}$$

On trouve alors la puissance du haut parleur

$$P = I_{\text{douleur}} S = 1 \times 4\pi (50)^2 = 3 \times 10^4\,\mathrm{W}$$

2)

$$I_{\text{sourd}} = I_0 10^{160/10} = 10^4\,\mathrm{W/m^2},$$
$$P = I_{\text{sourd}} S = 10^4 \times 4\pi (50)^2 = 3 \times 10^8\,\mathrm{W}$$



Question 3 (4 points) Deux antennes émettent des ondes radio identiques de 1,0 MHz en phase. Elles sont distantes de 500 m le long de l'axe nord-sud. Un poste radio, situé 250 km à l'est, est à égale distance des deux antennes de sorte à recevoir un signal d'intensité maximale.
On rappelle que les ondes radios, tout comme les ondes lumineuses, sont des ondes électromagnétiques.

a) Calculer la longueur d'onde des ondes radio émises par les antennes.

b) Lorsqu'on déplace le poste radio le long d'un axe nord-sud, l'intensité du signal reçu varie. Comment appelle-t-on ce phénomène ?

c) De combien doit-on déplacer le poste radio vers le nord (à partir de sa position initiale) pour qu'il reçoive de nouveau un signal aussi fort ?

Solution.

a)

$$\lambda = v/f = 300\,\text{m}.$$

b) Il s'agit du phénomène d''interférences.

c) Nous pouvons appliquer la formule des fentes de Young,

$$y = m\lambda\frac{D}{d}.$$

Nous cherchons la frange numéro 1,

$$y = \lambda\frac{D}{d} = 150\,\text{km}.$$

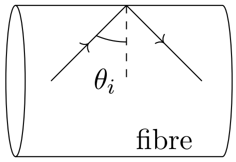


Schéma 1

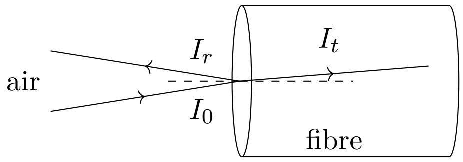


Schéma 2

Question 4 (4 points) Une fibre optique est faite d'un verre d'indice de réfraction $n = 1,46$.

a) Les rayons lumineux doivent se réfléchir intégralement dans la fibre pour éviter les pertes. Un rayon lumineux frappe l'interface fibre/air sous une incidence θ_i comme montré sur le schéma 1. Quel est l'angle d'incidence minimal θ_i^{lim} des rayons pour ne pas avoir de rayons réfractés dans l'air ?

b) Lorsqu'on injecte un faisceau lumineux d'intensité I_0 à l'entrée de la fibre, une fraction de l'intensité initiale est transmise (I_t) et une fraction est réfléchie (I_r) comme illustré sur le schéma 2. Faites une hypothèse sur l'angle d'incidence du faisceau qui vous permet de déterminer, en pourcentage, les pertes dues à la réflexion.

c) Qu'arrive-t-il à un faisceau de lumière se propageant dans la fibre optique (schéma 1) lorsque cette dernière est plongée dans de l'huile d'olive, d'indice de réfraction identique à celui de la fibre $n_{\text{huile}} = n$?

Solution.

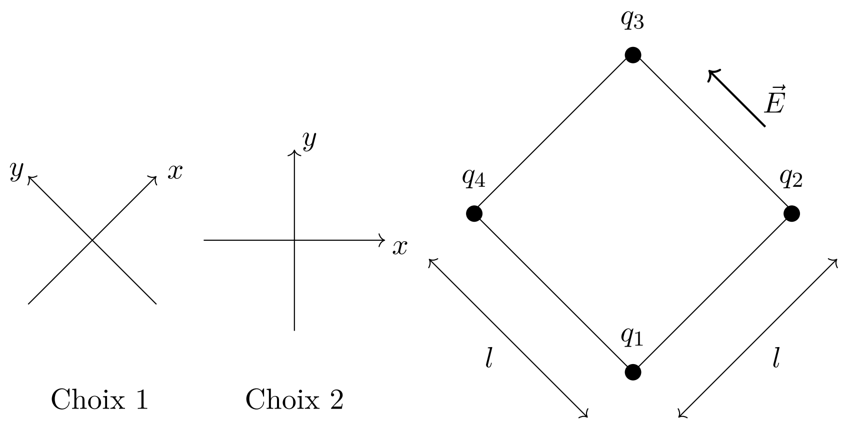
a) On trouve l'angle limite de réflexion totale à partir du moment où l'angle de réfraction est égal à 90°. Donc

$$n_{\text{fibre}} \sin \theta_i^{\text{lim}} = n_{\text{air}},$$
$$\theta_i^{\text{lim}} = \arcsin \frac{n_{\text{air}}}{n_{\text{fibre}}} = 43{,}23°.$$

b) Si on suppose que l'angle d'incidence est assez proche de zéro, donc que le rayon arrive quasiment perpendiculairement à la surface, on peut utiliser la formule suivante pour le pourcentage d'intensité lumineuse réfléchie

$$\frac{I_r}{I_0} = \left(\frac{n_{\text{fibre}} - n_{\text{air}}}{n_{\text{fibre}} + n_{\text{air}}}\right)^2 = 0,035 = 3,5\%.$$

c) La fibre optique et le milieu extérieur ont alors le même indice de réfraction : il ne se passe plus rien à leur interface. Pour la lumière, les deux sont le même milieu. La lumière continue à se propager sans subir ni réfraction, ni réflexion, et sort donc de la fibre optique.



Question 5 (3 points) Quatre charges électriques de masse négligeable sont fixées aux sommets d'un carré de côté $l = 0{,}1\,\mathrm{m}$ (voir figure). Ces charges sont de $q_1 = -1\,\mu\mathrm{C}$, $q_2 = -1/2\,\mu\mathrm{C}$, $q_3 = \sqrt{2}\,\mu\mathrm{C}$ et $q_4 = 1/2\,\mu\mathrm{C}$.

a) Calculez la force électrostatique résultante exercée par les charges q_2, q_3 et q_4 sur la charge q_1 (norme et direction).

b) Ce dispositif est maintenant plongé dans un champ électrique extérieur et uniforme de norme $\|\vec{E}\| = E = 4 \times 10^5\,\mathrm{N/C}$ et dirigé dans le même sens que l'axe rejoignant les charges q_1 à q_4 ainsi que q_2 à q_3, comme représenté sur la figure. Calculer la force exercée par le champ $\vec{E}$ sur la charge q_1 (norme et direction).

c) Déduire la force totale qui s'applique sur la charge q_1 (norme et direction).

Remarque : Deux systèmes de coordonnées vous sont proposés à gauche de l'image. Choisissez-en un pour résoudre l'exercice (ce choix n'impacte pas la note).

Solution.

a) Par le principe de superposition linéaire, la force résultante qui s'exerce sur la charge 1 est donnée par la somme vectorielle des forces qu'exercent chacune des charges 2, 3 et 4 sur la charge 1.

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{2\to1} + \vec{F}_{3\to1} + \vec{F}_{4\to1}$$

La loi de Coulomb nous donne l'expression pour chacune de ces forces :

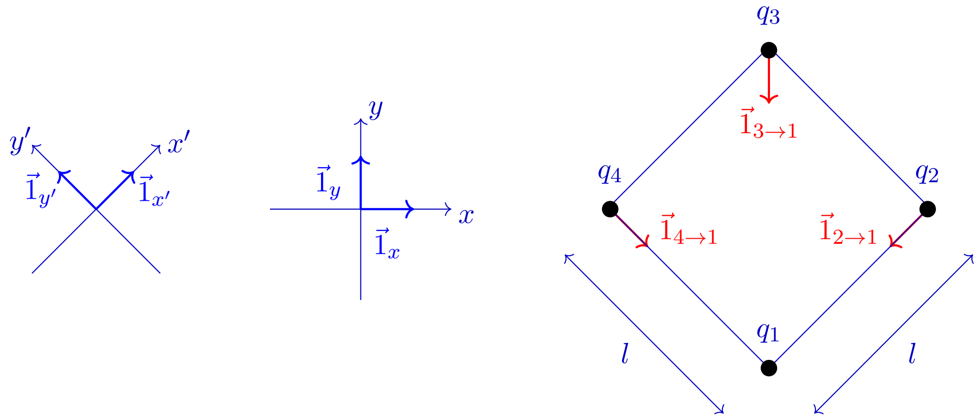
$$\vec{F}_{2\to1} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0\, r_{1,2}^2}\vec{1}_{2\to1} \quad ; \quad \vec{F}_{3\to1} = \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0\, r_{1,3}^2}\vec{1}_{3\to1} \quad ; \quad \vec{F}_{4\to1} = \frac{q_1 q_4}{4\pi\epsilon_0\, r_{1,4}^2}\vec{1}_{4\to1}.$$

La géométrie de la disposition des charges présentée ci-dessus nous donne les distances séparant les charges :

$$r_{1,2} = r_{1,4} = l \quad \text{et} \quad r_{1,3} = \sqrt{2}\,l.$$

Nous proposons deux choix de système de coordonnées, (x, y) et (x', y'), pour la résolution de cet exercice.

1) Dans le système de coordonnées (x, y), nous projetons les vecteurs de norme unité sur les différents axes du référentiel. L'angle considéré est l'angle qu'a le vecteur par rapport à



l'axe x.

$$\begin{aligned}
\vec{1}_{2\to 1} &= \cos(-135°)\vec{1}_x + \sin(-135°)\vec{1}_y &&= \frac{-\vec{1}_x - \vec{1}_y}{\sqrt{2}}, \\
\vec{1}_{3\to 1} &= \cos(-90°)\vec{1}_x + \sin(-90°)\vec{1}_y &&= -\vec{1}_y, \\
\vec{1}_{4\to 1} &= \cos(-45°)\vec{1}_x + \sin(-45°)\vec{1}_y &&= \frac{\vec{1}_x - \vec{1}_y}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Nous trouvons donc

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{2\to 1} &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0\, l^2}\left(\frac{-\vec{1}_x - \vec{1}_y}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \left(9\times 10^9\,\mathrm{Nm^2/C}\right)\frac{(-10^{-6}\,\mathrm{C})\,(-1/2\times 10^{-6}\,\mathrm{C})}{(10^{-1}\,\mathrm{m})^2}\left(\frac{-\vec{1}_x - \vec{1}_y}{\sqrt{2}}\right) \\
&= -\left(\frac{9}{2\sqrt{2}}\times 10^{-1}\,\mathrm{N}\right)\left(\vec{1}_x + \vec{1}_y\right), \\
\vec{F}_{3\to 1} &= \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0\, 2l^2}\left(-\vec{1}_y\right) \\
&= \left(9\times 10^9\,\mathrm{Nm^2/C}\right)\frac{(-10^{-6}\,\mathrm{C})\left(\sqrt{2}\times 10^{-6}\,\mathrm{C}\right)}{2\times(10^{-1}\,\mathrm{m})^2}\left(-\vec{1}_y\right) \\
&= \left(\frac{9}{\sqrt{2}}\times 10^{-1}\,\mathrm{N}\right)\vec{1}_y, \\
\vec{F}_{4\to 1} &= \frac{q_1 q_4}{4\pi\epsilon_0\, l^2}\left(\frac{\vec{1}_x - \vec{1}_y}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \left(9\times 10^9\,\mathrm{Nm^2/C}\right)\frac{(-10^{-6}\,\mathrm{C})\,(1/2\times 10^{-6}\,\mathrm{C})}{(10^{-1}\,\mathrm{m})^2}\left(\frac{\vec{1}_x - \vec{1}_y}{\sqrt{2}}\right) \\
&= -\left(\frac{9}{2\sqrt{2}}\times 10^{-1}\,\mathrm{N}\right)\left(\vec{1}_x - \vec{1}_y\right).
\end{aligned}$$

Soit la somme vectorielle,

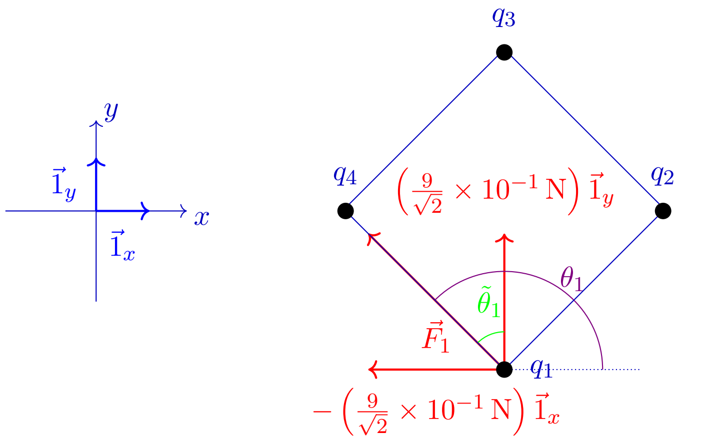
$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 &= -\left(\frac{9}{2\sqrt{2}}\times 10^{-1}\,\mathrm{N}\right)\left(\vec{1}_x + \vec{1}_y\right) + \left(\frac{9}{\sqrt{2}}\times 10^{-1}\,\mathrm{N}\right)\vec{1}_y - \left(\frac{9}{2\sqrt{2}}\times 10^{-1}\,\mathrm{N}\right)\left(\vec{1}_x - \vec{1}_y\right) \\
&= -\left(\frac{9}{\sqrt{2}}\times 10^{-1}\,\mathrm{N}\right)\vec{1}_x + \left(\frac{9}{\sqrt{2}}\times 10^{-1}\,\mathrm{N}\right)\vec{1}_y.
\end{aligned}$$

La norme de la résultante des trois forces appliquées à la charge 1 est

$$\begin{aligned}\|\vec{F}_1\| &= \sqrt{\left(-\frac{9}{\sqrt{2}}\times 10^{-1}\,\mathrm{N}\right)^2+\left(\frac{9}{\sqrt{2}}\times 10^{-1}\,\mathrm{N}\right)^2}\\ &= 9\times 10^{-1}\,\mathrm{N} \;=\; 0{,}9\,\mathrm{N}.\end{aligned}$$

Avec les relations trigonométriques reliant les longueurs des côtés d'un triangle rectangle et ses angles intérieurs, nous trouvons

$$\tilde{\theta}_1 \;=\; \arctan\left(\frac{\left|-\frac{9}{\sqrt{2}}\times 10^{-1}\,\mathrm{N}\right|}{\left|\frac{9}{\sqrt{2}}\times 10^{-1}\,\mathrm{N}\right|}\right) \;=\; \arctan(1) \;=\; 45^\circ.$$



L'angle que fait cette force avec l'axe x est donc donné par

$$\theta_1 \;=\; 90^\circ + \tilde{\theta}_1 \;=\; 135^\circ.$$

2) Dans le système de coordonnées (x', y'), nous projetons les vecteurs de norme unité sur les différents axes du référentiel. L'angle considéré est l'angle qu'a le vecteur par rapport à l'axe x'.

$$\begin{aligned}\vec{1}_{2\to 1} &= \cos(180^\circ)\vec{1}_{x'}+\sin(180^\circ)\vec{1}_{y'} \;=\; -\vec{1}_{x'},\\ \vec{1}_{3\to 1} &= \cos(-135^\circ)\vec{1}_{x'}+\sin(-135^\circ)\vec{1}_{y'} \;=\; \frac{-\vec{1}_{x'}-\vec{1}_{y'}}{\sqrt{2}},\\ \vec{1}_{4\to 1} &= \cos(-90^\circ)\vec{1}_{x'}+\sin(-90^\circ)\vec{1}_{y'} \;=\; -\vec{1}_{y'}.\end{aligned}$$

Nous trouvons donc

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{2\to 1} &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0\, l^2}\left(-\vec{1}_{x'}\right) \\
&= \left(9\times 10^9\,\mathrm{Nm^2/C}\right)\frac{(-10^{-6}\,\mathrm{C})\,(-1/2\times 10^{-6}\,\mathrm{C})}{(10^{-1}\,\mathrm{m})^2}\left(-\vec{1}_{x'}\right) \\
&= -\left(\frac{9}{2}\times 10^{-1}\,\mathrm{N}\right)\vec{1}_{x'}, \\
\vec{F}_{3\to 1} &= \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0\, 2l^2}\left(\frac{-\vec{1}_{x'}-\vec{1}_{y'}}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \left(9\times 10^9\,\mathrm{Nm^2/C}\right)\frac{(-10^{-6}\,\mathrm{C})\left(\sqrt{2}\times 10^{-6}\,\mathrm{C}\right)}{2\times(10^{-1}\,\mathrm{m})^2}\left(\frac{-\vec{1}_{x'}-\vec{1}_{y'}}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \left(\frac{9}{2}\times 10^{-1}\,\mathrm{N}\right)\left(\vec{1}_{x'}+\vec{1}_{y'}\right), \\
\vec{F}_{4\to 1} &= \frac{q_1 q_4}{4\pi\epsilon_0\, l^2}\left(-\vec{1}_{y'}\right) \\
&= \left(9\times 10^9\,\mathrm{Nm^2/C}\right)\frac{(-10^{-6}\,\mathrm{C})\,(1/2\times 10^{-6}\,\mathrm{C})}{(10^{-1}\,\mathrm{m})^2}\left(-\vec{1}_{y'}\right) \\
&= \left(\frac{9}{2}\times 10^{-1}\,\mathrm{N}\right)\vec{1}_{y'}.
\end{aligned}$$

Soit la somme vectorielle,

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 &= -\left(\frac{9}{2}\times 10^{-1}\,\mathrm{N}\right)\vec{1}_{x'}+\left(\frac{9}{2}\times 10^{-1}\,\mathrm{N}\right)\left(\vec{1}_{x'}+\vec{1}_{y'}\right)+\left(\frac{9}{2}\times 10^{-1}\,\mathrm{N}\right)\vec{1}_{y'} \\
&= \left(9\times 10^{-1}\,\mathrm{N}\right)\vec{1}_{y'}.
\end{aligned}$$

La norme de la résultante des trois forces appliquées à la charge 1 est

$$\begin{aligned}
\|\vec{F}_1\| &= \sqrt{(9\times 10^{-1}\,\mathrm{N})^2} \\
&= 9\times 10^{-1}\,\mathrm{N} \;=\; 0{,}9\,\mathrm{N}.
\end{aligned}$$

Cette force est dirigée suivant l'axe y' et pointe dans le même sens que celui-ci.

b) La force qu'exerce ce champ électrique sur la charge 1 est donnée par

$$\vec{F}_E \;=\; q_1\vec{E}.$$

La norme de cette force est donc donnée par

$$\|\vec{F}_E\| \;=\; |q_1|E \;=\; (10^{-6}\,\mathrm{C})(4\times 10^5\,\mathrm{N/C}) \;=\; 4\times 10^{-1}\,\mathrm{N} \;=\; 0,4\,\mathrm{N}$$

et celle-ci est orienté dans la même direction que le champ électrique $\vec{E}$ mais pointe dans le sens opposé car la charge q_1 est négative.

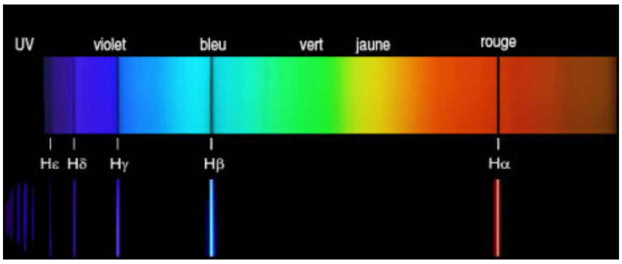
c) La force totale exercée sur q_1 est la somme vectorielle de la force résultante qu'exercent ensemble les différentes charges q_2, q_3 et q_4 et de la force qu'exerce le champ électrique $\vec{E}$:

$$\vec{F}_{tot} \;=\; \vec{F}_1+\vec{F}_E.$$

Ces deux forces sont alignées sur le même axe mais pointent dans des sens opposés. La norme de $\vec{F}_{tot}$ est donc donnée par la valeur absolue de la différence des $\|\vec{F}_1\|$ et $\|\vec{F}_E\|$.

$$\|\vec{F}_{tot}\| \;=\; \|\vec{F}_1\|-\|\vec{F}_E\| \;=\; 0{,}9\,\mathrm{N}-0{,}4\,\mathrm{N} \;=\; 0{,}5\,\mathrm{N}$$

Puisque $\|\vec{F}_1\| > \|\vec{F}_E\|$, $\vec{F}_{tot}$ pointe dans le même sens que $\vec{F}_1$.



Photographie du spectre de l'hydrogène placé sous une image de l'entiereté du spectre visible

Question 6 (3 points) Une étoile est une source de lumière dont on peut enregistrer le spectre grâce à un spectrographe. Un spectre d'étoile présente des raies lumineuses à des longueurs d'onde spécifiques, c'est-à-dire qu'il exprime de quelles couleurs est composée la lumière de l'étoile.
Une astronome s'intéresse à la raie de l'hydrogène Hα dont la longueur d'onde, pour un échantillon d'hydrogène mesuré dans l'observatoire, est λ_0 (de façon équivalente, sa fréquence sera notée f_0).
L'étoile A a une vitesse radiale v_A (la vitesse radiale est la vitesse de l'étoile sur la ligne fictive reliant l'observatoire à l'étoile. On considère l'observatoire au repos). L'étoile est composée d'hydrogène, et lorsque l'astronome enregistre son spectre, elle constate que la raie Hα a une longueur d'onde $\lambda_\text{A} = 656{,}1\,\text{nm}$ (on notera sa fréquence f_A).

a) Nommez le phénomène physique qui explique pourquoi la longueur d'onde observée de l'étoile en mouvement λ_A est différente de la longueur d'onde mesurée pour l'échantillon présent dans l'observatoire. Exprimez λ_A en fonction de λ_0 pour les deux cas possibles.
Pour vous aider, faites un schéma de la situation et exprimez dans un premier temps f_A en fonction de f_0.

b) L'appareil permettant de déterminer λ_0 est cassé mais l'astronome décide d'utiliser une autre étoile dont elle connaît la vitesse radiale pour redéterminer λ_0. L'étoile B s'éloigne de l'astronome avec une vitesse radiale $v_\text{B} = 127\,\text{km/s}$. L'astronome constate que pour cette étoile, la raie Hα a une longueur d'onde $\lambda_\text{B} = 656{,}6\,\text{nm}$ (on notera sa fréquence f_B). En déduire la valeur de λ_0.

c) Comparez λ_0 et λ_A et choisissez l'une des expressions obtenues en a) afin de déterminer la vitesse radiale de l'étoile A v_A.

Solution.

a) Il s'agit de l'effet Doppler. Selon la formule vue au cours,

$$f_\text{A} = f_0 \frac{c}{c \pm v_\text{étoile}},$$

où le signe $\pm$ est déterminé par si l'étoile s'approche ou s'éloigne. En terme de longueur d'onde, cette formule devient

$$\lambda_\text{A} = \lambda_0 \frac{c \pm v_\text{étoile}}{c}.$$

b) On isole ici λ_0 et pour une étoile qui s'éloigne on choisit le signe positif,

$$\lambda_0 = \lambda_\text{B} \frac{c}{c + v_\text{étoile}} = 656{,}3\,\text{nm}.$$

c) La longueur d'onde observée est plus basse que la longueur d'onde normale : l'étoile s'approche de nous. On choisit alors le signe négatif dans la formule. Il faut ensuite isoler la vitesse :

$$\lambda_0 = \lambda_\text{A} \frac{c}{c - v_\text{étoile}}$$
$$v_\text{étoile} = c\left(\frac{\lambda_\text{A}}{1 - \lambda_0}\right) = 91{,}4\,\text{km/s}.$$

Physique 1 – PHYS-F104 (2018-2019)

Examen de janvier 2019

11 janvier 2019

Nom :

Prénom :

N° de matricule :

Section (entourer) : Biologie — Géographie — Géologie — Pharmacie

---

Consignes générales :

1. Écrivez immédiatement vos prénom, nom, numéro de matricule et section.
2. Vérifiez que votre énoncé comporte bien **7 feuilles** (6 questions).
3. Ne dégrafez pas les pages.
4. Vous n'avez droit à rien d'autre que de quoi écrire, votre formulaire, votre calculatrice et votre carte d'étudiant.
5. Les GSM, tablettes, smartwatches et autres moyens de communication sont interdits. Ils doivent être éteints et rangés dans les sacs le long du mur. En aucun cas vous ne pouvez avoir un GSM (ou autre moyen de communication) à portée de main, même éteint.
6. Ne répondez pas en rouge, cette couleur étant réservée pour la correction.
7. **Les réponses doivent toutes être clairement justifiées et les unités doivent être indiquées pour les résultats numériques.**
8. En cas de besoin, vous prendrez **l'accélération gravitationnelle terrestre** $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$.
9. Cet examen dure **2 heures (120 minutes)**.

Bon travail !

/3	/4	/3	/3	/4	/3	/20

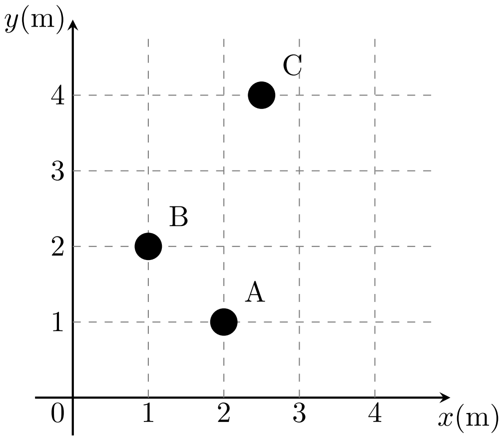
Question 1 (3 points) Trois billes massives sont placées sur une table. Leurs positions sont identifiées à l'aide d'un repère orthonormé (Oxy). Les axes sont gradués en mètres.

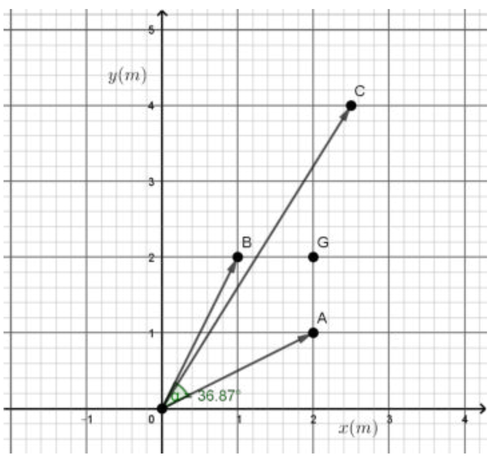
a) Donnez les vecteurs positions pour ces trois objets individuellement.

b) Calculez l'angle entre les vecteurs positions des billes A et B.

c) Les masses des billes sont respectivement données par $m_\mathrm{A} = 4\,\mathrm{kg}$, $m_\mathrm{B} = 1\,\mathrm{kg}$ et $m_\mathrm{C} = 2\,\mathrm{kg}$. Trouvez la position du centre de masse pour l'ensemble des 3 billes.

Note : les vecteurs peuvent être présentés au choix sous forme de coordonnées ou construits sur base des vecteurs de norme unité $\vec{1}_x$ et $\vec{1}_y$.





Solution.

a) Le vecteur position est le vecteur entre l'origine et le point considéré.
$\vec{OA} = \left((2-0)\vec{1}_x + (1-0)\vec{1}_y\right)\mathrm{m} = \left(2\,\vec{1}_x + 1\,\vec{1}_y\right)\mathrm{m}$ ou encore $\vec{OA} = (2;1)\mathrm{m}$
$\vec{OB} = \left((1-0)\vec{1}_x + (2-0)\vec{1}_y\right)\mathrm{m} = \left(1\,\vec{1}_x + 2\,\vec{1}_y\right)\mathrm{m}$ ou encore $\vec{OB} = (1;2)\mathrm{m}$
$\vec{OC} = \left((2{,}5-0)\vec{1}_x + (4-0)\vec{1}_y\right)\mathrm{m} = \left(2{,}5\,\vec{1}_x + 4\,\vec{1}_y\right)\mathrm{m}$ ou encore $\vec{OC} = (2{,}5;4)\mathrm{m}$

b) On trouve l'angle grâce aux deux formules du produit scalaire.
$\vec{OA}\cdot\vec{OB} = \left|\vec{OA}\right|\left|\vec{OB}\right|\cos\alpha$, mais on a aussi que $\vec{OA}\cdot\vec{OB} = OA_xOB_x + OA_yOB_y$.
On a donc que $\cos\alpha = \dfrac{OA_xOB_x + OA_yOB_y}{\left|\vec{OA}\right|\left|\vec{OB}\right|} = \dfrac{2\times1+1\times2}{\sqrt{2^2+1^2}\sqrt{1^2+2^2}} = \dfrac{4}{5}$.
L'angle est finalement donné par $\alpha = \arccos\left(\dfrac{4}{5}\right) = 36{,}87° = 0{,}64\,\mathrm{rad}$

c) Le centre de masse G est donné par la formule

$$\vec{OG} = \frac{m_A\vec{OA} + m_B\vec{OB} + m_c\vec{OC}}{m_A + m_B + m_C} = \frac{4\,\mathrm{kg}\left(2\ \vec{1}_x + 1\ \vec{1}_y\right)\mathrm{m} + 1\,\mathrm{kg}\left(1\ \vec{1}_x + 2\ \vec{1}_y\right)\mathrm{m} + 2\,\mathrm{kg}\left(2{,}5\ \vec{1}_x + 4\ \vec{1}_y\right)\mathrm{m}}{(4+1+2)\,\mathrm{kg}}$$

$$= \left(2\ \vec{1}_x + 2\ \vec{1}_y\right)\mathrm{m}$$

Question 2 (4 points) Par une journée de grand vent, un gratte-ciel de 400 m de hauteur oscille de manière appréciable. Un accéléromètre placé en haut de la tour indique que le module de l'accélération causée par l'oscillation atteint une valeur maximale de 0,34 $\mathrm{m/s^2}$ à intervalles réguliers. La période de l'oscillation est de 12 s. Pour ce type de mouvement, vous pouvez supposer que la position horizontale de l'accéléromètre s'écrit comme $x(t) = A\cos(\omega t)$ où A est l'amplitude du mouvement et ω la vitesse angulaire.
Déterminez :

a) L'amplitude de l'oscillation au sommet de la tour.

b) La vitesse maximale que peut atteindre le sommet de la tour au cours de l'oscillation.

c) La vitesse minimale (en valeur absolue) que peut atteindre le sommet de la tour au cours de l'oscillation.

d) L'angle d'inclinaison maximal de la tour par rapport à la normale au sol en supposant que la tour oscille sans plier (elle demeure rectiligne de la base au sommet).

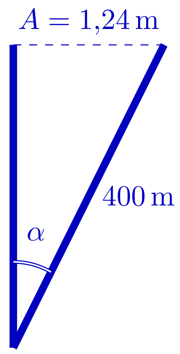
Solution.

a) L'accélération maximale de l'oscillation est donnée par $a_{\max} = A\omega^2$ où A est l'amplitude. ω est la vitesse angulaire, donnée par $\omega = \frac{2\pi}{T}$. On peut donc isoler l'amplitude et la trouver : $A = \frac{a_{\max}}{\omega^2} = \frac{a_{\max}T^2}{(2\pi)^2} = 1{,}24\,\mathrm{m}$

b) La vitesse maximale de l'oscillation est donnée par $v_{\max} = A\omega = 0{,}65\,\mathrm{m/s}$.

c) Lors de l'oscillation, le bâtiment doit faire demi-tour aux extrémités. A ces moments là, la vitesse est forcément nulle (elle passe de positive à négative, ou l'inverse). La vitesse minimale en valeur absolue que le sommet de la tour atteint est zéro, $v_{\min} = 0$.

d) Le bâtiment forme avec la verticale un triangle rectangle. On trouve $\alpha_{\max} = \arcsin\left(\frac{1{,}24}{400}\right) = 0{,}18° = 0{,}003\,\mathrm{rad}$.

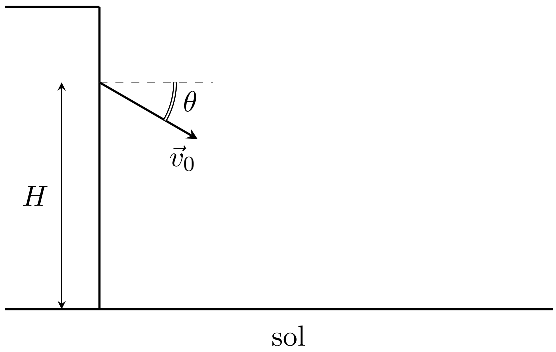


Question 3 (3 points) Aya Nakamura rentre tard de soirée et se rend compte qu'elle a oublié ses clés. Niska, qui est resté à la maison, n'a aucune envie de descendre lui ouvrir. Il lui lance les clefs par la fenêtre avec une vitesse initiale $v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$, un angle $\theta = 30°$ avec l'horizontale vers le bas et depuis une hauteur $H = 6{,}0\,\mathrm{m}$ vis-à-vis du sol. Les frottements de l'air sont négligeables.

a) Donnez les équations qui vous permettent de décrire la trajectoire des clés pour ce type de mouvement. Entourez-y les paramètres connus et donnez leur valeur.

b) Combien de temps mettent les clés pour atteindre le sol ?

c) À quelle distance de l'immeuble Aya doit-elle se tenir si elle veut pouvoir les attraper ? Supposez qu'elle met ses mains à une hauteur proche du sol.



Solution.

a) Sur l'axe x, aucune force (donc accélération) ne s'exerce. Les clés iront en MRU, et auront une vitesse initiale donnée par la composante x de la vitesse $\vec{v}_0$:
$x(t) = x_0 + v_x t = (v_0 \cos\theta)\,t = (10\,\mathrm{m/s}\ \cos(30°))\,t = 5\sqrt{3}\,\mathrm{m/s}\ t$ où t est exprimé en secondes.

Sur l'axe y, l'accélération de la gravité est présente. Les clés iront en MRUA, et auront une vitesse initiale donnée par la composante y de la vitesse $\vec{v}_0$:
$y(t) = y_0 - v_y t - \frac{1}{2}gt^2 = y_0 - (v_0 \sin\theta)\,t - \frac{1}{2}gt^2 = 6{,}0\,\mathrm{m} - (10\,\mathrm{m/s}\ \sin(30°))\,t - \frac{1}{2}9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\ t^2$
$= -4{,}9\,\mathrm{m/s^2}\ t^2 - 5\,\mathrm{m/s}\ t + 6\,\mathrm{m}$ où t est exprimé en secondes.

b) Il faut regarder quand $y(t) = 0$.
$0 = -4{,}91t^2 - 5t + 6$ donne via la méthode du discriminant deux solutions : $t = 0{,}71\,\mathrm{s}$ et $t = -1{,}7\,\mathrm{s}$. La seconde est à écarter, vu qu'elle est négative.

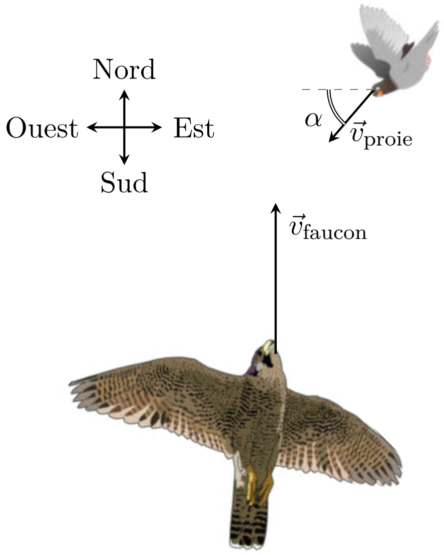
c) Regardons à quelle distance horizontale se trouvent les clés lorsqu'elles touchent le sol :
$x(0{,}71\,\mathrm{s}) = 5\sqrt{3}\,\mathrm{m/s} \times 0{,}71\,\mathrm{s} = 6{,}1\,\mathrm{m}$.

Question 4 (3 points) Un faucon pélerin de 1 000 g se dirige à une vitesse constante de 160 km/h, orientée vers le nord en direction d'une proie de 700 g. Il attrape alors cette proie qui se promenait dans les airs à une vitesse constante de 20 km/h, orientée vers le sud-ouest avec un angle α de 40° par rapport à l'axe ouest-est. Cet évènement peut s'apparenter à une collision. Vous pouvez supposer que l'effet de forces extérieures (pesanteur, frottements de l'air, portance des ailes, etc.) est négligeable le temps de la collision.

a) S'agit-il d'une collision élastique ou inélastique ? Justifiez en une phrase.

b) Déterminez la vitesse (norme et direction en précisant l'angle avec l'axe ouest-est) du faucon portant la proie juste après la collision.

c) Calculez la différence d'énergie cinétique entre les instants juste avant et juste après la collision.



Solution.

a) C'est une collision inélastique vu que les corps impliqués dans la collision restent liés après le choc.

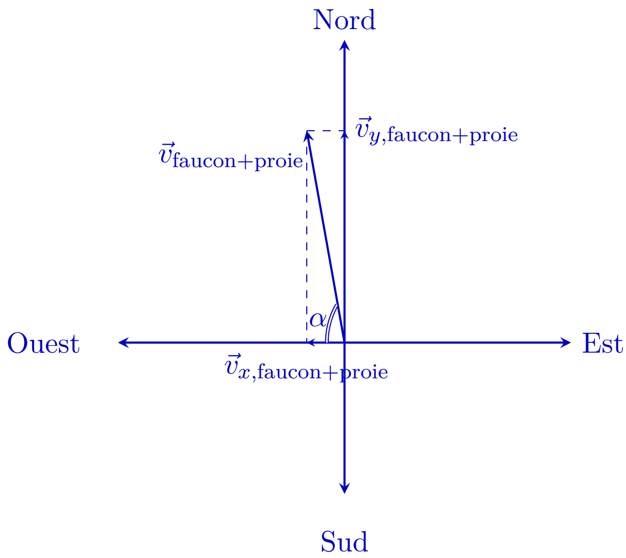
b) On va utiliser la conservation de la quantité de mouvement. Dans cet exercice, les unités peuvent rester en gramme et en kilomètre/heure sans poser de problème car elles finissent par se simplifier et aucune constante ne nécessite spécifiquement les unités du SI. En cas de doute de votre part, préférez toujours convertir en kilogramme et en mètre/seconde.
$m_{\text{faucon}}\vec{v}_{\text{faucon}} + m_{\text{proie}}\vec{v}_{\text{proie}} = (m_{\text{faucon}} + m_{\text{proie}})\,\vec{v}_{\text{faucon+proie}}$.

D'après la situation, on a que
$\vec{v}_{\text{faucon}} = (0; 160)\,\text{km/h}$ et $\vec{v}_{\text{proie}} = (-20\cos(40°); -20\sin(40°))\,\text{km/h}$.

L'équation de conservation de la quantité de mouvement donne alors
$m_{\text{faucon}}\,(0; 160) + m_{\text{proie}}\,(-20\,\text{km/h}\ \cos(40°); -20\,\text{km/h}\ \sin(40°))$
$= (m_{\text{faucon}} + m_{\text{proie}})\,(v_{x,\text{faucon+proie}}; v_{y,\text{faucon+proie}})$.

Regardons chacune des composantes séparément, ce qui nous fournit deux équations :
$m_{\text{faucon}}0 + m_{\text{proie}}(-20\,\text{km/h}\ \cos(40°)) = (m_{\text{faucon}} + m_{\text{proie}})\,v_{x,\text{faucon+proie}}$
$m_{\text{faucon}}160\,\text{km/h} + m_{\text{proie}}(-20\,\text{km/h}\ \sin(40°)) = (m_{\text{faucon}} + m_{\text{proie}})\,v_{y,\text{faucon+proie}}$

Il reste donc à isoler les composantes $v_{x,\text{faucon+proie}}$ et $v_{y,\text{faucon+proie}}$.
$v_{x,\text{faucon+proie}} = \dfrac{m_{\text{proie}}(-20\,\text{km/h}\;\cos(40°))}{(m_{\text{faucon}} + m_{\text{proie}})} = -6{,}31\,\text{km/h} = -1{,}75\,\text{m/s}$
$v_{y,\text{faucon+proie}} = \dfrac{m_{\text{faucon}}160\,\text{km/h} + m_{\text{proie}}(-20\,\text{km/h}\;\sin(40°))}{(m_{\text{faucon}} + m_{\text{proie}})} = 88{,}82\,\text{km/h} = 24{,}67\,\text{m/s}$
On finit avec $\vec{v}_{\text{faucon+proie}} = (-1{,}75; 24{,}67)\,\text{m/s}$, qu'on peut également écrire $\vec{v}_{\text{faucon+proie}} = \left(-1{,}75\;\vec{1}_x + 24{,}67\;\vec{1}_y\right)\text{m/s}$.
La norme de ce vecteur vitesse est $|\vec{v}_{\text{faucon+proie}}| = \sqrt{(-1{,}75)^2 + (24{,}67)^2} = 24{,}73\,\text{m/s}$.
Pour trouver l'angle α que fait le vecteur avec l'horizontale, on peut utiliser ses composantes :
$\alpha = \arctan\left(\dfrac{v_{y,\text{faucon+proie}}}{v_{x,\text{faucon+proie}}}\right) = 85{,}94°$

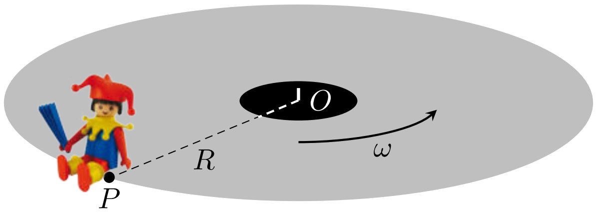


c) $\Delta E_c = E_{c,\text{après}} - E_{c,\text{avant}} = \frac{1}{2}\left(m_{\text{faucon}} + m_{\text{proie}}\right)|\vec{v}_{\text{faucon+proie}}|^2 - \frac{1}{2}\left(m_{\text{faucon}}\,|\vec{v}_{\text{faucon}}|^2 + m_{\text{proie}}\,|\vec{v}_{\text{proie}}|^2\right)$
$= 478{,}62\,\text{J}$

Question 5 (4 points) Un Playmobil est confortablement installé sur le bord d'un disque placé sur un tourne-disque dont la vitesse de rotation est ajustable. Le rayon du disque et la masse du Playmobil sont donnés par $R = 20\,\mathrm{cm}$ et $m = 20\,\mathrm{g}$. On se place dans le référentiel du laboratoire, au repos par rapport au disque qui tourne.

a) On actionne le tourne-disque pour que le disque tourne à une vitesse angulaire modérée : 1/4 de tour par seconde.
   1) Quelle est la vitesse angulaire exprimée en rad/s ?
   2) Que vaut l'intensité de l'accélération centripète du Playmobil ?
   3) Donnez l'expression de la deuxième loi de Newton pour cette situation, décomposée selon deux axes. Considérez un axe horizontal qui joint les points O et P et un axe vertical.

b) On augmente progressivement la vitesse angulaire. À partir d'une certaine valeur limite, que nous nommons ω^*, la friction ne suffit plus pour maintenir le Playmobil en place, il est expulsé.
   1) Si $\omega^* = 2{,}24\,\mathrm{rad/s}$, que vaut le coefficient de frottement statique μ_s ?
   2) **Bonus (+1 point)** : Considérez cette fois-ci les valeurs accompagnées d'une incertitude dues aux instruments de mesure à disposition : $R = (20 \pm 1)\,\mathrm{cm}$, $m = (20 \pm 1)\,\mathrm{g}$ et $\omega^* = (2{,}24 \pm 0{,}01)\,\mathrm{rad/s}$. Quelles sont à présent les valeurs possibles pour μ_s ?



Solution.

a) 1) Si le disque fait un quart de tour par seconde, il met quatre secondes pour faire un tour. Sa période est donc de quatre secondes. $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$ rad/s

   2) $a_c = R\omega^2 = 0{,}2 \times \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2 = 0{,}49\,\mathrm{m/s^2}$

   3) On va avoir trois forces dans ce système : le poids du Playmobil, la réaction du disque dessus et la force de frottement. Comme cet objet est en MCU, il faut qu'au final, la résultante des forces qui s'applique sur lui joue le rôle d'une force centripète.
   $\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{frottements}} = ma_c$. Décomposons maintenant
   Sur l'axe x :
   $F_{\text{frottements}} = ma_c$.

   Sur l'axe y :
   $N - mg = 0$.

b) 1) $F_{\text{frottements}} = \mu_s N = \mu_s mg$ où on a utilisé la deuxième loi de Newton décomposée sur l'axe y. On sait également par la deuxième loi de Newton décomposée sur l'axe x que cette force de frottement joue le rôle de la force centripète, $F_{\text{frottements}} = ma_c = mR\omega^{*2}$.
   On peut égaliser les deux formules différentes : $\mu_s mg = mR\omega^{*2}$. On isole le coefficient μ_s et $\mu_s = \dfrac{R\omega^{*2}}{g} = 0{,}102$.

2) **Bonus (+1 point)** : On va calculer la borne inférieur et la borne supérieure sur les valeurs possibles de μ_s en réutilisant ce que l'on a trouvé au point précédent et en remplaçant les données par les valeurs maximales ou minimales.

$$\mu_{s,\mathrm{min}} = \frac{(0{,}2 - 0{,}01)(2{,}24 - 0{,}01)^2}{9{,}81} = 0{,}096$$

$$\mu_{s,\mathrm{max}} = \frac{(0{,}2 + 0{,}01)(2{,}24 + 0{,}01)^2}{9{,}81} = 0{,}11$$

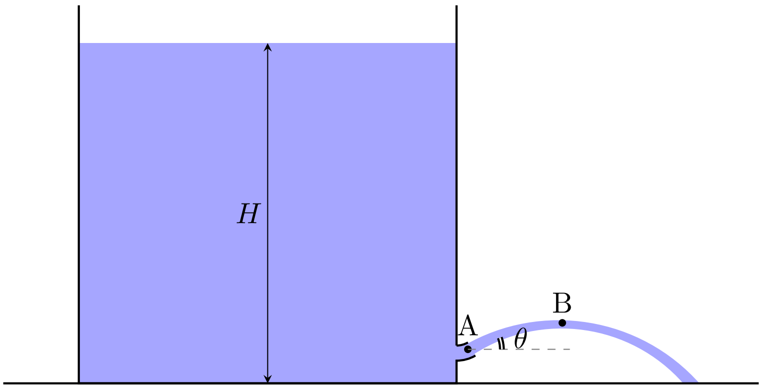
En tenant compte des incertitudes expérimentales, $0{,}096 \leq \mu_s \leq 0{,}11$.

Question 6 (3 points) Vous disposez d'une grande bassine d'eau remplie jusqu'à $H = 110\,\text{cm}$ de haut. À une hauteur de $10\,\text{cm}$ au-dessus du sol, un court tuyau permet à l'eau de s'échapper, au point A sur le schéma. Il est courbé vers le haut de sorte à ce que l'eau le quitte avec un angle θ non nul par rapport à l'horizontale. Le jet d'eau visible en sortie atteint une hauteur maximale de $15\,\text{cm}$ au-dessus du sol, au point B. Pour résoudre cet exercice, vous pouvez supposer que l'écoulement est laminaire, incompressible et non visqueux. Vous supposerez également que la vitesse de l'eau à la surface de la bassine est négligeable et que l'eau au voisinage du point A est en contact avec l'air.

a) Trouvez la norme de la vitesse de sortie de l'eau au point A.

b) Trouvez la norme de la vitesse de l'eau au point B.

c) Trouvez l'angle de sortie θ.



Solution.

a) On utilise Bernoulli entre un point O au sommet de la bassine et un point situé au point A. $\frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g h_A + P_A = \frac{1}{2}\rho v_O^2 + \rho g h_O + P_O$. La vitesse de l'eau au point O est nulle. Sa hauteur correspond à la hauteur H de la bassine. La pression y vaut la pression atmosphérique, vu que c'est en contact avec l'air. Au point A, on sait que la hauteur vaut $10\,\text{cm}$ et que la pression y vaut également la pression atmosphérique, vu que c'est aussi en contact avec l'air. Dans ce cas,

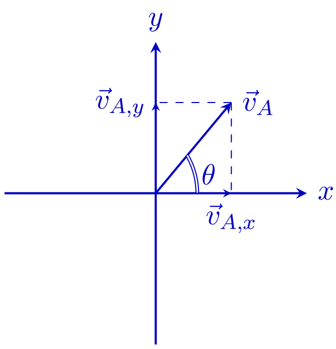
$$\frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g h_A + P_{atm} = \frac{1}{2}\rho 0^2 + \rho g H + P_{atm},$$
$$\frac{1}{2}\rho v_A^2 = \rho g(H - h_A),$$
$$v_A^2 = 2g(H - h_A),$$
$$v_A = \sqrt{2g(H - h_A)} = 4{,}4\,\text{m/s}.$$

b) On va utiliser la conservation de l'énergie mécanique. On connait la vitesse (donc l'énergie cinétique) et la hauteur (donc l'énergie potentielle) au point A, et on connait la hauteur (donc l'énergie potentielle) au point B. On va pouvoir en tirer l'énergie cinétique au point B, dont on tire la norme de la vitesse.

$$E_{cin,A} + E_{pot,A} = E_{cin,B} + E_{pot,B},$$
$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B,$$
$$v_B = \sqrt{v_A^2 + 2g(h_A - h_B)} = 4{,}3\,\text{m/s}.$$

c) Après avoir été éjectée par le point A, l'eau ne subit aucune accélération sur l'axe x. La composante x de la vitesse est ainsi constante (l'eau subit un MRU sur l'axe x).
De plus, comme le point B est le sommet de la trajectoire, on y a que la composante y est nulle (c'est le moment où la composante y passe de positive, donc vers le haut, à négative, donc vers le bas). La norme de la vitesse que nous avons trouvé en b) pour le point B correspond en fait à

la composante x de la vitesse, qui est toujours la même et qui a du coup cette même valeur au point A. En résumé,
$v_B = v_{A,x} = v_A \cos(\theta)$. On isole l'angle, $\theta = \arccos\left(\dfrac{v_B}{v_A}\right) = 13{,}37° = 0{,}23\,\mathrm{rad}$.



Physique 1 – PHYS-F104 (2018-2019)

Examen de juin 2019
Première partie

13 juin 2019

Nom :

Prénom :

N° de matricule :

Section (entourer) : Biologie — Géographie — Géologie — Pharmacie

---

Consignes générales :

1. Écrivez immédiatement vos nom, prénom, numéro de matricule et section.
2. Vérifiez que votre énoncé comporte bien **7 feuilles** (6 questions).
3. Ne dégrafez pas les pages.
4. Vous n'avez droit à rien d'autre que de quoi écrire, votre formulaire, votre calculatrice et votre carte d'étudiant.
5. Les GSM, tablettes, smartwatches et autres moyens de communication sont interdits. Ils doivent être éteints et rangés dans les sacs le long du mur. En aucun cas vous ne pouvez avoir un GSM (ou autre moyen de communication) à portée de main, même éteint.
6. Ne répondez pas en rouge, cette couleur étant réservée pour la correction.
7. **Les réponses doivent toutes être clairement justifiées et les unités doivent être indiquées pour les résultats numériques.**
8. En cas de besoin, vous prendrez les valeurs de constantes suivantes :
   accélération gravitationnelle terrestre : $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$
   constante gravitationnelle universelle : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
9. Cette partie dure **2 heures (120 minutes)**.

Bon travail !

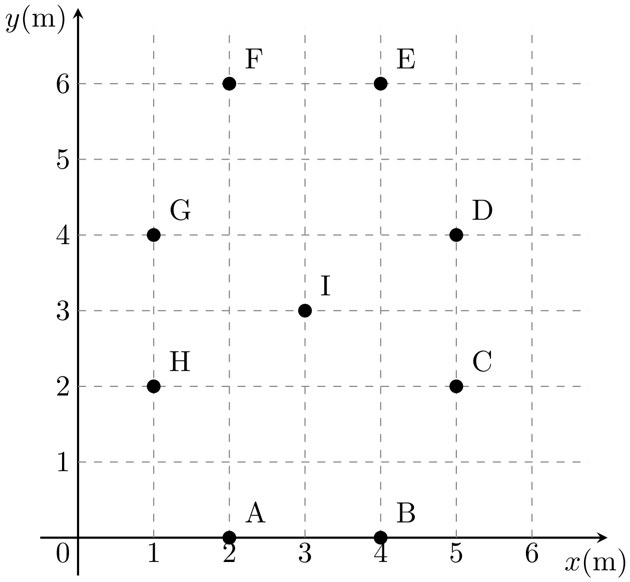
/3	/3	/4	/4	/3	/3	/20

Question 1 (3 points) Trois masses sont placées sur trois des sommets d'un octogone. Deux masses $m_1 = 92\,\text{kg}$ sont placées sur les points A et E tandis qu'une masse $m_2 = 85\,\text{kg}$ est placée en D.

a) Déterminez le vecteur position de chacune des trois masses.

b) Déterminez le vecteur position du centre de masse du système.

c) Quelle masse faut-il rajouter en H pour que le centre de masse se retrouve pile au point I, au centre de l'octogone ? Justifiez.



Solution.

a) $\vec{A} = (2;0)$ m, $\vec{E} = (4;6)$ m, $\vec{D} = (5;4)$ m.

b) $x_{\text{cm}} = \dfrac{m_1\vec{A} + m_1\vec{E} + m_2\vec{D}}{m_1 + m_1 + m_2} = \dfrac{(184;0) + (368;552) + (425;340)}{92 + 92 + 85} = (\dfrac{977}{269}, \dfrac{892}{269})$ m

c) On voit qu'il doit s'agir d'une masse m_2 par symétrie. En effet, les masses m_1 en A et E sont sur des sommets opposées et de même valeur, le centre de masse pour A et E se trouve pile entre ces deux points, en I. Il doit en être de même pour les masses en D et H : il faut mettre une masse m_2 au point H.

L'argument de symétrie suffisait, mais si on veut le montrer par calcul :

$$\frac{m_1\vec{A} + m_1\vec{E} + m_2\vec{D} + x\vec{H}}{m_1 + m_1 + m_2 + x} = \vec{I}$$
$$m_1\vec{A} + m_1\vec{E} + m_2\vec{D} + x\vec{H} = \vec{I}(m_1 + m_1 + m_2 + x)$$
$$x(\vec{H} - \vec{I}) = \vec{I}(m_1 + m_1 + m_2) - m_1\vec{A} - m_1\vec{E} - m_2\vec{D}$$

On développe alors les vecteurs positions en terme de leurs composantes :

$$x(1-3; 2-3) = (3;3)(92+92+85) - 92(2,0) - 92(4;6) - 85(5;4)$$
$$x(-2;-1) = (-170;-85)$$
$$x(2;1) = (170;85)$$
$$(2x;x) = (170;85)$$

Ceci donne donc deux équations, une pour chaque composante

$$2x = 170 \qquad x = 85$$
$$x = 85\,\mathrm{kg} \qquad x = 85\,\mathrm{kg}$$

Question 2 (3 points) Une masse de 5,5 kg reposant sur un sol sans frottement est attachée à l'extrémité d'un ressort de constante d'élasticité $k = 50\,\mathrm{N/m}$ mis à l'horizontale. Cette masse est déplacée de 10 cm en comprimant le ressort, puis lâchée sans vitesse initiale. Le mouvement s'effectue dans le plan horizontal.

a) Quelle est sa vitesse maximale ?

b) À quelle position du ressort l'accélération de la masse est nulle ?

c) Quelle est l'énergie mécanique du système ?

Solution.

a) $v_{\text{max}} = A\omega = 0,1 \times \sqrt{\dfrac{50}{5,5}} = 0{,}30\,\mathrm{m/s}$

b) À la position d'équilibre, celle où se trouvait la masse avant qu'on la comprime.

c) L'énergie mécanique correspond à l'énergie totale (cinétique + potentielle) du système. Une manière facile de la déterminer est de regarder un moment où toute l'énergie du système est cinétique (lorsque la masse passe par la position d'équilibre), ou bien un moment où toute l'énergie est potentielle (lorsque la masse est à l'allongement maximal).

   Vu qu'on a déjà déterminé la vitesse maximale, utilisons le premier cas : $E_{\text{mec}} = E_{\text{cin, max}} = \dfrac{1}{2} m v_{\text{max}}^2 = \dfrac{1}{2} m A^2 \omega^2 = 0{,}25\,\mathrm{J}$

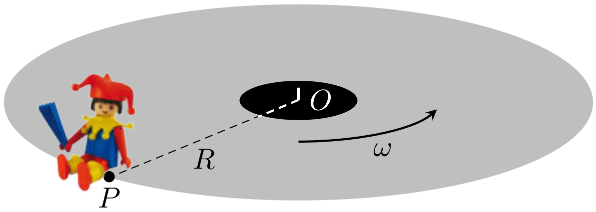
Question 3 (4 points) Daddy K est un célèbre DJ belge actif depuis la fin des années 80, lorsqu'il faisait partie du groupe Benny B. Un de ses hits était intitulé "Do you speak Martien ?". Daddy K se rend donc sur Mars muni de sa platine tourne-disque, d'un disque de Boney M., et d'un Playmobil. Le rayon du disque est de $R = 20\,\text{cm}$ et la masse du Playmobil est de $m = 20\,\text{g}$.
Daddy K place le disque sur la platine, dépose le Playmobil au bord du disque et actionne le tourne-disque. On se place dans le référentiel de Daddy K, au repos par rapport au disque qui tourne.

a) Donnez l'expression de l'intensité de l'accélération centripète du Playmobil en fonction de la vitesse angulaire ω.

b) Donnez l'expression de la 2e loi de Newton pour cette situation, décomposée selon deux axes. Considérez un axe horizontal qui joint les points O et P, ainsi qu'un axe vertical.

c) Daddy K augmente progressivement la vitesse angulaire. A la valeur $\omega = \omega^* = 1{,}375\,\text{rad/s}$, le Playmobil est expulsé. En connaissant le coefficient de frottement statique $\mu_s = 0,102$ entre le Playmobil et le disque, déduisez-en l'accélération de la pesanteur g sur Mars.

d) Sachant que la masse de la Terre vaut $M_T = 6{,}10 \times 10^{24}\,\text{kg}$, que le rayon de la Terre vaut $R_T = 6\,371\,\text{km}$ et que le rayon de Mars vaut $R_M = 3\,390\,\text{km}$, que vaut la masse de Mars ?



Solution.

a) $a_c = R\omega^2$

b) On va avoir trois forces dans ce système : le poids du Playmobil, la réaction du disque dessus et la force de frottement. Comme cet objet est en MCU, la résultante des forces n'est pas nulle. Il faut qu'au final, la résultante des forces qui s'applique sur lui joue le rôle d'une force centripète. $\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{frottements}} = \vec{F}_{\text{centriptère}} = m\vec{a}_c$. Décomposons maintenant.

Sur l'axe x (l'axe horizontal qui joint les points O et P) :
$F_{\text{frottements}} = ma_c$.

Sur l'axe y (l'axe vertical, perpendiculaire au disque) :
$N - mg = 0$. Ici, g est celui de Mars, vu qu'on se trouve sur cette planète.

c) $F_{\text{frottements}} = \mu_s N = \mu_s mg$ où on a utilisé la deuxième loi de Newton décomposée sur l'axe y. On sait également par la deuxième loi de Newton décomposée sur l'axe x que cette force de frottement joue le rôle de la force centripète, $F_{\text{frottements}} = ma_c = mR\omega^{*2}$. On a utilisé ω^* dans l'accélération centripète vu que c'est à cette valeur là uniquement que la force de frottement statique atteint sa valeur maximale, et que la formule $F_{\text{frottements}} = \mu_s N$ est valable.

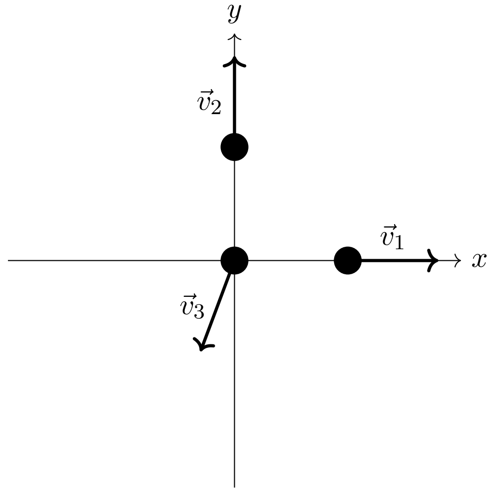
On peut égaliser les deux formules différentes : $\mu_s mg = mR\omega^{*2}$. Ici, on connait μ_s, m, R et ω^*. Il reste donc à isoler g, qui est l'accélération de la pensanteur martienne.
$g = \dfrac{R\omega^{*2}}{\mu_s} =$

d) Dans la formule compléte pour déterminer la force gravitationnelle subie par un objet sur la surface d'une planète, la masse de cette dernière ainsi que son rayon apparaissent : $F_g =$

$G\frac{m_{\text{objet}}M_{\text{planète}}}{R^2_{\text{planète}}}$. On résume souvent cette formule en $F_g = m_{\text{objet}}g$. Ceci signifie que l'accélération de la pesanteur g correspond à $\frac{GM_{\text{planète}}}{R^2_{\text{planète}}}$. Vu qu'on connait g sur Mars ainsi que le rayon de Mars R_M, on peut trouver M_M la masse de Mars : $M_M = \frac{gR_M^2}{G} = 5{,}08 \times 10^{23}\,\text{kg}$.

Question 4 (4 points) Un pétard posé sur le sol explose en trois fragments. Le premier, de masse égale à 1,5 grammes, part horizontalement à une vitesse de norme $|\vec{v}_1| = 12\,\mathrm{m/s}$. Le deuxième fragment a une masse de 4,0 grammes et part horizontalement, perpendiculairement au premier. Le troisième fragment a une masse de 3,0 grammes et part avec une vitesse de norme $|\vec{v}_3| = 7{,}2\,\mathrm{m/s}$.

a) Quelle quantité est conservée lors de cette explosion ?
b) Écrivez l'expression mathématique de cette loi de conservation pour ce système.
c) Avec quel angle par rapport à l'axe x part le troisième fragment ?
d) À quelle vitesse part le deuxième fragment ?



Solution.

a) La quantité de mouvement
b) Initialement, l'objet est au repos : $\vec{0} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3$.
c) Projetons la conservation de la quantité de mouvement sur l'axe x. Le vecteur $\vec{v}_3$ est dirigé vers la gauche : il prend donc un - devant lors de la projection. Pour alléger la notation, les normes, comme par exemple $|\vec{v}_1|$, seront simplement notées sans flèches, donc v_1.

$$\begin{aligned}
&m_1v_{1,x} + m_2v_{2,x} - m_3v_{3,x} = 0\\
&m_1v_1\cos(0°) + m_2v_2\cos(180°) - m_3v_3\cos\theta = 0\\
&m_1v_1 - m_3v_3\cos\theta = 0
\end{aligned}$$

On peut isoler l'angle θ dans cette expression, vu que tout le reste est connu, v_2 ayant disparu.

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{m_1v_1}{m_3v_3}\\
\theta &= \arccos\left(\frac{m_1v_1}{m_3v_3}\right)\\
&= 33°
\end{aligned}$$

d) Projetons cette fois sur y,

$$\begin{aligned}
&m_1v_1\sin(0°) + m_2v_2\sin(180°) - m_3v_3\sin\theta = 0\\
&m_2v_2 - m_3v_3\sin\theta = 0
\end{aligned}$$

On peut isoler v_2 vu qu'on connait maintenant θ :

$$v_2 = \frac{m_3v_3\sin\theta}{m_2} = 2{,}9\,\mathrm{m/s}$$

Question 5 (3 points) On donne les trois constantes physiques fondamentales suivantes : la vitesse de la lumière $c = 300\,000\,\mathrm{km/s}$, la constante gravitationnelle $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$ et la constante de Planck réduite $\hbar = 1 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$. On rappelle que le joule (J) est l'unité de l'énergie.

a) Quelles sont les unités de ces constantes dans le système MKS (mètre, kilogramme, seconde) ?

b) En combinant (multiplication, division, exponentiation, racine n-ième) les unités de ces trois constantes fondamentales, on peut construire une grandeur ayant les dimensions d'une longueur (en mètres). Cette longueur s'appelle la longueur de Planck, et représente l'échelle à partir de laquelle les effets de la gravitation quantique pourraient être ressentis. Déterminez l'expression de cette longueur en combinant les trois constantes fondamentales.

c) À partir des valeurs numériques des constantes fondamentales, donnez un ordre de grandeur pour la longueur de Planck.

Solution.

a) G est déjà en unités MKS : $[G] = \mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$ Pour c, il suffit de convertir les kilomètres en mètres : $[c] = \mathrm{m/s}$.

Pour $\hbar$, il faut se rappeler de la définition des joules. Si on ne s'en rappelle pas, on peut la retrouver à partir de n'importe quelle formule qui fait intervenir l'énergie. Par exemple, l'énergie cinétique : $E_c = \frac{1}{2}mv^2$. L'énergie, en joules, sera donc exprimée en $\mathrm{kg\,m^2/s^2}$. Ou encore, l'énergie potentielle : $E_p = mgh$. Vu que g est une accélération, ses unités sont des $\mathrm{m/s^2}$. Ceci fournit de nouveau que l'énergie, en joules, est équivalente à des $\mathrm{kg\,m^2/s^2}$. Du coup, $[\hbar] = \mathrm{J\,s} = \mathrm{kg\,m^2/s}$ est déjà en MKS.

b) Pour déterminer la relation qui donne des unités en mètres, et ce en utilisant les trois constantes fournies, il faut se fixer un premier objectif puis procéder par étapes.

Concrètement, ici, commençons par faire disparaitre les kilogrammes en combinant les deux constantes qui en ont (G et $\hbar$), vu qu'à la fin nous ne sommes plus censés en avoir. On pourra ensuite ajouter c sans problème vu que celui-ci ne contient pas de kilogrammes. Pour faire disparaitre les kilogrammes, il suffit de multiplier G (qui est en $\mathrm{kg^{-1}}$) et $\hbar$ (qui est en kg).
$[G\hbar] = \mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}} \times \mathrm{kg\,m^2/s} = \mathrm{m^5/s^3}$
On rajoute maintenant c afin de faire disparaitre les secondes : il va falloir diviser par c^3.
$\left[\frac{G\hbar}{c^3}\right] = \mathrm{m^5/s^3} \times \mathrm{s^3/m^3} = \mathrm{m^2}$. Il ne reste donc qu'à mettre une racine carrée pour obtenir des mètres : $\left[\sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}\right] = \mathrm{m}$.

c) Ici, il ne faut pas oublier de convertir les unités des constantes pour avoir les bonnes unités. G et $\hbar$ étaient en fait déjà en MKS après avoir développé les joules, donc les valeurs sont déjà les bonnes. Il a par contre fallu convertir des kilomètres en mètres pour c. On a donc que $c = 300\,000\,\mathrm{km/s} = 3 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$. On calcule maintenant $\sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} = \sqrt{\frac{6.67\times10^{-11}\times1\times10^{-34}}{(3\times10^8)^3}} = 1{,}57 \times 10^{-35}\,\mathrm{m}$.

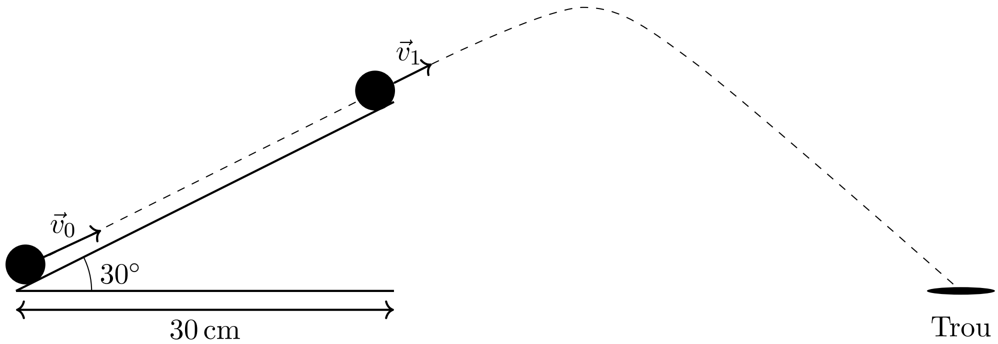
Question 6 (3 points) Vous jouez au Skee-Ball, un jeu qui consiste à lancer une balle vers un plan incliné, afin que celle-ci fasse ensuite un tir parabolique pour atterrir dans un trou. Vous lancez la balle avec une vitesse $|\vec{v}_0|$ vers le plan incliné, parfaitement lisse et sans frottements, posé sur le sol, long de 30 cm et qui fait un angle de 30° avec l'horizontale. Arrivé au haut du plan incliné, la balle a une vitesse de norme $|\vec{v}_1|$. Elle décrit alors une trajectoire parabolique et tombe dans le trou (qu'on suppose au niveau du sol) après 0,9 s.

a) Quelle quantité est conservée lors de la montée de la balle sur le plan incliné ?

b) Quelle est la norme de la vitesse $|\vec{v}_1|$ de la balle en haut du plan incliné, en fonction de $|\vec{v}_0|$?

c) Donnez les équations qui décrivent la position sur l'axe vertical et sur l'axe horizontal lors du mouvement parabolique.

d) Déterminez $|\vec{v}_1|$ grâce à la trajectoire parabolique et déduisez-en $|\vec{v}_0|$.



Solution.

a) L'énergie mécanique

b) Pour alléger la notation, les normes, comme par exemple $|\vec{v}_0|$, seront simplement notées sans flèches, donc v_0. Utilisons du coup la conservation de l'énergie mécanique :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh$$

On peut déterminer la hauteur par trigonométrie : $\tan 30 = \frac{h}{0,3}$. Il reste à isoler v_1.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv_1^2 &= \frac{1}{2}mv_0^2 - mgh \\ v_1^2 &= v_0^2 - 2gh \\ v_1 &= \sqrt{v_0^2 - 2gh} \\ v_1 &= \sqrt{v_0^2 - 2g0,3\tan 30}\end{aligned}$$

c) Il s'agit d'un tir parabolique : le mouvement sur l'axe horizontal x est un MRU (il n'y a aucune accélération sur l'axe x), tandis que celui sur l'axe vertical y est un MRUA (à cause de la gravité terrestre).
La position sur l'axe x est donc donnée par

$$x(t) = x_0 + v_x t = v_x t = v_1 \cos(30)t$$

et sur l'axe y :

$$y(t) = y_0 + v_y t + \frac{1}{2}at^2 = h + v_1 \sin(30)t - \frac{1}{2}gt^2$$

d) On ne connait pas la position en x de la balle lorsqu'elle atteint le trou $x(0,9)$, mais on sait que sa hauteur est nulle, $y(0,9) = 0$. On va donc utiliser l'équation sur l'axe y pour résoudre le problème. On y connait en effet tout, sauf v_1.

$$y(0,9) = 0 = h + v_1 \sin(30)0,9 - \frac{1}{2}g0,9^2$$
$$v_1 = \frac{-h + \frac{1}{2}g0,9^2}{\sin(30)0,9} = 8{,}6\,\mathrm{m/s}$$

Physique 1 – PHYS-F104 (2018-2019)

Examen de juin 2019
Deuxième partie

13 juin 2019

Nom :

Prénom :

N° de matricule :

Section (entourer) : Biologie — Géographie — Géologie — Pharmacie

Consignes générales :

1. Écrivez immédiatement vos prénom, nom, numéro de matricule et section.
2. Vérifiez que votre énoncé comporte bien **7 feuilles** (6 questions).
3. Ne dégrafez pas les pages.
4. Vous n'avez droit à rien d'autre que de quoi écrire, votre formulaire, votre calculatrice et votre carte d'étudiant.
5. Les GSM, tablettes, smartwatches et autres moyens de communication sont interdits. Ils doivent être éteints et rangés dans les sacs le long du mur. En aucun cas vous ne pouvez avoir un GSM (ou autre moyen de communication) à portée de main, même éteint.
6. Ne répondez pas en rouge, cette couleur étant réservée pour la correction.
7. **Les réponses doivent toutes être clairement justifiées et les unités doivent être indiquées pour les résultats numériques.**
8. En cas de besoin, vous prendrez les valeurs de constantes suivantes :

constante de Coulomb :	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	$=$	$9{,}00 \times 10^9\,\mathrm{N\,m^2/C^2}$
indice de réfraction de l'air :	n_{air}	$=$	$1{,}00$
seuil d'audibilité de l'oreille humaine :	I_0	$=$	$1{,}00 \times 10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}$
vitesse du son dans l'air :	v_{air}	$=$	$340\,\mathrm{m/s}$

9. Cette partie dure **2 heures (120 minutes)**.

Bon travail !

/3	/3	/4	/4	/3	/3	/20

Question 1 (3 points) L'objectif d'un appareil photo est représenté par une lentille convergente de focale $f = 5{,}0\,\mathrm{cm}$. Le capteur photo est l'écran sur lequel sera projetée l'image réelle créée par la lentille, et il se trouve à une distance variable d de la lentille. Faire varier cette distance d correspond à faire la mise au point de la photo, afin que l'image devienne nette.

a) On désire photographier des objets qui se trouvent à une distance de la lentille variant entre x et ∞ (très loin de l'appareil photo). Quelle plage de valeurs $[d_{\min}, d_{\max}]$ doit pouvoir prendre d pour rendre ceci possible ? Exprimez $d_{\min}$ et $d_{\max}$ en termes de f et x.

b) On se propose de photographier une tour de hauteur $h = 50\,\mathrm{m}$ et située à une distance $x = 2\,\mathrm{km}$. Quelle doit être la distance d dans ce cas-ci ? Exprimez la hauteur h' de l'image de la tour projetée sur le capteur photo.

c) Si on souhaite maintenant photographier un objet situé à $1{,}0\,\mathrm{m}$, est-ce que la distance d doit augmenter ou diminuer par rapport au point précédent ? Expliquez à partir de la formule sans calculer.

Solution.

a) Ici, s, la distance entre la lentille et l'objet est x. s', la distance entre la lentille et l'écran est d. Pour photographier nettement un objet se situant à x, il faut que la lentille se trouve à la distance d de l'écran donnée par $\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{d}$. On isole, et on obtient $d = \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{x}\right)^{-1} = \left(\frac{x-f}{xf}\right)^{-1} = \frac{xf}{x-f}$.
Pour photographier nettement un objet se situant très loin, à ∞, il faut que la lentille se trouve à la distance d donnée par $\frac{1}{f} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{d}$. On isole, et on obtient $d = \left(\frac{1}{f} - 0\right)^{-1} = f$.
Le premier d est une quantité forcément plus grande que l'autre : le dénominateur est plus petit vu qu'on a en plus la soustraction de $\frac{1}{x}$, et au final la fraction est donc plus grande. Il correspond donc à $d_{\max}$. L'autre est alors $d_{\min}$. La plage de valeur est donc $\left[f; \frac{xf}{x-f}\right]$

b) On commence par réutiliser $d = \frac{xf}{x-f} = \frac{2000 \times 0,05}{2000 - 0,05} = 0{,}05\,\mathrm{m}$.

Ensuite, on utilise la définition de l'agrandissement $-\frac{d}{x} = m = \frac{h'}{h}$ pour isoler $h' = -\frac{dh}{x} = -0{,}001\,\mathrm{m}$.

c) Reprenons $d = \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{x}\right)^{-1}$. Dans cette expression, f est constante. Dans ce cas, si x diminue (on passe de $2\,\mathrm{km}$ à $1{,}0\,\mathrm{m}$), alors le $\frac{1}{x}$ augmente. Si ce terme augmente, la parenthèse $\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{x}\right)$ diminue. Vu que cette parenthèse est au dénominateur, l'expression globale augmente, et d augmente donc. C'est bien ce qu'on constate en photographie, où les objectifs macro, qui permettent de photographier des objets d'extrêmement près, ont une longueur plus élevée que les objectifs normaux.

Question 2 (3 points)
L'oreille humaine peut distinguer des différences de niveau d'intensité de l'ordre de 0,6 dB.

a) À quel rapport d'intensité sonore correspond cette différence ?
b) À quel rapport d'amplitude de pression correspond cette différence ?
c) Est-ce que ces rapports sont les mêmes si on se plonge dans un autre milieu, comme l'eau ? Justifier par rapport aux formules.

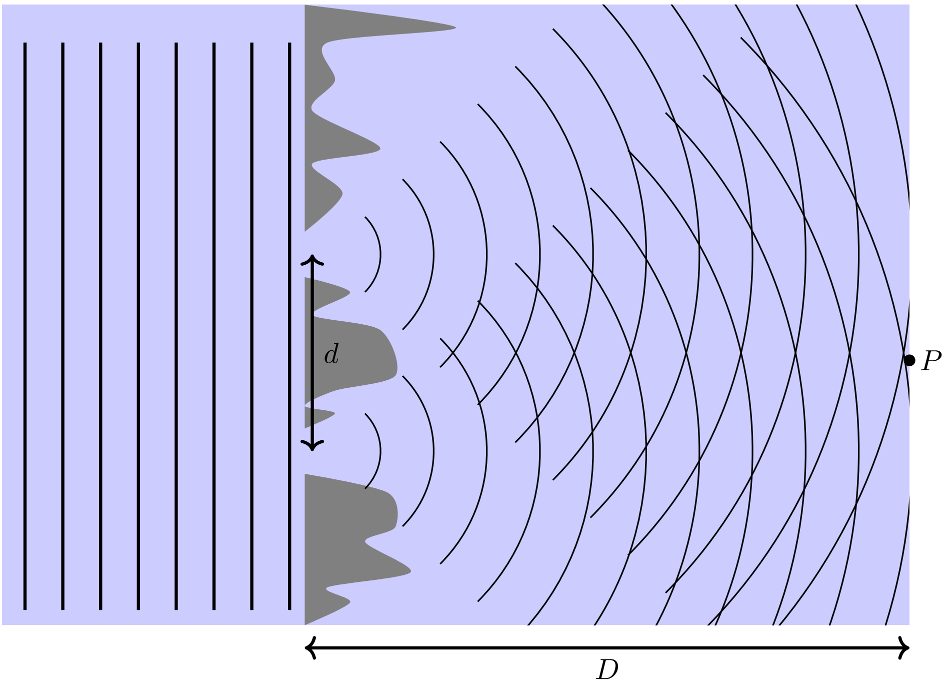
Solution.

a) On connait la différence de niveau d'intensité $\beta_2 - \beta_1 = \Delta\beta = 0,6$ dB. On connait la formule qui lie le niveau d'intensité à l'intensité sonore : $\beta = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$. Développons-la donc dans la différence : $\Delta\beta = 10 \log\left(\frac{I_2}{I_0}\right) - 10 \log\left(\frac{I_1}{I_0}\right)$. Comme vu au cours et en séance, $\log(a) - \log(b) = \log\left(\frac{a}{b}\right)$. Du coup, $\Delta\beta = 10 \log\left(\frac{I_2}{I_0}\frac{I_0}{I_1}\right) = 10 \log\left(\frac{I_2}{I_1}\right)$. Il reste maintenant à isoler le rapport d'intensité sonore : $\frac{I_2}{I_1} = 10^{\Delta\beta/10} = 1,15$.

b) On utilise cette fois la formule qui lie l'intensité sonore avec l'amplitude de pression : $I = \frac{\Delta P^2}{2\rho v}$. Du coup, $\frac{I_2}{I_1} = \frac{\Delta P_2^2}{\Delta P_1^2}$. On a ici simplifié ρ et v puisque ce sont les mêmes. Les deux sons dont on compare l'intensité sont émis dans le même milieu (il n'y a pas de raison de supposer le contraire si on ne le précise pas). Il reste à isoler le rapport d'amplitude de pression : $\frac{\Delta P_2}{\Delta P_1} = \sqrt{\frac{I_2}{I_1}} = 1,07$

c) Oui, vu que tout ce qui dépend du milieu (ρ et v) disparait dans les rapports. Ceux-ci ne dépendent donc plus du milieu.
Si les deux sons dont on comparait les intensités étaient émis dans des milieux différents, ça ne serait plus le cas, mais ici, on compare deux sons émis dans le même milieu. Dans cette situation, le milieu n'a pas d'influence sur les rapports calculés.

Question 3 (4 points) Le vent soufflant vers l'est crée des vagues sur la mer qui vont frapper une côte rocheuse. La distance entre deux vagues correspond à $\lambda = 2{,}0\,\mathrm{m}$. Ces rochers bloquent les vagues, sauf en deux endroits distants de $d = 5{,}0\,\mathrm{m}$ où leur hauteur est assez basse pour que l'eau passe. On suppose que ces deux ouvertures sont assez étroites pour devenir des sources ponctuelles de vagues. L'eau forme ensuite un bassin où se trouve un port à une distance $D = 50\,\mathrm{m}$ des rochers. A quelles distances au nord ou au sud du point P sur le port devez-vous éviter de mettre votre bateau parce qu'il y serait trop balancé par les vagues ?



Solution. La situation est parfaitement analogue aux fentes de Young, utilisons donc cette formule : $m\lambda = \frac{dy}{D}$ où $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$ On isole y et $y = \frac{m\lambda D}{d} = 0, 20, 40, 60, \ldots\,\mathrm{m}$ pour les différentes valeurs possibles de m. Il faut donc éviter de placer son bateau à ces distances du point P, au nord ou au sud.

Question 4 (4 points) Deux charges q_1 et q_2 sont séparées de 10 cm comme dessiné ci-dessous. Déterminez :

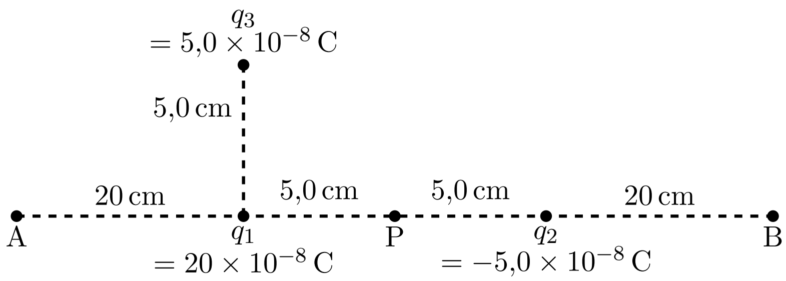
a) Le champ électrique $\vec{E}$ au point P créé par les charges q_1 et q_2

b) La force subie par une charge de $-4{,}0 \times 10^{-8}$ C placée en P à cause des charges q_1 et q_2

c) Quels sont les potentiels aux points A et B créés par les charges q_1 et q_2 ?

d) Quel est le travail nécessaire pour déplacer une charge de 500 µC de A à B ?

e) Que devient le champ électrique $\vec{E}$ au point P si on rajoute, en plus des charges q_1 et q_2, une charge q_3 à un point situé 5,0 cm au dessus de la charge q_1 ?



Solution.

a) On va sommer les champs électriques fournis par les deux charges q_1 et q_2 :

$$\begin{aligned}
\vec{E}(P) &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 d_{1P}^2}\vec{1}_x + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 d_{2P}^2}(-\vec{1}_x)\\
&= \frac{20 \times 10^{-8}}{4\pi\epsilon_0 (0,05)^2}\vec{1}_x + \frac{-5 \times 10^{-8}}{4\pi\epsilon_0 (0,05)^2}(-\vec{1}_x)\\
&= (720\,000\ \vec{1}_x + 180\,000\ \vec{1}_x) = 900\,000\ \vec{1}_x \mathrm{N/C}
\end{aligned}$$

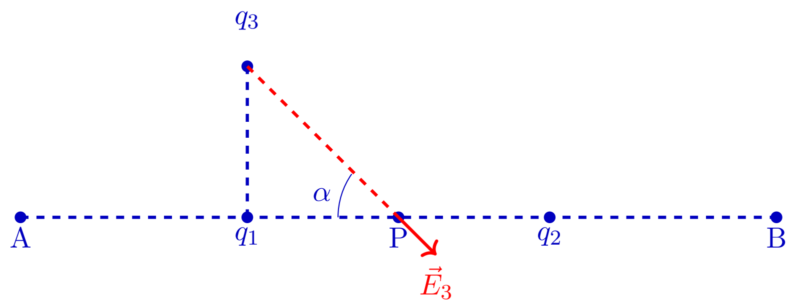
b) On la détermine à partir du champ électrique au point P : $\vec{F} = q\vec{E}$ où q est la charge placée au point P qui va subir la force. En remplaçant par ce qu'on a déterminé au point précédent, $\vec{F} = -4 \times 10^{-8} \times 900\,000 \vec{1}_x = -0,036\ \vec{1}_x$N

c) De nouveau, on va sommer le potentiel créé au point A par les charges q_1 et q_2, puis pareil au point B.

$$\begin{aligned}
V(A) &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 d_{1A}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 d_{2A}} = 9000 - 1500 = 7\,500\ \mathrm{V}\\
V(B) &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 d_{1B}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 d_{2B}} = 6000 - 2250 = 3\,750\ \mathrm{V}
\end{aligned}$$

d) Le travail nécessaire pour déplacer une charge d'un potentiel à un autre est donné par $\Delta U = q\Delta V = qV(B) - V(A)$ où q est la charge déplacée de 500 µC. On calcule, $\Delta U = 500 \times 10^{-6}(3750 - 7500) = -1{,}875$ J.

e) Cette fois tout n'est pas aligné sur l'axe x. Il va donc falloir décomposer le champ électrique créé par q_3, $\vec{E}_3$, sur l'axe x et l'axe y.



Par trigonométrie, $\tan\alpha = \frac{d_{13}}{d_{1P}}$, donc $\alpha = \arctan\frac{d_{13}}{d_{1P}} = 45°$. On va maintenant utiliser cet angle pour projeter, vu qu'il s'agit également de l'angle entre $\vec{E}_3$ et l'axe horizontal x par angle opposé.

$$\vec{E}_{3,x} = E_3 \cos\alpha\ \vec{1}_x$$
$$\vec{E}_{3,y} = E_3 \sin\alpha\ (-\vec{1}_y)$$

Il faut donc déterminer la norme de $\vec{E}_3$, notée E_3. Pour ça, il nous faut la distance entre q_3 et P par Pythagore : $d_{3P} = \sqrt{0,05^2 \times 2} = 0{,}07\,\mathrm{cm}$

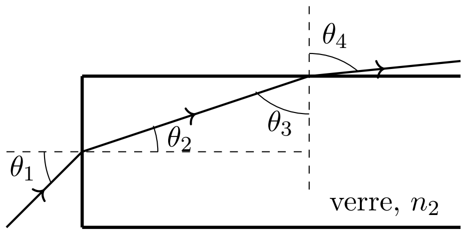
$$E_3 = \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 d_{3P}^2} = 90\,027\,\mathrm{N/C}$$

Et finalement, avec $\vec{E}$ le champ électrique calculé au point a), qui comptabilise les contributions de q_1 et q_2,

$$\begin{aligned}\vec{E}_{\text{tot}} &= \vec{E} + \vec{E}_3 = 900\,000\ \vec{1}_x + 90\,027\cos(45)\ \vec{1}_x + 90\,027\sin(45)\ \vec{1}_y \\ &= 96\,3659\ \vec{1}_x\mathrm{N/C} + +90\,027\sin(45)\ \vec{1}_y\mathrm{N/C}\end{aligned}$$

Question 5 (3 points) Comme montré sur la figure ci-dessous, un rayon lumineux entre avec un angle de $\theta_1 = 45°$ sur le côté d'un long rectangle de verre ayant un indice de réfraction n_2 inconnu. Montrez que ces rayons entrants peuvent être totalement réfléchis à l'intérieur du verre si son indice de réfraction atteint la valeur $n_2 = 1,225$.

Rappel : $\sin(90 - \alpha) = \cos(\alpha)$



Solution. On commence par appliquer la loi de Snell au rayon entrant depuis l'air dans le verre :

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$
$$n_1 \sin(45) = n_2 \sin \theta_2$$
$$n_2 \sin \theta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

car on sait que $n_1 = 1$ vu qu'il s'agit de l'air. On applique ensuite la loi de Snell au rayon sortant du verre vers l'air :

$$n_2 \sin \theta_3 = n_1 \sin \theta_4$$

Pour déterminer quand le rayon sortant est toujours intégralement réflechi, on cherche l'angle limite de réflexion totale : on pose que l'angle $\theta_4 = 90°$

$$n_2 \sin \theta_3 = n_1 \sin(90)$$
$$n_2 \sin \theta_3 = n_1$$

La somme des angles du triangle indiqué et formé par l'horizontale, la verticale et le rayon lumineux doit faire 180°. Du coup, $\theta_3 + \theta_2 + 90° = 180°$, et l'angle θ_3 correspond à

$$\theta_3 = 90° - \theta_2$$

On remplace ceci dans la loi de Snell pour le rayon sortant, et on utilise le rappel donné dans l'énoncé

$$n_2 \cos \theta_2 = n_1$$

Si on divise par cette expression l'équation qu'on avait obtenu grâce à la loi de Snell pour le rayon entrant, l'indice de réfraction inconnu disparait, et il ne reste que l'angle à isoler :

$$
\begin{aligned}
\frac{n_2 \sin\theta_2}{n_2 \cos\theta_2} &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{n_1} \\
\tan\theta_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\theta_2 &= 35{,}26^\circ
\end{aligned}
$$

Puis on peut retourner isoler n_2 dans une des expressions précédentes :

$$
\begin{aligned}
n_2 \cos\theta_2 &= n_1 \\
n_2 &= \frac{n_1}{\cos\theta_2} \\
&= 1,225
\end{aligned}
$$

Question 6 (3 points) Vous vous trouvez sur le bord de la route, et deux ambulances se rapprochent de vous à vitesse constante (l'une de la gauche, l'autre de la droite). L'ambulance à gauche roule à une vitesse de 100 km/h. Vous entendez l'ambulance de droite comme étant un demi-ton plus haut (fréquence $\sqrt[12]{2} \simeq 1,06$ fois plus élevé) que l'autre. Au repos, la loi fixe la fréquence d'une sirène d'ambulance à 495 Hz. Quelle est la vitesse de la deuxième ambulance ?

Solution. La fréquence change ici à cause de l'effet Doppler. Écrivons son expression pour les deux ambulances, celle de gauche qui aura une fréquence perçue f_g et celle de droite qui aura une fréquence perçue f_d :

$$f_g = f_0 \frac{v}{v - v_g}$$
$$f_d = f_0 \frac{v}{v - v_d}$$

f_0 correspond à la fréquence au repos, donc à 495 Hz. v correspond à la vitesse du son dans l'air. v_g et v_d sont respectivement la vitesse de l'ambulance de gauche et celle de l'ambulance de droite. Vu que les deux ambulances sont des sources qui s'approchent du récepteur, la formule de l'effet Doppler aura la même forme pour les deux.
On sait également que $f_d = 1,06 f_g$, donc :

$$f_d = 1,06 f_g = 1,06 f_0 \frac{v}{v - v_g} = f_0 \frac{v}{v - v_d}$$

Cette dernière égalité va nous permettre d'isoler v_d qui est inconnue, vu que tout le reste y est connu, avec $v_g = 100\,\mathrm{km/h} = 27{,}8\,\mathrm{m/s}$

$$\begin{aligned}
1,06 f_0 \frac{v}{v - v_g} &= f_0 \frac{v}{v - v_d} \\
1,06 \frac{1}{v - v_g} &= \frac{1}{v - v_d} \\
\frac{v - v_g}{1,06} &= v - v_d \\
v_d &= v - \frac{v - v_g}{1,06} = 45{,}5\,\mathrm{m/s}
\end{aligned}$$

Physique 1 – PHYS-F104 (2018-2019)

Examen d'août 2019
Seconde partie

23 août 2019

Nom :

Prénom :

N° de matricule :

Section (entourer) : Biologie — Géographie — Géologie — Pharmacie

---

Consignes générales :

1. Écrivez immédiatement vos prénom, nom, numéro de matricule et section.
2. Vérifiez que votre énoncé comporte bien **7 feuilles** (6 questions).
3. Ne dégrafez pas les pages.
4. Vous n'avez droit à rien d'autre que de quoi écrire, votre formulaire, votre calculatrice et votre carte d'étudiant.
5. Les GSM, tablettes, smartwatches et autres moyens de communication sont interdits. Ils doivent être éteints et rangés dans les sacs le long du mur. En aucun cas vous ne pouvez avoir un GSM (ou autre moyen de communication) à portée de main, même éteint.
6. Ne répondez pas en rouge, cette couleur étant réservée pour la correction.
7. **Les réponses doivent toutes être clairement justifiées et les unités doivent être indiquées pour les résultats numériques.**
8. En cas de besoin, vous prendrez les valeurs de constantes suivantes :

constante de Coulomb :	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	=	$9{,}00 \times 10^9\,\mathrm{N\,m^2/C^2}$
vitesse de la lumière :	c	=	$3{,}00 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$
vitesse du son dans l'air :	v_{air}	=	$340\,\mathrm{m/s}$
indice de réfraction de l'air :	n_{air}	=	$1{,}00$
accélération de la pesanteur à la surface de la Terre :	g	=	$9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$

9. Cette partie dure **2 heures (120 minutes)**.

Bon travail !

/3	/3	/4	/4	/3	/3	/20

Question 1 (3 points) L'intensité lumineuse solaire reçue par la Terre est de $1{,}4 \times 10^3\,\mathrm{W/m^2}$ et la distance Terre-Soleil est de $15 \times 10^7\,\mathrm{km}$.
(Indication : la relation entre puissance et intensité est la même pour la lumière et les ondes sonores)

a) Quelle est la puissance du Soleil ?

b) Sachant que la limite de sensibilité d'un oeil humain est de $5{,}0 \times 10^{-18}\,\mathrm{W/m^2}$, à quelle distance le Soleil devrait se trouver de la Terre pour que notre oeil ne puisse plus percevoir sa lumière ?

c) Même question, sauf que nous considérons maintenant l'influence de l'atmosphère. Supposons que celle-ci absorbe 75% de l'intensité solaire reçue.

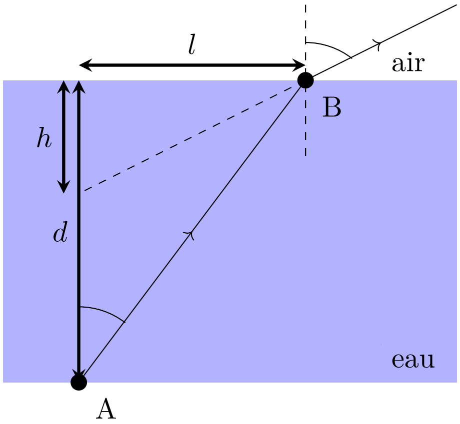
Question 2 (3 points) Vous disposez de trois lentilles. La première, recevant des rayons lumineux d'un objet situé à l'infini, forme une image à 2,0 cm du côté opposé à l'objet. Si on substitue la première lentille par la deuxième, l'image se forme 0,30 cm plus proche de la lentille.

a) Quelles sont les puissances respectives de la première et de la deuxième lentille ?

b) Quelle doit être la puissance de la troisième lentille si, en l'accolant à la deuxième, l'image se forme au même endroit que pour la première lentille ?

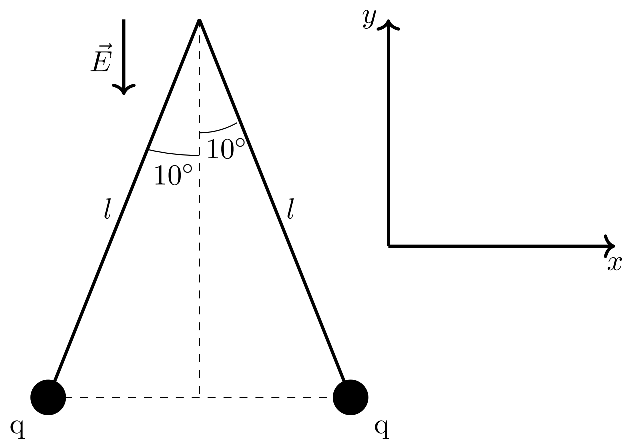
c) De quel type est la troisième lentille ? Justifiez.

Question 3 (4 points) Un objet se trouve à une profondeur $d = 2\,\mathrm{m}$ au point A sous l'eau, dont l'indice de réfraction est $n_{\text{eau}} = 1,3$. A quelle profondeur h semble se trouver l'objet si on le regarde depuis le point B qui se trouve tout juste hors de l'eau, à une distance $l = 1\,\mathrm{m}$ de la verticale passant par l'objet ?



Question 4 (4 points) Lors d'un concert, une flute et une guitare doivent jouer la même note. La flute peut être considérée comme un tube fermé-ouvert de longueur 80 cm. La corde de la guitare sur laquelle on joue, en acier de masse linéique $\mu = 10^{-3}$ kg/m, est fixée aux deux extrémités et est tendue avec une force de 60 N. Les deux instruments jouent leur note fondamentale.
Quelle doit être la longueur de la corde de la guitare ?

Question 5 (3 points) Deux sphères de 2,0 g sont chargées avec la même charge positive q et suspendues dans l'air, chacune à l'extrémité d'un fil de longueur $l = 50\,\text{cm}$. Les deux sphères s'éloignent pour former un angle de 10° avec la verticale. Le tout est plongé dans un champ électrique $\vec{E}$ de norme $5{,}0 \times 10^5\,\text{N/C}$ opposé à l'axe y. Déterminez une valeur pour la charge q.



Question 6 (3 points) Un radar de contrôle routier est un instrument servant à mesurer la vitesse des véhicules circulant sur la voie publique à l'aide de l'effet Doppler subi par les ondes radar. Le radar émet une onde qui est réfléchie par toute cible se trouvant dans la direction pointée (comme une voiture). Un capteur mesure alors la différence entre la fréquence émise initialement et celle renvoyée par la cible.
Il y a normalement un angle entre une voiture sur la route et le radar, mais nous supposons ici cet angle nul.
Indication : les ondes radio sont des ondes électromagnétiques, au même titre que la lumière.

a) Schématiser le principe du radar à effet Doppler en faisant figurer les fronts de l'onde émise et ceux de l'onde réfléchie par un véhicule se rapprochant du radar.
b) Déterminez la vitesse d'une voiture qui se rapproche du radar si la différence entre la fréquence renvoyée par la voiture et la fréquence émise initialement est de $f_r - f_e = 8{,}0\,\mathrm{kHz}$, pour une fréquence émise initialement de $f_e = 24\,\mathrm{GHz}$.
   Si la limite de vitesse est fixée à $120\,\mathrm{km/h}$, est-ce que le chauffeur recevra une amende ?

Physique 1 – PHYS-F104 (2019-2020)

Examen de novembre 2019

31 octobre 2019

Correctif

Question 1 (3 points) Lorsque l'on étend un ressort pendu verticalement au bout duquel est attachée une masse M, il s'exerce sur celle-ci une force qui a tendance à la ramener vers la position au repos et à la faire osciller autour de celle-ci. Cette force est donnée par $F = kx$, où k est la constante de rappel du ressort, et x son élongation.

a) Donnez les dimensions (MLT - Masse, Longueur, Temps). Si vous préférez, vous pouvez plutôt donner les unités dans le système MKS (mètre-kilogramme-seconde) de F, x et k.

b) En utilisant l'analyse dimensionnelle, déterminez la dépendance de la période t des oscillations en les grandeurs k, m et g (l'accélération de la pesanteur).

a) $[F] = MLT^{-2} \qquad (kg.m.s^{-2})$

$[x] = L \qquad (m)$

$$[k] = \frac{[F]}{[x]} = \frac{MLT^{-2}}{L} = MT^{-2} \qquad (kg.s^{-2})$$

b) $t = k^a m^b g^c \qquad [t] = (MT^{-2})^a M^b L^c T^{-2c} = M^{a+b} T^{-2a-2c} L^c$

$a = -\frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{2}\, et\ c = 0$

$$[t] = (MT^{-2})^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} \qquad \Rightarrow \qquad t = \alpha\sqrt{\frac{m}{k}}$$

La période est proportionnelle à la racine carrée du rapport de la masse attachée au ressort et de la constante de rappel de ce dernier. La constante α représente une constante sans dimension qui pourrait être présente et que l'analyse dimensionnelle ne permet pas d'obtenir.

Question 2 (3 points)
Un athlète court le 100 m. Son accélération est constante durant les 25 premiers mètres, après quoi il garde une vitesse constante de 11 m/s.

a) Donnez les équations pour la position et la vitesse en fonction du temps durant les 25 premiers mètres.

b) Utilisez ces deux équations pour déduire le temps nécessaire pour parcourir les 25 premiers mètres et l'accélération correspondante.

c) Combien de temps lui faut-il pour parcourir les 100 m ?

a) Durant les 25 premiers mètres, l'athlète, initialement au repos, court avec une accélération constante :

L'équation horaire de la position :

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 = \frac{1}{2}at^2$$

L'équation horaire de la vitesse :

$$v(t) = v_0 + at = at$$

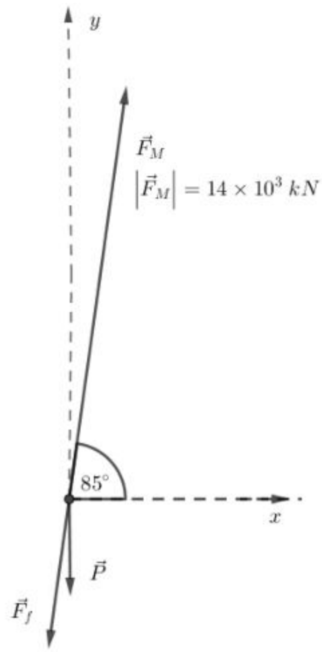
b) $$\begin{cases} \frac{1}{2}at^2 = 25 \\ at = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} at^2 = 50 & (1) \\ at = 11 & (2) \end{cases} \qquad \frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{50}{11} \approx 4{,}54\,(s) \\ a = \frac{121}{50} = 2{,}42\,(m/s^2) \end{cases}$$

c) Les 75 derniers mètres, l'athlète continue sa course à vitesse constante.

$$100 = x_1 + v_1 t = 25 + 11t \Leftrightarrow t = \frac{100-25}{11} = \frac{75}{11} \approx 6{,}82\,s$$

L'athlète met alors $t = \frac{50}{11} + \frac{75}{11} = \frac{125}{11} \approx 11{,}36\,s$ pour parcourir les 100 m.

Question 3 (4 points)
Une fusée d'une masse de 750 tonnes quitte la terre avec un angle $\alpha = 85°$ donné par rapport à l'horizontale et une vitesse de $v = 250\,\mathrm{m/s}$. La poussée exercée par les moteurs est d'une intensité de $14 \times 10^3\,\mathrm{kN}$, dirigée selon l'axe de la fusée. Elle subit le frottement de l'air. Que vaut alors son accélération (en composantes et en norme) ? On donne $C_2 = 0{,}85\,\mathrm{kg/m^3}$ et $R = 5\,\mathrm{m}$.
Deux simplifications sont à considérer : on néglige, dans cette situation, le terme en C_1 dans la force de frottement de l'air et on suppose que l'accélération de la pesanteur est la même qu'à la surface de la Terre, $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.



2ème loi de Newton :

$$\vec{F}_M + \vec{P} + \vec{F}_f = m\vec{a}$$

Projection sur Ox : $F_M \cos 85° - F_f \cos 85° = ma_x$

$$a_x = \frac{F_M \cos 85° - F_f \cos 85°}{m} = \frac{\left(F_M - C_2R^2v^2\right)\cos 85°}{m}_{x} = 1{,}47\, m/s^2$$

Projection sur Oy : $F_M \sin 85° - mg - F_f \sin 85° = ma_y$

$$a_y = \frac{\left(F_M - C_2R^2v^2\right)\sin 85° - mg}{m} = 6{,}83\, m/s^2$$

$$\vec{a} = 1{,}47 \times \vec{1}_x + 6{,}83 \times \vec{1}_y \quad \left(m/s^2\right)$$

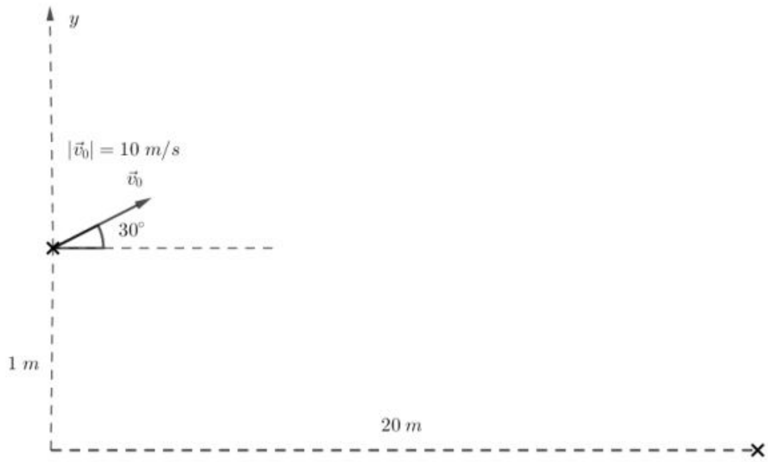
$$|\vec{a}| = \sqrt{1{,}47^2 + 6{,}83^2} = 6{,}98 \quad \left(m/s^2\right)$$

Question 4 (4 points) Sur une planète bien loin de la Terre, Yoda lance d'une hauteur de 1 m un sabre laser au jeune Luke, avec une vitesse initiale de 10 m/s et un angle de 30° vers le haut par rapport à l'horizontale. Le sabre laser retombe aux pieds de Luke, 20 m plus loin.

a) Donnez les équations régissant ce type de mouvement.

b) Déterminez le temps de voyage du sabre.

c) Déduisez-en l'accélération de la pesanteur sur cette planète.



a) Equations du mouvement :

$$x(t) = v_0.\cos\alpha.t = 5\sqrt{3}\,t$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin\alpha.t + 1 = -\frac{1}{2}gt^2 + 5.t + 1$$

b) Temps de voyage du sabre :

$$t = \frac{20}{10.\cos 30°} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \approx 2{,}31s$$

c) Accélération de pesanteur de la planète :

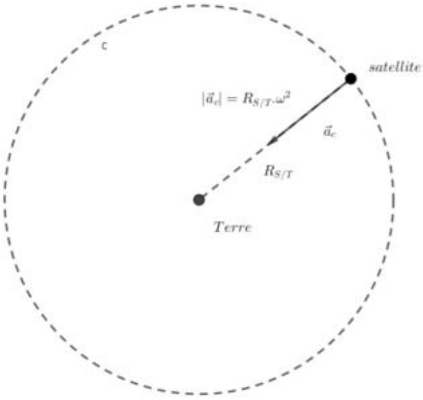
$$-\frac{1}{2}g\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 + 10.\frac{1}{2}.\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right) + 1 = 0 \qquad -\frac{8}{3}g + \frac{20}{\sqrt{3}} + 1 = 0 \qquad g = \frac{3}{8}\times\left(\frac{20}{\sqrt{3}} + 1\right) \approx 4{,}7m/s^2$$

Question 5 (3 points) Soit un objet en orbite autour de la Terre, orbite de rayon R et de période T.

a) A partir de la loi de la gravitation universelle, de la deuxième loi de Newton, et de la formule pour l'accélération centripète, en déduire la troisième loi de Kepler : $\dfrac{R^3}{T^2}$ = constante.

b) Un satellite géostationnaire est immobile par rapport à la surface de la Terre : il complète une et une seule orbite par jour. Le rayon de son orbite est $42{,}2 \times 10^3$ km. Sachant que la période de rotation de la Lune autour de la Terre est de 27 jours, en déduire la distance Terre-Lune.

a)



Loi de gravitation universelle : $$\left|\vec{F}_{T/S}\right| = \left|\vec{F}_{S/T}\right| = \frac{Gm_T m_S}{R_{S/T}^2}$$

2ème loi de Newton : $$\left|\vec{F}_{T/S}\right| = m_S R_{S/T}\omega^2$$

Le rôle de force centripète est ici jouée par la gravité :

$$\frac{Gm_S m_T}{R_{S/T}^2} = m_S R_{S/T}\omega^2 = m_S R_{S/T}\left(\frac{2\pi}{T_{S/T}}\right)^2 = \frac{4\pi^2 m_S R_{S/T}}{T_{S/T}^2}$$

$$\frac{Gm_S m_T}{R_{S/T}^2} = \frac{4\pi^2 m_S R_{S/T}}{T_{S/T}^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{R_{S/T}^3}{T_{S/T}^2} = \frac{Gm_T}{4\pi^2} = Cte$$

b) $T_{S/T} = 1$ jour. $R_{S/T} = 42{,}2 \times 10^3$ km. $T_{L/T} = 27$ jours.

$$\frac{R_{S/T}^3}{T_{S/T}^2} = \frac{R_{L/T}^3}{T_{L/T}^2} \qquad R_{L/T} = R_{S/T} \times \sqrt[3]{\frac{T_{L/T}^2}{T_{S/T}^2}} = 42{,}2 \times 10^3 \times \sqrt[3]{\left(3^2\right)^3} = 9 \times 42{,}2 \times 10^3 = 379\,800.\ \text{km.}$$

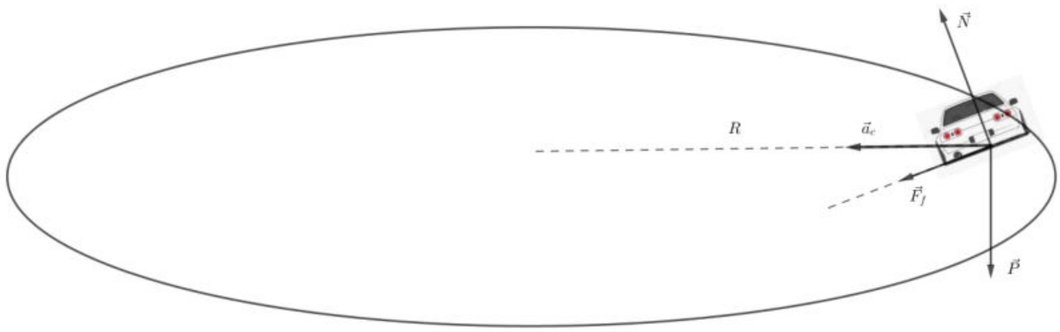
Question 6 (3 points) Sur les pistes automobiles, le bord extérieur des virages est surélevé. Ce relèvement empêche le véhicule de déraper au cas où la force de frottement, qui joue le rôle de force centripète, serait insuffisante. Une automobile de masse $m = 1\,000\,\mathrm{kg}$ entre dans un virage circulaire de rayon $R = 10\,\mathrm{m}$ et surélevé avec un angle de $\alpha = 37°$ par rapport à l'horizontale. La route est glissante et le coefficient de frottement statique n'est donc que de $\mu_s = 0{,}1$.

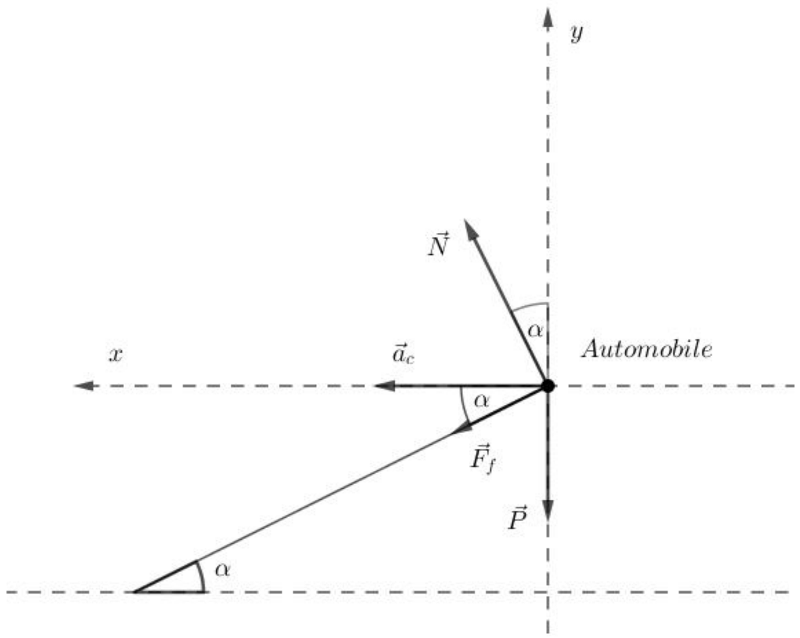
a) Déterminez pour quelle vitesse maximale l'automobile peut rouler sans risque de déraper.

b) Si les frottements disparaissent ($\mu_s = \mu_c = 0$), déterminez la relation entre la vitesse maximale permise et l'angle d'inclinaison α.

a)

Schéma :





Les forces de frottement sont orientées vers le bas de la piste puisqu'un dérapage entrainerait un mouvement vers l'extérieur du cercle (imaginez la même situation sur une piste à plat).

Bilan de forces :

$\vec{F}_f$: Force de frottement

$\vec{P}$: Poids de l'automobile

$\vec{N}$: Réaction de l'autoroute sur l'automobile.

2[ème] principe de Newton :

$$\vec{F}_f + \vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}_c$$

Projection sur Ox: $F_f \cos\alpha + N\sin\alpha = m\dfrac{v^2}{R}$ $N(\mu_s \cos\alpha + \sin\alpha) = m\dfrac{v_{Max}^2}{R}$ (1)

Projection sur Oy: $N\cos\alpha = F_f \sin\alpha + mg$ $N(\cos\alpha - \mu_s \sin\alpha) = mg$ (2)

On a utilisé dans les deux projections $F_f = \mu_s N$.

$\dfrac{(1)}{(2)}$: $\dfrac{v_{Max}^2}{Rg} = \dfrac{\mu_s \cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \mu_s \sin\alpha}$ $v_{Max} = \sqrt{R.g.\left(\dfrac{\mu_s \cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \mu_s \sin\alpha}\right)} \approx 9{,}6 m/s$

b) Si $\mu_s = \mu_c = 0$ $v_{Max} = \sqrt{R.g.\left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)} = \sqrt{R.g.\tan\alpha}$

Physique 1 – PHYS-F104 (2019-2020)

Examen de janvier 2020

10 janvier 2020

Nom :

Prénom :

N° de matricule :

Section (entourer) : Biologie — Géographie — Géologie — Pharmacie

---

Consignes générales :

1. Écrivez immédiatement en **CAPITALES** vos prénom, nom, numéro de matricule et section.
2. Vérifiez que votre énoncé comporte bien **7 feuilles** (6 questions).
3. Ne dégrafez pas les pages.
4. Vous n'avez droit à rien d'autre que de quoi écrire, votre formulaire (une feuille A4), votre calculatrice et votre carte d'étudiant.
5. Les GSM, tablettes, smartwatches et autres moyens de communication sont interdits. Ils doivent être éteints et rangés dans les sacs le long du mur. En aucun cas vous ne pouvez avoir un GSM (ou autre moyen de communication) à portée de main, même éteint.
6. Ne répondez pas en rouge, cette couleur étant réservée pour la correction.
7. **Les réponses doivent toutes être clairement justifiées et les unités doivent être indiquées pour les résultats numériques.**
8. En cas de besoin, vous prendrez les valeurs de constantes suivantes :
   accélération gravitationnelle terrestre : $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$
9. Cette partie dure **2 heures (120 minutes)**.

Bon travail !

/3	/3	/4	/4	/3	/3	/20

Question 1 (3 points) Le nombre de Bagnold (Ba) est un nombre **sans dimension** utilisé pour caractériser l'écoulement de grains de sable. Il permet notamment de déterminer à partir de quelles conditions l'écoulement passe d'un fluide à celui d'un fluide granulaire où l'énergie est dissipée par choc entre les grains et non plus par frottement. Il est fonction des quantités suivantes :

m	-	Masse d'un grain
γ	-	Gradient de vitesse en fonction de la distance (vitesse par unité de longueur)
L_c	-	Longueur caractéristique
μ	-	Viscosité du fluide contenant les grains

La viscosité est en général exprimée en Pascal $\times$ seconde, où le Pascal est une unité de pression (= force par unité de surface).

a) Donnez les dimensions de la pression en masse, longueur, temps (M, L, T)

b) Donnez les dimensions de la viscosité en masse, longueur, temps (M, L, T)

c) Sachant que le nombre de Bagnold, Ba, est proportionnel (linéaire) à la masse d'un grain m, déterminez par analyse dimensionnelle la dépendance de Ba en les quantités (m, γ, L_c, μ).

Solution.

a) $[P] = \left[\frac{F}{S}\right] = \left[\frac{ma}{S}\right] = MLT^{-2}L^{-2} = ML^{-1}T^{-2}$

b) $[\mu] = [P \times s] = ML^{-1}T^{-2} \times T = ML^{-1}T^{-1}$

c) On commence par indiquer toutes les quantités dont doit dépendre le nombre de Bagnold, avec des exposants inconnus

$$\mathrm{Ba} = m^\alpha \gamma^\beta L_c^\delta \mu^\epsilon$$

Comme on dit que Ba est proportionnel (linéaire) à la masse, $\alpha = 1$. On sait que Ba est sans dimension, donc sa dimension est égale à 1 :

$$\begin{aligned}
[\mathrm{Ba}] &= [m]^\alpha [\gamma]^\beta [L_c]^\delta [\mu]^\epsilon = 1 \\
&= M^\alpha (T^{-1})^\beta L^\delta (ML^{-1}T^{-1})^\epsilon \\
&= M^\alpha T^{-\beta} L^\delta M^\epsilon L^{-\epsilon} T^{-\epsilon} \\
&= M^{\alpha+\epsilon} T^{-\beta-\epsilon} L^{\delta-\epsilon} = 1
\end{aligned}$$

Comme la dimension totale doit être 1, l'exposant de chaque dimension séparément doit être zéro :

$$\begin{cases} \alpha + \epsilon = 0 \\ -\beta - \epsilon = 0 \\ \delta - \epsilon = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \epsilon = 0 \\ \beta = -\epsilon \\ \delta = \epsilon \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \epsilon = -1 \\ \beta = 1 \\ \delta = -1 \end{cases}$$

Au final, $\mathrm{Ba} \propto m\gamma L_c^{-1}\mu^{-1} = \frac{m\gamma}{L_c \mu}$.

Question 2 (3 points)
Un bateau sur un lac subit un choc avec un rocher immergé, qui fait un trou de $40\,\mathrm{cm}^2$ dans sa coque à 1 m en-dessous de la surface de l'eau. Le bateau peut recevoir $10\,\mathrm{m}^3$ d'eau avant d'avoir sa cargaison trempée.

a) Quelle est la vitesse du jet d'eau entrant dans le bateau ?
b) A quel débit volumique l'eau entre-t-elle dans la coque du navire ?
c) Estimez le temps qu'il reste à l'équipage avant que la cargaison soit ruinée par l'eau.

Solution.

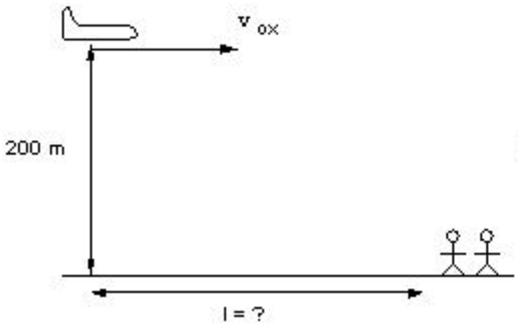
a) C'est exactement la même situation que celle du calcul de la formule de Torricelli vue au cours : un grand bassin d'eau qui s'écoule dans un petit trou. On peut donc directement utiliser celle-ci, $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 10 \times 1} = \sqrt{20}$ m/s.
b) En n'oubliant pas de convertir la surface du trou en m^2, $D_v = vS = \sqrt{20} \times 40 \times 10^{-4} = 0{,}018\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$
c) $D_v = \dfrac{V}{t} \leftrightarrow t = \dfrac{V}{D_v} = \dfrac{10}{0,018} = 555,56$ s, donc 9,26 minutes.

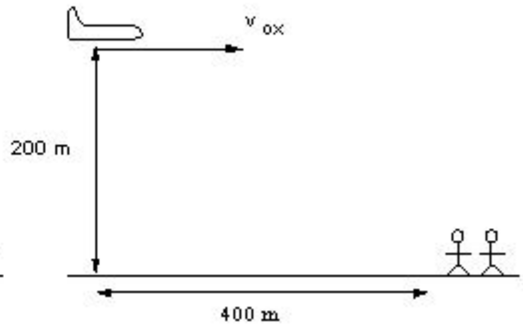
Question 3 (4 points) Des secouristes veulent larguer des provisions à des alpinistes isolés sur la crête d'une montagne, 200 m plus bas. Normalement ce serait un largage parachuté afin que les provisions arrivent au sol en douceur, mais imaginons que ce soit un largage en chute libre. L'avion se déplace horizontalement à une vitesse de 250 km/h.

a) A quelle distance horizontale l avant les alpinistes doivent-ils lancer les provisions ?

b) Si l'avion larguait les provisions à une distance horizontale de l = 400 m avant le point visé, quelle vitesse initiale verticale supplémentaire devrait-on leur rajouter (vers le haut ou vers le bas ?) pour qu'elles tombent précisément à l'endroit souhaité ?

c) Dans la situation décrite au point précédent, à quelle vitesse (en norme) vont-elles toucher le sol ?





Solution.

a) Les deux équations décrivant le mouvement des provisions sont celles d'un MRU de vitesse initiale $v_{0x} = 250\,\text{km/h} = 69{,}44\,\text{m/s}$ sur l'axe horizontal, et un MRUA sans vitesse initale de hauteur initiale $y_0 = 200\,\text{m}$.

$$x(t) = v_{0x}t$$
$$y(t) = y_0 - \frac{gt^2}{2}$$

Le temps de chute est trouvé en cherchant le temps t_{chute} où les provisions atteignent le sol $y(t_{\text{chute}}) = 0$,

$$y(t_{\text{chute}}) = 0 = y_0 - \frac{gt_{\text{chute}}^2}{2}$$
$$t_{\text{chute}}^2 = \frac{2y_0}{g}$$
$$t_{\text{chute}} = \sqrt{\frac{2y_0}{g}} = 6{,}32\,\text{s}$$

On peut trouver à partir de cette durée de chute la distance horizontale parcourue par le colis avant d'atteindre le sol $x(t_{\text{chute}}) = l$

$$x(t_{\text{chute}}) = l = v_{0x}t_{\text{chute}} = v_{0x}\sqrt{\frac{2y_0}{g}} = 439{,}21\,\text{m}$$

b) On imagine maintenant que les provisions sont lancées avec une vitesse initiale verticale v_{0y} inconnue additionnelle. Les équations décrivant leur mouvement deviennent

$$x(t) = v_{0x}t$$
$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}$$

On sait que $x(t_{\text{chute}}) = l = 400\,\text{m}$. On peut trouver le temps de chute à partir de ça :

$$x(t_{\text{chute}}) = l = 400 = v_{0x}t_{\text{chute}}$$
$$t_{\text{chute}} = \frac{l}{v_{0x}} = 5{,}76\,\text{s}$$

On utilise le temps de chute pour trouver quelle vitesse initiale verticale permet d'obtenir un tel mouvement :

$$y(t_{\text{chute}}) = 0 = y_0 + v_{0y}t_{\text{chute}} - \frac{gt_{\text{chute}}^2}{2}$$
$$v_{0y}t_{\text{chute}} = -y_0 + \frac{gt_{\text{chute}}^2}{2}$$
$$v_{0y} = \frac{-y_0}{t_{\text{chute}}} + \frac{gt_{\text{chute}}}{2} = \frac{-y_0v_{0x}}{l} + \frac{gl}{2v_{0x}} = -5{,}92\,\text{m/s}$$

Ce qui signifie qu'il faut une vitesse initiale verticale de $5{,}92\,\text{m/s}$ vers le bas.

c) La vitesse horizontale ne change pas, vu qu'il s'agit d'un MRU : $v_x(t_{\text{chute}}) = v_{0x}$. La vitesse verticale suit l'équation d'un MRUA

$$v_y(t) = v_{0y} - gt$$

Dans ce cas, $v_y(t_{\text{chute}}) = v_{0y} - gt_{\text{chute}} = -63{,}52\,\text{m/s}$. La norme de la vitesse au moment de la chute est finalement $v = \sqrt{v_x(t_{\text{chute}})^2 + v_y(t_{\text{chute}})^2} = 94{,}11\,\text{m/s}$

Question 4 (4 points) Un camion (M = 4750 kg) transporte une caisse (m = 700 kg) simplement déposée sur sa plate-forme, sans aucune fixation, seul le frottement peut la garder en place (donc force de frottement dans la direction de l'accélération du camion). Les coefficients de frottement statique et cinétique entre la plate-forme et la caisse sont respectivement de 0,75 et 0,50.

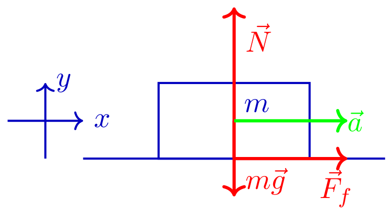
a) Si le camion accélère à $1{,}50\,\mathrm{m/s^2}$, quel est le module de la force de frottement statique empêchant la caisse de glisser ?

b) Quel sera le module de l'accélération maximale que peut subir le camion sans que la caisse ne glisse ?

c) Quel est le module de l'accélération maximale que peut subir le camion sans que la caisse ne glisse s'il monte une pente inclinée de 10° ?

Solution.

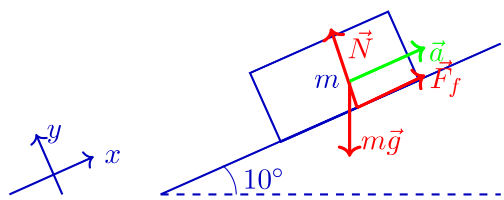
a) Sans aucun frottement et vu l'absence de fixation, si le camion accélérait, la boîte resterait au même endroit tandis que le camion avancerait. La force de frottement empêche le mouvement relatif de la caisse par rapport à camion. Comme cette force s'oppose au mouvement de la boîte par rapport au camion, elle accélère la boite dans le même sens que le camion.



Autrement dit, la deuxième loi de Newton $\sum \vec{F} = \vec{a}$ donne, une fois projetée sur l'axe vertical y : $N - mg = 0$ puisque la caisse n'est pas accélérée verticalement et sur l'axe horizontal x : $F_f = ma$ où m est la masse de la caisse et a est l'accélération que doit subir la boîte pour rester solidaire du camion, donc $1{,}50\,\mathrm{m/s^2}$. Dans ce cas, $F_f = 1\,050\,\mathrm{N}$.

b) La force de frottement maximale qu'il peut y avoir est $F_{f,max} = \mu_s N$. La normale N est directement égale au poids mg comme vu au point précédent.
Cette force de frottement maximale limite l'accélération maximale que le camion pourra avoir puisque si cette accélération est dépassée par le camion, la force de frottement ne sera pas assez élevée pour donner la même accélération à la caisse, et la caisse n'arrivera pas à suivre le mouvement. Comme vu au cours, $F_{f,max} = \mu_s N = ma_{max}$. Il reste à isoler $a_{max} = \dfrac{\mu_s N}{m} = \dfrac{\mu_s mg}{m} = \mu_s g = 7{,}5\,\mathrm{m/s^2}$.

c) L'accélération suit maintenant un plan incliné et n'est plus horizontale. Le schéma suivant représente la boite déposée sur la surface du camion, faisant un angle de 10° avec l'horizontale.



On applique la deuxième loi de Newton, $\sum \vec{F} = \vec{N} + \vec{F}_f + m\vec{g} = m\vec{a}$. Sur l'axe x, on obtient $F_f - mg\sin(10°) = ma$, et sur l'axe y, on a $N - mg\cos(10°) = 0$.

Du coup, $N = mg\cos(10°)$, et de nouveau, comme on cherche l'accélération maximale, $F_{f,max} - mg\sin(10°) = ma_{max}$ où $F_{f,max} = \mu_s N$. Il ne reste qu'à isoler :

$$\begin{aligned} a_{max} &= \frac{F_{f,max}}{m} - g\sin(10°) \\ &= \frac{\mu_s N}{m} - g\sin(10°) \\ &= \frac{\mu_s mg\cos(10°)}{m} - g\sin(10°) \\ &= \mu_s g\cos(10°) - g\sin(10°) \\ &= g\left(\mu_s\cos(10°) - \sin(10°)\right) = 5{,}65\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

Question 5 (3 points) Certains satellites utilisent des roues de réaction afin d'ajuster leur orientation dans l'espace, par exemple pour pointer leur caméra dans la direction d'une planète. Une roue de réaction est un disque tournant à grande vitesse sur lui-même, un moteur électrique permet de changer sa vitesse de rotation.
Considérons une roue de réaction ayant un moment d'inertie $I_r = 10\,\mathrm{kg\,m^2}$. Elle est installée sur un satellite dont la superstructure a un moment d'inertie $I_s = 700\,\mathrm{kg\,m^2}$. (Par superstructure on veut dire TOUT le satellite SAUF la roue de réaction.) La roue de réaction tourne sur elle-même à une vitesse angulaire de 5 tours par seconde dans le sens des aiguilles d'une montre (sens horlogique). La superstructure tourne sur elle-même selon le même axe de rotation mais dans le sens opposé (sens anti-horlogique), à une vitesse angulaire de 0,07 rad/s. Vous pouvez considérer que le satellite n'est soumis à aucune force extérieure.

a) Quel est le moment angulaire de la roue de réaction ? Le moment angulaire de la superstructure ? Le moment angulaire total ?
b) On souhaite changer la vitesse de rotation de la superstructure pour qu'elle soit de 0,11 rad/s dans le sens horlogique. Quelle doit être la nouvelle vitesse angulaire de la roue de réaction pour que cela soit possible ?

Solution.

a) Comme la roue de réaction tourne à la vitesse de 5 tours/s, et qu'un tour est égal à 2π radians, sa vitesse angulaire est de $\omega_r = 5 \times 2\pi = 10\pi\,\mathrm{rad/s}$.

$$L_{\text{roue}} = I_r\omega_r = 10 \times 10\pi = 314{,}16\,\mathrm{kg\,m^2/s}$$
$$L_{\text{superstruct}} = I_s\omega_s = 700 \times 0,07 = 49\,\mathrm{kg\,m^2/s}$$

Pour calculer le moment angulaire total, on soustrait celui de la superstructure à celui de la roue (on choisit le sens horlogique comme étant positif, mais l'inverse peut se faire) car ils tournent avec des sens opposés : $L_{\text{tot}} = L_{\text{roue}} - L_{\text{superstruct}} = 314,16 - 49 = 265{,}16\,\mathrm{kg\,m^2/s}$

b) Par conservation du moment angulaire, le nouveau moment angulaire L'_{tot} doit être égal au moment angulaire total initial L_{tot}. Comme on ne connait pas encore le sens de rotation de la roue, on met un + devant son moment angulaire et le signe de sa vitesse angulaire déterminée à la fin indiquera si elle tourne dans le sens horlogique comme la superstructure, ou dans le sens opposé.

$$L'_{\text{tot}} = I_r\omega'_r + I_s\omega'_s = L_{\text{tot}} = 265{,}16\,\mathrm{kg\,m^2/s}$$

On peut isoler l'inconnue, ω'_r :

$$\omega'_r = \frac{1}{I_r}\left(L_{\text{tot}} - I_s\omega'_s\right) = 18{,}82\,\mathrm{rad/s}$$

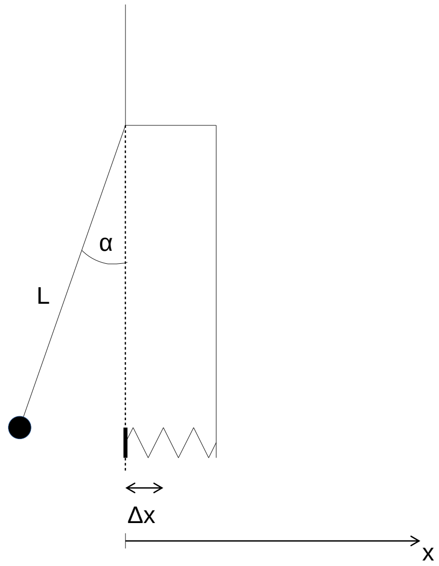
et la roue tourne dans le sens horlogique vu que cette valeur est positive.

Question 6 (3 points) On considère un pendule de masse m inconnue, suspendu au coin d'un mur. Le pendule est lâché sans vitesse initiale avec un angle $\alpha = 10°$. Lorsqu'il atteint la verticale, il rencontre avec une vitesse de 0,5 m/s un ressort de constante de rigidité k inconnue qui s'enfonce de 2 cm. Dans cette partie du mouvement, on suppose que le déplacement est uniquement horizontal.

a) Calculez le rapport $\dfrac{m}{k}$

b) Calculez la longueur L du pendule

c) En déduire la période totale de la masse dans ce système pendule-ressort.



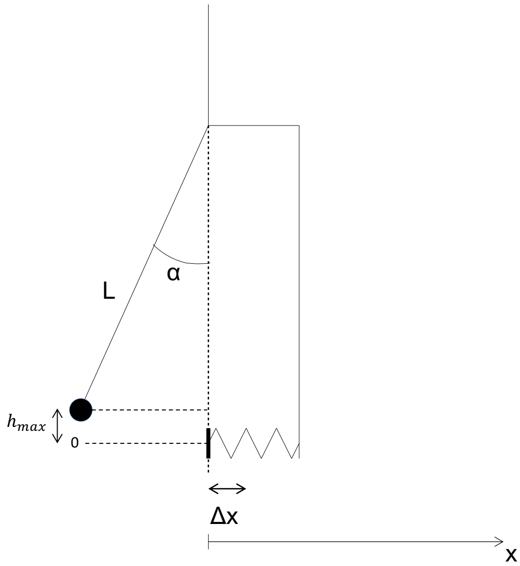
Solution.

a) Lorsque le pendule est vertical, toute l'énergie de la masse est cinétique, il n'a plus d'énergie potentielle. Il convertit ensuite cette énergie cinétique en énergie potentielle élastique en compressant le ressort. Lorsque le ressort est complétement comprimé, toute l'énergie de la masse est potentielle élastique puisqu'elle n'a plus de vitesse et pas de hauteur. Donc, par la conservation de l'énergie,

$$\begin{aligned} E_{cin,max} &= E_{élast,max} \\ \frac{1}{2}mv_{max}^2 &= \frac{1}{2}k\Delta x_{max}^2 \\ mv_{max}^2 &= k\Delta x_{max}^2 \\ \frac{m}{k} &= \frac{\Delta x_{max}^2}{v_{max}^2} = 1{,}6 \times 10^{-3}\,\mathrm{s}^2 \end{aligned}$$

b) On va trouver la longueur du pendule à partir de la hauteur de la masse à la position initiale (cf schéma ci-dessous) :

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{L - h_{max}}{L} \\ h_{max} &= L(1 - \cos\theta) \end{aligned}$$



Au départ, lorsqu'il est lâché avec l'angle α, la masse n'a pas d'énergie cinétique (on le lâche sans vitesse initiale). Toute son énergie est potentielle : $E_{pot,max} = mgh_{max}$. Par conservation de l'énergie,

$$\begin{aligned}
E_{pot,max} &= E_{cin,max} \\
mgh_{max} &= \frac{1}{2}mv_{max}^2 \\
gL(1-\cos\alpha) &= \frac{1}{2}v_{max}^2 \\
L &= \frac{v_{max}^2}{2g(1-\cos\alpha)} = 0{,}82\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

c) Ce système est un pendule simple la moitié du trajet, puis un ressort pendant l'autre moitié du trajet. Du coup, la période est moitié celle du pendule, moitié celle du ressort : $T_{tot} = \frac{1}{2}T_{pendule} + \frac{1}{2}T_{ressort} = \frac{1}{2}2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} + \frac{1}{2}2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}} + \pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 1{,}03\,\mathrm{s}$

Examen Physique Q2 juin 2020

Note: Cette année à cause des examens en ligne, il y avait une question de moins que d'habitude.

Question 1

En 1845, le pionnier de la météorologie Buys Ballot demanda à des musiciens dans un train en mouvement de jouer certaines notes afin de démontrer l'effet Doppler. La fréquence perçue par un observateur immobile est f_A lorsque le train s'approche et f_E lorsqu'il s'éloigne. La vitesse du son est prise égale a 340 m/s.

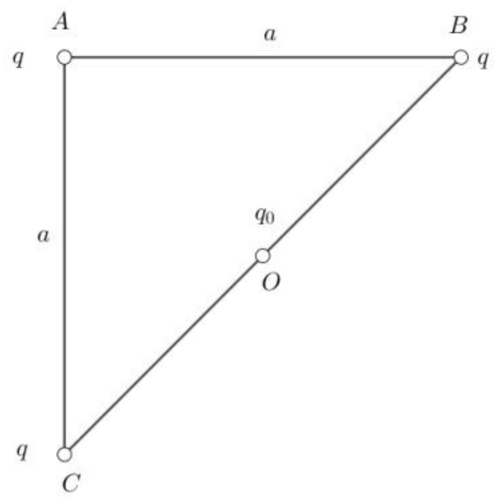
1. Que vaut le rapport f_A/f_E si la vitesse du train est égale, dans les deux cas, à 32 km/h ?
2. Si la somme des fréquences $f_E + f_A$ = 820 Hz, que vaut la fréquence de la note émise dans le train ?

Question 2

Trois charges ponctuelles identiques q (q > 0) sont fixées aux sommets A, B et C d'un triangle isocèle rectangle en A.

Les côtés AB et AC du triangle ont une même longueur |AB| = |AC| = a.

Une quatrième charge $q_0 > 0$ est maintenue fixe au milieu O du segment BC, comme le montre la figure ci-dessous :



1. Calculer la valeur de q_0 (en fonction de q) pour que la force électrostatique totale qui s'exerce **sur la charge fixée au sommet A** soit nulle. Montrer que cette dernière ne dépend pas de a.

2. Évaluer la valeur de q_0 si $q = 1$ μC.

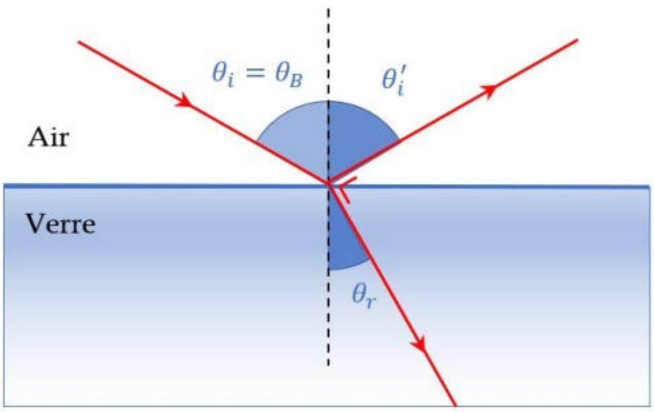
Question 3

Une lentille convergente est utilisée comme une loupe par un plongeur et a un facteur de grossissement de 2,5 dans l'eau ($n_{eau} = 1{,}33$).

1. Quelle est sa distance focale dans l'eau ?
2. Quelle est son rayon de courbure si les deux côtés de la loupe sont identiquement courbés et que le matériel qui compose la lentille est le verre ($n_{verre} = 1{,}5$) ?
3. Quelle serait sa distance focale dans l'air ?
4. Quel serait son grossissement si elle était utilisée dans l'air ?

Question 4

Un faisceau de lumière tombe selon un angle d'incidence égal à l'angle de polarisation (angle de Brewster) sur une plaque de verre flint (*n=1,6*).



1. Dans de telles conditions, quel angle se trouve entre le rayon réfracté et le rayon réfléchi ? Tirez-en une relation entre l'angle de réfraction θ_r, et l'angle de réflexion θ_i'.
2. Donnez l'expression de l'angle de Brewster θ_B et calculer sa valeur.
3. En déduire l'angle de réfraction θ_r

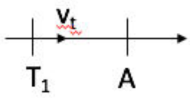
Question 5

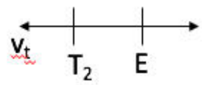
Certains jeux d’orgue, appelés jeux ondulants, sont composés – pour chaque note – de deux tuyaux (ouverts aux deux extrémités) de longueurs légèrement différentes. Lorsque l’on joue une note, du son est émis par les deux tuyaux correspondants, et la différence de longueur entre les tuyaux induit un phénomène de battement produisant un son très agréable à l’oreille. Dans cet exercice, on considérera que seuls les modes fondamentaux sont présents.

1. Quelle est la longueur d’un tuyau, ouvert aux deux extrémités, produisant un son correspondant au sol 4 (784 Hz) ?
2. Ce même tuyau est associé à un second tuyau légèrement plus court pour former un jeu ondulant, comme expliqué ci-dessus. Sachant que la fréquence des battements produits est de 3 Hz, quelle est la fréquence de la note émise par le second tuyau ?
3. Quelle est la longueur du second tuyau ?

Examen physique Q2 juin 2020 correction

Question 1





$$\frac{f_A}{f_T} = \frac{v - \cancel{v_A}}{v - v_T} \qquad\qquad \frac{f_E}{f_T} = \frac{v - \cancel{v_E}}{v + v_T}$$

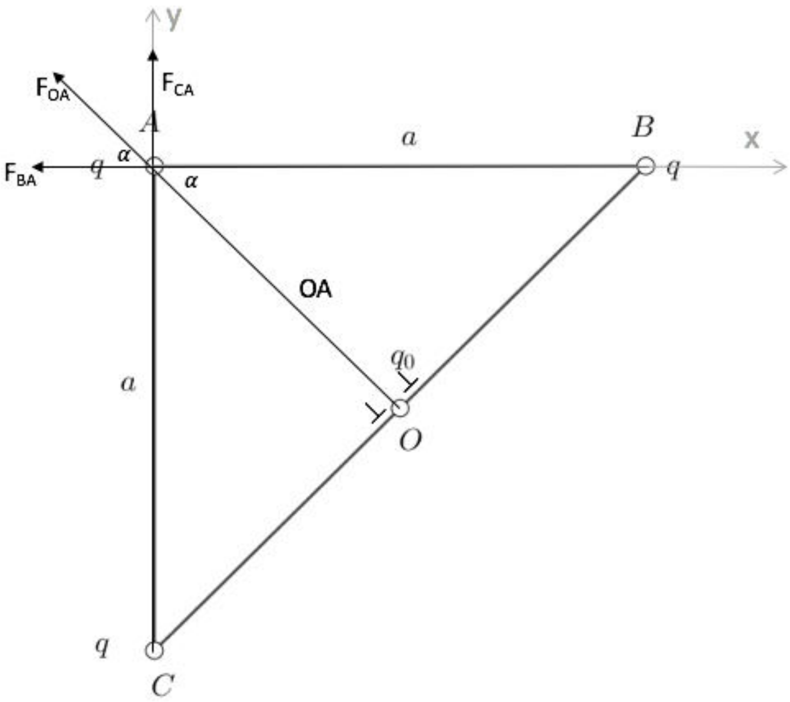
$$\rightarrow f_A = f_T \left(\frac{v}{v-v_T}\right) \qquad\qquad \rightarrow f_E = f_T \left(\frac{v}{v+v_T}\right)$$

1. $$\frac{f_A}{f_E} = \frac{f_T}{f_T} \cdot \frac{\left(\frac{v}{v-v_T}\right)}{\left(\frac{v}{v+v_T}\right)} = \frac{v}{v-v_T} \cdot \frac{v+v_T}{v} = \frac{v+v_T}{v-v_T} \rightarrow \frac{f_A}{f_E} = 1{,}05$$

2. $$\begin{cases} f_E + f_A = 820 \text{ Hz} \rightarrow f_E + 1{,}05 \,.\, f_E = 820 \text{ Hz} \rightarrow f_E = \frac{820}{2{,}05} = 400 \text{ Hz} \\ \frac{f_A}{f_E} = 1{,}05 \rightarrow f_A = 1{,}05 . f_E \rightarrow f_A = 420 \text{ Hz} \end{cases}$$

$$f_T = f_E . \frac{v+v_T}{v} = 400 . \frac{340+9}{340} = 410 \text{ Hz}$$

Question 2



$\alpha = 45°$ (géométrie)
$OA = B = \cos\alpha \cdot a$

1. $F_{tot,O,A} = F_{BA,e} + F_{CA,e} + F_{OA,e}$

En x: $F_{e,A,x} = -F_{BA} - \sin\alpha . F_{OA}$

$$= -k.\frac{q.q}{a^2} - \cos\alpha \ .k\ \frac{q_0 .\ q}{\cos^2\alpha\ .\ a^2}\ (1)$$

En y : $F_{e,A,y} = F_{CA} + \sin\alpha . F_{OA}$

$$= -k.\frac{q.q}{a^2} + \sin\alpha \ .k\ \frac{q_0 .\ q}{\cos^2\alpha\ .\ a^2}\ (2)$$

(1) $F_{e,A,x} = -\frac{k.q}{a^2}\left(q - \frac{q_0}{\cos^2\alpha}\right) = 0$ car $F_{tot} = 0$

(2) $\frac{k.q}{a^2}\left(q + \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} q_0\right) = 0$

$\rightarrow -\frac{k.q}{a^2}\left(q - \frac{q_0}{\cos^2\alpha}\right) = \frac{k.q}{a^2}\left(q + \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} q_0\right)$

$\rightarrow -q + \frac{q_0}{\cos^2\alpha} = q + \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} q_0$

$\rightarrow -q - q = \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} q_0 - \frac{q_0}{\cos^2\alpha}$

$\rightarrow -2q = \left(\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{1}{\cos^2\alpha}\right) q_0$

$\rightarrow$ $q_0 = -\frac{2q}{\frac{\sin\alpha - 1}{\cos^2\alpha}}$ où α=45° et ne dépend pas de a

2. $q_0 = \frac{-2.\,1\mu C}{\frac{\sin 45° - 1}{\cos^2 45°}} = \frac{-2\mu C}{-0{,}58} = 3{,}41\mu C$

Question 3

1. m = $\frac{0{,}25}{f} \Leftrightarrow f = \frac{0{,}25}{m} = 0{,}1$m -> 20cm
2. R1 = R2 = R lentille symétrique
   $n_v = 1{,}5$

formule des opticiens :
$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_v}{n_{eau}} - 1\right)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{f\left(\frac{n_v}{n_{eau}} - 1\right)} = \frac{2}{R} \Leftrightarrow f\left(\frac{n_v}{n_{eau}} - 1\right)2 = R \Leftrightarrow$
R=0,1.2.$\left(\frac{1{,}5}{1{,}33} - 1\right) \Leftrightarrow$ R=2,5cm

3. $\frac{1}{f} = (\frac{n_v}{n_{air}(=1)} - 1)(\frac{2}{R}) \Leftrightarrow \frac{1}{f} = (1{,}5 - 1)\left(\frac{2}{0{,}025}\right) = 39{,}12 \Leftrightarrow f = 0{,}025$m = 2,5cm

4.m_{air} = $\frac{0{,}25}{f} = 10$

Question 4

1. L'angle entre le rayon réfracté et le rayon réfléchi est indiqué sur la figure et comporte 90°.
Comme nous le savon selon les propriétés d'une onde de lumière réfléchie, $\theta_B = \theta_i'$ (2) et selon la loi de snell : $n_{air}.\ \sin\theta_B = n_v.\ \sin\theta_i$ (1)
(1) et (2) $\rightarrow$ $\sin\theta_i' = n_v.\ \sin\theta_r$ qui peut être écrit comme : θ_i' = arcsin (1,6 . $\sin\theta_r$)

2. $\tan\theta_B = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow \theta_B$ = acrtan($\frac{n_2}{n_1}$) = arctan(1,6) = 58°

3. Selon (1) $\rightarrow \theta_r$ = arcsin $(\frac{\sin\theta_r}{n_v})$ = 32°

Question 5

1. $f = 784$ Hz
   n = 1 mode fondamental

L = $\frac{n\lambda}{2}$ et $v = \lambda f$ $\rightarrow$ $L_1 = \frac{n\lambda}{2f} = \frac{1\,.340}{2\,.784} = 0{,}22$m

2. $L_2 < L_1 \rightarrow$ fréquence plus haute pour L_2
   $f$battements = $|\, f_2 - f_1 \,|$ = 3 Hz
   $f_2 = f_1$ + 3 Hz = 787 Hz

3. $L_2 = \frac{nv}{2f} = \frac{1.\ 340}{2.\ 787}$ = 0,21 m

Physique 1 – PHYS-F104 (2019-2020)

Examen de janvier 2020

10 janvier 2020

Nom :

Prénom :

N° de matricule :

Section (entourer) : Biologie — Géographie — Géologie — Pharmacie

---

Consignes générales :

1. Écrivez immédiatement en **CAPITALES** vos prénom, nom, numéro de matricule et section.
2. Vérifiez que votre énoncé comporte bien **7 feuilles** (6 questions).
3. Ne dégrafez pas les pages.
4. Vous n'avez droit à rien d'autre que de quoi écrire, votre formulaire (une feuille A4), votre calculatrice et votre carte d'étudiant.
5. Les GSM, tablettes, smartwatches et autres moyens de communication sont interdits. Ils doivent être éteints et rangés dans les sacs le long du mur. En aucun cas vous ne pouvez avoir un GSM (ou autre moyen de communication) à portée de main, même éteint.
6. Ne répondez pas en rouge, cette couleur étant réservée pour la correction.
7. **Les réponses doivent toutes être clairement justifiées et les unités doivent être indiquées pour les résultats numériques.**
8. En cas de besoin, vous prendrez les valeurs de constantes suivantes :
   accélération gravitationnelle terrestre : $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$
9. Cette partie dure **2 heures (120 minutes)**.

Bon travail !

/3	/3	/4	/4	/3	/3	/20

Question 1 (3 points) Le nombre de Bagnold (Ba) est un nombre **sans dimension** utilisé pour caractériser l'écoulement de grains de sable. Il permet notamment de déterminer à partir de quelles conditions l'écoulement passe d'un fluide à celui d'un fluide granulaire où l'énergie est dissipée par choc entre les grains et non plus par frottement. Il est fonction des quantités suivantes :

m	-	Masse d'un grain
γ	-	Gradient de vitesse en fonction de la distance (vitesse par unité de longueur)
L_c	-	Longueur caractéristique
μ	-	Viscosité du fluide contenant les grains

La viscosité est en général exprimée en Pascal $\times$ seconde, où le Pascal est une unité de pression (= force par unité de surface).

a) Donnez les dimensions de la pression en masse, longueur, temps (M, L, T)

b) Donnez les dimensions de la viscosité en masse, longueur, temps (M, L, T)

c) Sachant que le nombre de Bagnold, Ba, est proportionnel (linéaire) à la masse d'un grain m, déterminez par analyse dimensionnelle la dépendance de Ba en les quantités (m, γ, L_c, μ).

Solution.

a) $[P] = \left[\frac{F}{S}\right] = \left[\frac{ma}{S}\right] = MLT^{-2}L^{-2} = ML^{-1}T^{-2}$

b) $[\mu] = [P \times s] = ML^{-1}T^{-2} \times T = ML^{-1}T^{-1}$

c) On commence par indiquer toutes les quantités dont doit dépendre le nombre de Bagnold, avec des exposants inconnus

$$\mathrm{Ba} = m^\alpha \gamma^\beta L_c^\delta \mu^\epsilon$$

Comme on dit que Ba est proportionnel (linéaire) à la masse, $\alpha = 1$. On sait que Ba est sans dimension, donc sa dimension est égale à 1 :

$$\begin{aligned}[\mathrm{Ba}] &= [m]^\alpha [\gamma]^\beta [L_c]^\delta [\mu]^\epsilon = 1 \\ &= M^\alpha (T^{-1})^\beta L^\delta (ML^{-1}T^{-1})^\epsilon \\ &= M^\alpha T^{-\beta} L^\delta M^\epsilon L^{-\epsilon} T^{-\epsilon} \\ &= M^{\alpha+\epsilon} T^{-\beta-\epsilon} L^{\delta-\epsilon} = 1\end{aligned}$$

Comme la dimension totale doit être 1, l'exposant de chaque dimension séparément doit être zéro :

$$\begin{cases} \alpha + \epsilon = 0 \\ -\beta - \epsilon = 0 \\ \delta - \epsilon = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \epsilon = 0 \\ \beta = -\epsilon \\ \delta = \epsilon \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \epsilon = -1 \\ \beta = 1 \\ \delta = -1 \end{cases}$$

Au final, $\mathrm{Ba} \propto m\gamma L_c^{-1}\mu^{-1} = \frac{m\gamma}{L_c \mu}$.

Question 2 (3 points)
Un bateau sur un lac subit un choc avec un rocher immergé, qui fait un trou de $40\,\text{cm}^2$ dans sa coque à 1 m en-dessous de la surface de l'eau. Le bateau peut recevoir $10\,\text{m}^3$ d'eau avant d'avoir sa cargaison trempée.

a) Quelle est la vitesse du jet d'eau entrant dans le bateau ?
b) A quel débit volumique l'eau entre-t-elle dans la coque du navire ?
c) Estimez le temps qu'il reste à l'équipage avant que la cargaison soit ruinée par l'eau.

Solution.

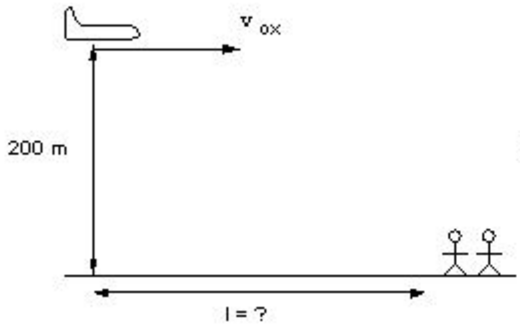
a) C'est exactement la même situation que celle du calcul de la formule de Torricelli vue au cours : un grand bassin d'eau qui s'écoule dans un petit trou. On peut donc directement utiliser celle-ci, $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 10 \times 1} = \sqrt{20}$ m/s.
b) En n'oubliant pas de convertir la surface du trou en m^2, $D_v = vS = \sqrt{20} \times 40 \times 10^{-4} = 0{,}018\,\text{m}^3/\text{s}$
c) $D_v = \dfrac{V}{t} \leftrightarrow t = \dfrac{V}{D_v} = \dfrac{10}{0,018} = 555,56$ s, donc 9,26 minutes.

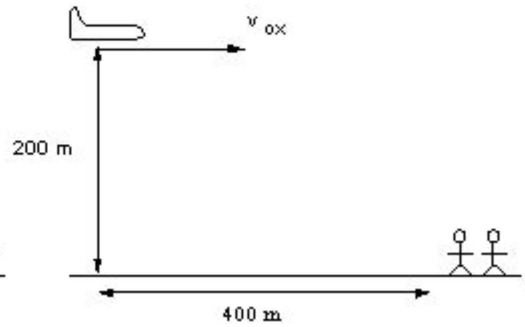
Question 3 (4 points) Des secouristes veulent larguer des provisions à des alpinistes isolés sur la crête d'une montagne, 200 m plus bas. Normalement ce serait un largage parachuté afin que les provisions arrivent au sol en douceur, mais imaginons que ce soit un largage en chute libre. L'avion se déplace horizontalement à une vitesse de 250 km/h.

a) A quelle distance horizontale l avant les alpinistes doivent-ils lancer les provisions ?

b) Si l'avion larguait les provisions à une distance horizontale de $l = 400$ m avant le point visé, quelle vitesse initiale verticale supplémentaire devrait-on leur rajouter (vers le haut ou vers le bas ?) pour qu'elles tombent précisément à l'endroit souhaité ?

c) Dans la situation décrite au point précédent, à quelle vitesse (en norme) vont-elles toucher le sol ?





Solution.

a) Les deux équations décrivant le mouvement des provisions sont celles d'un MRU de vitesse initiale $v_{0x} = 250\,\mathrm{km/h} = 69{,}44\,\mathrm{m/s}$ sur l'axe horizontal, et un MRUA sans vitesse initale de hauteur initiale $y_0 = 200\,\mathrm{m}$.

$$x(t) = v_{0x}t$$
$$y(t) = y_0 - \frac{gt^2}{2}$$

Le temps de chute est trouvé en cherchant le temps t_{chute} où les provisions atteignent le sol $y(t_{\text{chute}}) = 0$,

$$y(t_{\text{chute}}) = 0 = y_0 - \frac{gt_{\text{chute}}^2}{2}$$
$$t_{\text{chute}}^2 = \frac{2y_0}{g}$$
$$t_{\text{chute}} = \sqrt{\frac{2y_0}{g}} = 6{,}32\,\mathrm{s}$$

On peut trouver à partir de cette durée de chute la distance horizontale parcourue par le colis avant d'atteindre le sol $x(t_{\text{chute}}) = l$

$$x(t_{\text{chute}}) = l = v_{0x}t_{\text{chute}} = v_{0x}\sqrt{\frac{2y_0}{g}} = 439{,}21\,\mathrm{m}$$

b) On imagine maintenant que les provisions sont lancées avec une vitesse initiale verticale v_{0y} inconnue additionnelle. Les équations décrivant leur mouvement deviennent

$$x(t) = v_{0x}t$$
$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}$$

On sait que $x(t_\text{chute}) = l = 400\,\text{m}$. On peut trouver le temps de chute à partir de ça :

$$x(t_\text{chute}) = l = 400 = v_{0x} t_\text{chute}$$
$$t_\text{chute} = \frac{l}{v_{0x}} = 5{,}76\,\text{s}$$

On utilise le temps de chute pour trouver quelle vitesse initiale verticale permet d'obtenir un tel mouvement :

$$y(t_\text{chute}) = 0 = y_0 + v_{0y} t_\text{chute} - \frac{g t_\text{chute}^2}{2}$$
$$v_{0y} t_\text{chute} = -y_0 + \frac{g t_\text{chute}^2}{2}$$
$$v_{0y} = \frac{-y_0}{t_\text{chute}} + \frac{g t_\text{chute}}{2} = \frac{-y_0 v_{0x}}{l} + \frac{g l}{2 v_{0x}} = -5{,}92\,\text{m/s}$$

Ce qui signifie qu'il faut une vitesse initiale verticale de $5{,}92\,\text{m/s}$ vers le bas.

c) La vitesse horizontale ne change pas, vu qu'il s'agit d'un MRU : $v_x(t_\text{chute}) = v_{0x}$. La vitesse verticale suit l'équation d'un MRUA

$$v_y(t) = v_{0y} - gt$$

Dans ce cas, $v_y(t_\text{chute}) = v_{0y} - g t_\text{chute} = -63{,}52\,\text{m/s}$. La norme de la vitesse au moment de la chute est finalement $v = \sqrt{v_x(t_\text{chute})^2 + v_y(t_\text{chute})^2} = 94{,}11\,\text{m/s}$

Question 4 (4 points) Un camion (M = 4750 kg) transporte une caisse (m = 700 kg) simplement déposée sur sa plate-forme, sans aucune fixation, seul le frottement peut la garder en place (donc force de frottement dans la direction de l'accélération du camion). Les coefficients de frottement statique et cinétique entre la plate-forme et la caisse sont respectivement de 0,75 et 0,50.

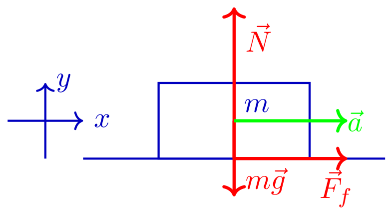
a) Si le camion accélère à $1{,}50\,\mathrm{m/s^2}$, quel est le module de la force de frottement statique empêchant la caisse de glisser ?

b) Quel sera le module de l'accélération maximale que peut subir le camion sans que la caisse ne glisse ?

c) Quel est le module de l'accélération maximale que peut subir le camion sans que la caisse ne glisse s'il monte une pente inclinée de 10° ?

Solution.

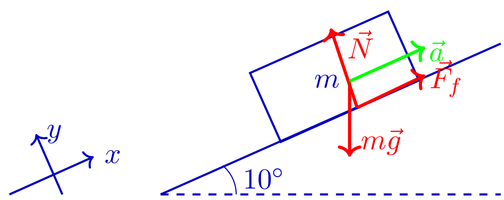
a) Sans aucun frottement et vu l'absence de fixation, si le camion accélérait, la boîte resterait au même endroit tandis que le camion avancerait. La force de frottement empêche le mouvement relatif de la caisse par rapport à camion. Comme cette force s'oppose au mouvement de la boîte par rapport au camion, elle accélère la boite dans le même sens que le camion.



Autrement dit, la deuxième loi de Newton $\sum \vec{F} = \vec{a}$ donne, une fois projetée sur l'axe vertical y : $N - mg = 0$ puisque la caisse n'est pas accélérée verticalement et sur l'axe horizontal x : $F_f = ma$ où m est la masse de la caisse et a est l'accélération que doit subir la boîte pour rester solidaire du camion, donc $1{,}50\,\mathrm{m/s^2}$. Dans ce cas, $F_f = 1\,050\,\mathrm{N}$.

b) La force de frottement maximale qu'il peut y avoir est $F_{f,max} = \mu_s N$. La normale N est directement égale au poids mg comme vu au point précédent.
Cette force de frottement maximale limite l'accélération maximale que le camion pourra avoir puisque si cette accélération est dépassée par le camion, la force de frottement ne sera pas assez élevée pour donner la même accélération à la caisse, et la caisse n'arrivera pas à suivre le mouvement. Comme vu au cours, $F_{f,max} = \mu_s N = ma_{max}$. Il reste à isoler $a_{max} = \frac{\mu_s N}{m} = \frac{\mu_s mg}{m} = \mu_s g = 7{,}5\,\mathrm{m/s^2}$.

c) L'accélération suit maintenant un plan incliné et n'est plus horizontale. Le schéma suivant représente la boite déposée sur la surface du camion, faisant un angle de 10° avec l'horizontale.



On applique la deuxième loi de Newton, $\sum \vec{F} = \vec{N} + \vec{F}_f + m\vec{g} = m\vec{a}$. Sur l'axe x, on obtient $F_f - mg\sin(10°) = ma$, et sur l'axe y, on a $N - mg\cos(10°) = 0$.

Du coup, $N = mg\cos(10°)$, et de nouveau, comme on cherche l'accélération maximale, $F_{f,max} - mg\sin(10°) = ma_{max}$ où $F_{f,max} = \mu_s N$. Il ne reste qu'à isoler :

$$\begin{aligned}
a_{max} &= \frac{F_{f,max}}{m} - g\sin(10°) \\
&= \frac{\mu_s N}{m} - g\sin(10°) \\
&= \frac{\mu_s mg\cos(10°)}{m} - g\sin(10°) \\
&= \mu_s g\cos(10°) - g\sin(10°) \\
&= g\left(\mu_s\cos(10°) - \sin(10°)\right) = 5{,}65\,\mathrm{m/s^2}
\end{aligned}$$

Question 5 (3 points) Certains satellites utilisent des roues de réaction afin d'ajuster leur orientation dans l'espace, par exemple pour pointer leur caméra dans la direction d'une planète. Une roue de réaction est un disque tournant à grande vitesse sur lui-même, un moteur électrique permet de changer sa vitesse de rotation.
Considérons une roue de réaction ayant un moment d'inertie $I_r = 10\,\mathrm{kg\,m^2}$. Elle est installée sur un satellite dont la superstructure a un moment d'inertie $I_s = 700\,\mathrm{kg\,m^2}$. (Par superstructure on veut dire TOUT le satellite SAUF la roue de réaction.) La roue de réaction tourne sur elle-même à une vitesse angulaire de 5 tours par seconde dans le sens des aiguilles d'une montre (sens horlogique). La superstructure tourne sur elle-même selon le même axe de rotation mais dans le sens opposé (sens anti-horlogique), à une vitesse angulaire de 0,07 rad/s. Vous pouvez considérer que le satellite n'est soumis à aucune force extérieure.

a) Quel est le moment angulaire de la roue de réaction ? Le moment angulaire de la superstructure ? Le moment angulaire total ?
b) On souhaite changer la vitesse de rotation de la superstructure pour qu'elle soit de 0,11 rad/s dans le sens horlogique. Quelle doit être la nouvelle vitesse angulaire de la roue de réaction pour que cela soit possible ?

Solution.

a) Comme la roue de réaction tourne à la vitesse de 5 tours/s, et qu'un tour est égal à 2π radians, sa vitesse angulaire est de $\omega_r = 5 \times 2\pi = 10\pi\,\mathrm{rad/s}$.

$$L_{\text{roue}} = I_r\omega_r = 10 \times 10\pi = 314{,}16\,\mathrm{kg\,m^2/s}$$
$$L_{\text{superstruct}} = I_s\omega_s = 700 \times 0,07 = 49\,\mathrm{kg\,m^2/s}$$

Pour calculer le moment angulaire total, on soustrait celui de la superstructure à celui de la roue (on choisit le sens horlogique comme étant positif, mais l'inverse peut se faire) car ils tournent avec des sens opposés : $L_{\text{tot}} = L_{\text{roue}} - L_{\text{superstruct}} = 314,16 - 49 = 265{,}16\,\mathrm{kg\,m^2/s}$

b) Par conservation du moment angulaire, le nouveau moment angulaire L'_{tot} doit être égal au moment angulaire total initial L_{tot}. Comme on ne connait pas encore le sens de rotation de la roue, on met un + devant son moment angulaire et le signe de sa vitesse angulaire déterminée à la fin indiquera si elle tourne dans le sens horlogique comme la superstructure, ou dans le sens opposé.

$$L'_{\text{tot}} = I_r\omega'_r + I_s\omega'_s = L_{\text{tot}} = 265{,}16\,\mathrm{kg\,m^2/s}$$

On peut isoler l'inconnue, ω'_r :

$$\omega'_r = \frac{1}{I_r}\left(L_{\text{tot}} - I_s\omega'_s\right) = 18{,}82\,\mathrm{rad/s}$$

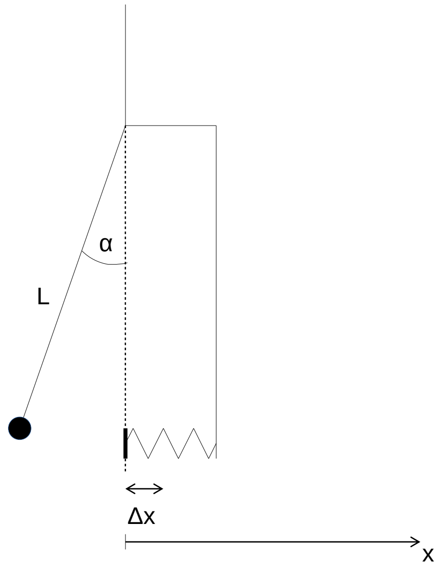
et la roue tourne dans le sens horlogique vu que cette valeur est positive.

Question 6 (3 points) On considère un pendule de masse m inconnue, suspendu au coin d'un mur. Le pendule est lâché sans vitesse initiale avec un angle $\alpha = 10°$. Lorsqu'il atteint la verticale, il rencontre avec une vitesse de 0,5 m/s un ressort de constante de rigidité k inconnue qui s'enfonce de 2 cm. Dans cette partie du mouvement, on suppose que le déplacement est uniquement horizontal.

a) Calculez le rapport $\frac{m}{k}$

b) Calculez la longueur L du pendule

c) En déduire la période totale de la masse dans ce système pendule-ressort.



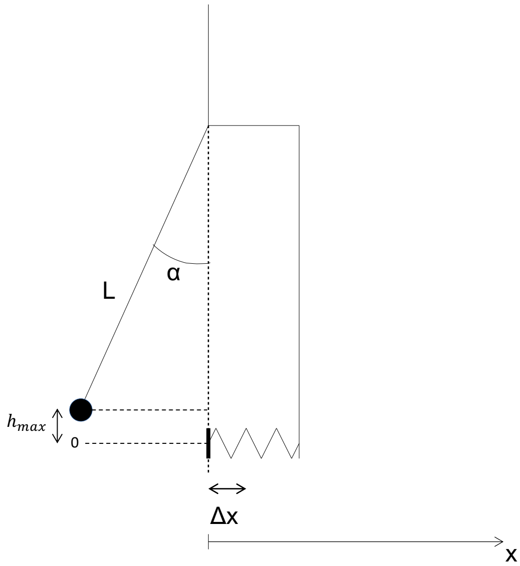
Solution.

a) Lorsque le pendule est vertical, toute l'énergie de la masse est cinétique, il n'a plus d'énergie potentielle. Il convertit ensuite cette énergie cinétique en énergie potentielle élastique en compressant le ressort. Lorsque le ressort est complétement comprimé, toute l'énergie de la masse est potentielle élastique puisqu'elle n'a plus de vitesse et pas de hauteur. Donc, par la conservation de l'énergie,

$$\begin{aligned} E_{cin,max} &= E_{élast,max} \\ \frac{1}{2}mv_{max}^2 &= \frac{1}{2}k\Delta x_{max}^2 \\ mv_{max}^2 &= k\Delta x_{max}^2 \\ \frac{m}{k} &= \frac{\Delta x_{max}^2}{v_{max}^2} = 1{,}6 \times 10^{-3}\,\mathrm{s}^2 \end{aligned}$$

b) On va trouver la longueur du pendule à partir de la hauteur de la masse à la position initiale (cf schéma ci-dessous) :

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{L - h_{max}}{L} \\ h_{max} &= L(1 - \cos\theta) \end{aligned}$$



Au départ, lorsqu'il est lâché avec l'angle α, la masse n'a pas d'énergie cinétique (on le lâche sans vitesse initiale). Toute son énergie est potentielle : $E_{pot,max} = mgh_{max}$. Par conservation de l'énergie,

$$\begin{aligned}
E_{pot,max} &= E_{cin,max} \\
mgh_{max} &= \frac{1}{2}mv_{max}^2 \\
gL(1-\cos\alpha) &= \frac{1}{2}v_{max}^2 \\
L &= \frac{v_{max}^2}{2g(1-\cos\alpha)} = 0{,}82\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

c) Ce système est un pendule simple la moitié du trajet, puis un ressort pendant l'autre moitié du trajet. Du coup, la période est moitié celle du pendule, moitié celle du ressort : $T_{tot} = \frac{1}{2}T_{pendule} + \frac{1}{2}T_{ressort} = \frac{1}{2}2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} + \frac{1}{2}2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}} + \pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 1{,}03\,\mathrm{s}$

Examen Physique Q2 juin 2020

Note: Cette année à cause des examens en ligne, il y avait une question de moins que d'habitude.

Question 1

En 1845, le pionnier de la météorologie Buys Ballot demanda à des musiciens dans un train en mouvement de jouer certaines notes afin de démontrer l'effet Doppler. La fréquence perçue par un observateur immobile est f_A lorsque le train s'approche et f_E lorsqu'il s'éloigne. La vitesse du son est prise égale a 340 m/s.

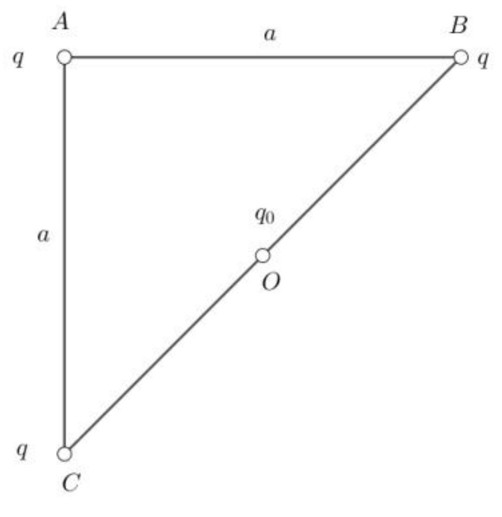
1. Que vaut le rapport f_A/f_E si la vitesse du train est égale, dans les deux cas, à 32 km/h ?
2. Si la somme des fréquences $f_E + f_A$ = 820 Hz, que vaut la fréquence de la note émise dans le train ?

Question 2

Trois charges ponctuelles identiques q (q > 0) sont fixées aux sommets A, B et C d'un triangle isocèle rectangle en A.

Les côtés AB et AC du triangle ont une même longueur |AB| = |AC| = a.

Une quatrième charge q_0 > 0 est maintenue fixe au milieu O du segment BC, comme le montre la figure ci-dessous :



1. Calculer la valeur de q_0 (en fonction de q) pour que la force électrostatique totale qui s'exerce **sur la charge fixée au sommet A** soit nulle. Montrer que cette dernière ne dépend pas de a.

2. Évaluer la valeur de q_0 si $q = 1\ \mu C$.

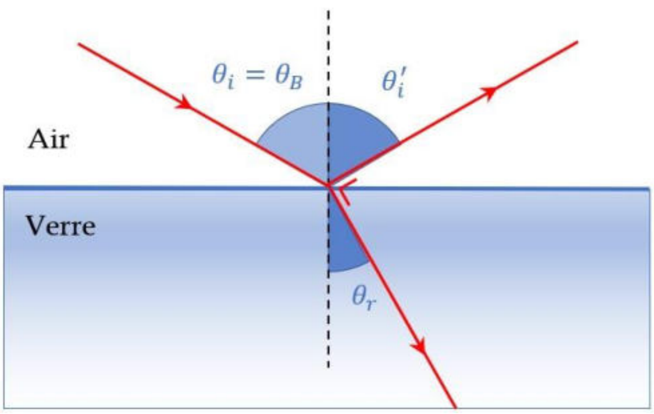
Question 3

Une lentille convergente est utilisée comme une loupe par un plongeur et a un facteur de grossissement de 2,5 dans l'eau (n_{eau} = 1,33).

1. Quelle est sa distance focale dans l'eau ?
2. Quelle est son rayon de courbure si les deux côtés de la loupe sont identiquement courbés et que le matériel qui compose la lentille est le verre (n_{verre} =1,5) ?
3. Quelle serait sa distance focale dans l'air ?
4. Quel serait son grossissement si elle était utilisée dans l'air ?

Question 4

Un faisceau de lumière tombe selon un angle d'incidence égal à l'angle de polarisation (angle de Brewster) sur une plaque de verre flint (*n=1,6*).



1. Dans de telles conditions, quel angle se trouve entre le rayon réfracté et le rayon réfléchi ? Tirez-en une relation entre l'angle de réfraction θ_r, et l'angle de réflexion θ_i'.
2. Donnez l'expression de l'angle de Brewster θ_B et calculer sa valeur.
3. En déduire l'angle de réfraction θ_r

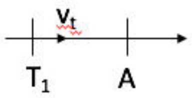
Question 5

Certains jeux d'orgue, appelés jeux ondulants, sont composés – pour chaque note – de deux tuyaux (ouverts aux deux extrémités) de longueurs légèrement différentes. Lorsque l'on joue une note, du son est émis par les deux tuyaux correspondants, et la différence de longueur entre les tuyaux induit un phénomène de battement produisant un son très agréable à l'oreille. Dans cet exercice, on considérera que seuls les modes fondamentaux sont présents.

1. Quelle est la longueur d'un tuyau, ouvert aux deux extrémités, produisant un son correspondant au sol 4 (784 Hz) ?
2. Ce même tuyau est associé à un second tuyau légèrement plus court pour former un jeu ondulant, comme expliqué ci-dessus. Sachant que la fréquence des battements produits est de 3 Hz, quelle est la fréquence de la note émise par le second tuyau ?
3. Quelle est la longueur du second tuyau ?

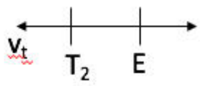
Examen physique Q2 juin 2020 correction

Question 1



$$\frac{f_A}{f_T} = \frac{v - \cancel{v_A}}{v - v_T}$$

$$\rightarrow f_A = f_T \left(\frac{v}{v - v_T}\right)$$



$$\frac{f_E}{f_T} = \frac{v - \cancel{v_E}}{v + v_T}$$

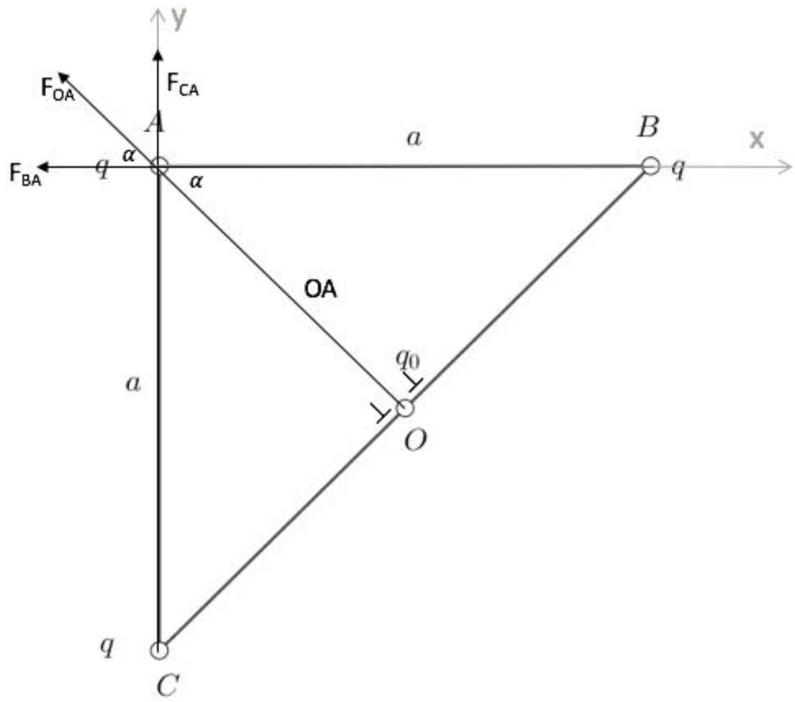
$$\rightarrow f_E = f_T \left(\frac{v}{v + v_T}\right)$$

1. $\frac{f_A}{f_E} = \frac{f_T}{f_T} \cdot \frac{\left(\frac{v}{v - v_T}\right)}{\left(\frac{v}{v + v_T}\right)} = \frac{v}{v - v_T} \cdot \frac{v + v_T}{v} = \frac{v + v_T}{v - v_T} \rightarrow \frac{f_A}{f_E} = 1{,}05$

2. $\begin{cases} f_E + f_A = 820 \text{ Hz} \rightarrow f_E + 1{,}05 \, . \, f_E = 820 \text{ Hz} \rightarrow f_E = \frac{820}{2{,}05} = 400 \text{ Hz} \\ \frac{f_A}{f_E} = 1{,}05 \rightarrow f_A = 1{,}05 . f_E \rightarrow f_A = 420 \text{ Hz} \end{cases}$

$$f_T = f_E . \frac{v + v_T}{v} = 400 . \frac{340 + 9}{340} = 410 \text{ Hz}$$

Question 2



α = 45° (géométrie)
OA = B = cos α . a

1. $F_{tot,O,A} = F_{BA,e} + F_{CA,e} + F_{OA,e}$

En x: $F_{e,A,x} = -F_{BA} - \sin\alpha . F_{OA}$

$$= -k. \frac{q.q}{a^2} - \cos\alpha \; . k \; \frac{q_0 .\, q}{\cos^2\alpha \, . \, a^2} \quad (1)$$

En y : $F_{e,A,y} = F_{CA} + \sin\alpha . F_{OA}$

$$= -k. \frac{q.q}{a^2} + \sin\alpha \; . k \; \frac{q_0 .\, q}{\cos^2\alpha \, . \, a^2} \quad (2)$$

(1) $F_{e,A,x} = -\frac{k.q}{a^2}\left(q - \frac{q_0}{\cos^2\alpha}\right) = 0$ car $F_{tot} = 0$

(2) $\frac{k.q}{a^2}\left(q + \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} q_0\right) = 0$

$\rightarrow -\frac{k.q}{a^2}\left(q - \frac{q_0}{\cos^2\alpha}\right) = \frac{k.q}{a^2}\left(q + \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} q_0\right)$

$\rightarrow -q + \frac{q_0}{\cos^2\alpha} = q + \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} q_0$

$\rightarrow -q - q = \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} q_0 - \frac{q_0}{\cos^2\alpha}$

$\rightarrow -2q = \left(\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{1}{\cos^2\alpha}\right) q_0$

$\rightarrow$ $q_0 = -\frac{2q}{\frac{\sin\alpha - 1}{\cos^2\alpha}}$ où α=45° et ne dépend pas de a

2. $q_0 = \frac{-2.\,1\mu C}{\frac{\sin 45° - 1}{\cos^2 45°}} = \frac{-2\mu C}{-0{,}58} = 3{,}41\mu C$

<u>Question 3</u>

1. $m = \frac{0{,}25}{f} \Leftrightarrow f = \frac{0{,}25}{m} = 0{,}1\text{m}$ -> 20cm
2. R1 = R2 = R lentille symétrique
   $n_v = 1{,}5$

formule des opticiens :

$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_v}{n_{eau}} - 1\right)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{f\left(\frac{n_v}{n_{eau}} - 1\right)} = \frac{2}{R} \Leftrightarrow f\left(\frac{n_v}{n_{eau}} - 1\right)2 = R \Leftrightarrow$

$R = 0{,}1.2.\left(\frac{1{,}5}{1{,}33} - 1\right) \Leftrightarrow R = 2{,}5\text{cm}$

3. $\frac{1}{f} = \left(\frac{n_v}{n_{air}(=1)} - 1\right)\left(\frac{2}{R}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{f} = (1{,}5 - 1)\left(\frac{2}{0{,}025}\right) = 39{,}12 \Leftrightarrow f = 0{,}025\text{m} =$ 2,5cm

4. $m_{air} = \frac{0{,}25}{f} = 10$

<u>Question 4</u>

1. L'angle entre le rayon réfracté et le rayon réfléchi est indiqué sur la figure et comporte 90°.
Comme nous le savon selon les propriétés d'une onde de lumière réfléchie, $\theta_B = \theta_i'$ (2) et selon la loi de snell : $n_{air}.\sin\theta_B = n_v.\sin\theta_i$ (1)
(1) et (2) $\rightarrow$ $\sin\theta_i' = n_v.\sin\theta_r$ qui peut être écrit comme : $\theta_i' = \arcsin(1{,}6\,.\,\sin\theta_r)$

2. $\tan\theta_B = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow \theta_B = \text{acrtan}\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = \arctan(1{,}6) = 58°$

3. Selon (1) $\rightarrow \theta_r$ = arcsin $(\frac{\sin\theta_r}{n_v})$ = 32°

Question 5

1. $f = 784$ Hz
   n = 1 mode fondamental

L = $\frac{n\lambda}{2}$ et $v = \lambda f$ $\rightarrow$ L_1=$\frac{n\lambda}{2f} = \frac{1.340}{2.784} = 0{,}22$m

2. $L_2 < L_1 \rightarrow$ fréquence plus haute pour L_2
   $f$battements = $|f_2 - f_1|$ = 3 Hz
   $f_2 = f_1$ + 3 Hz = 787 Hz

3. $L_2 = \frac{nv}{2f} = \frac{1.\ 340}{2.\ 787}$ = 0,21 m

Examen physique août 2020 Q2

Question 1

Deux tuyaux d'orgue, le premier ouvert aux deux extrémités et le second ouvert à l'une de ses extrémités et fermé à l'autre émettent du son simultanément. Dans cet exercice, on considèrera que seuls les modes fondamentaux sont présents.

1. Quelle est la longueur du tuyau à l'extrémité fermée, produisant un son correspondant au sol_2, d'une longueur d'onde de λ = 175cm ?
2. Le tuyau ouvert est plus long que le tuyau à l'extrémité fermée. Lorsque les deux tuyaux émettent simultanément une note, un battement d'une fréquence de 4 Hz est créé. Déterminez la fréquence du mode fondamental émis par le tuyau ouvert.
3. Déterminez la longueur d'onde du mode fondamental émis par le tuyau ouvert.
4. Quelle est la longueur du tuyau ouvert ?

Question 2

On place un dispositif de fentes de Young à savoir deux fentes minces dans un matériau opaque séparées par une distance d = 0,1 mm. Les fentes sont éclairées par une lumière blanche d'un côté et projettent des franges d'interférence sur un mur situé à une distance D= 2m des fentes. Une interférence constructive située en face des deux fentes et de couleur blanche est utilisée comme point de référence pour les mesures ultérieures.

1. Si le rapport des longueurs d'ondes $\lambda_{violet}/\lambda_{rouge}$ = 2/3, quel sera le rapport entre les distances de la première frange rouge et de la première frange mauve par rapport au point de références : $\lambda_{violet}/\lambda_{rouge}$? Justifiez.
2. Sachant que la première frange de couleur violette apparaît à une distance y = 12,6 mm du point de référence, quel est la longueur d'onde de la lumière de cette couleur ?
3. Si l'on place le dispositif dans l'eau, comment est affecté le rapport $\lambda_{violet}/\lambda_{rouge}$? Justifiez (de longs calculs ne sont pas nécessaires).
4. Sachant que l'indice de réfraction de l'eau est de n_e = 1.33 = 4/3 quelle sera la distance entre la première frange violette et le point de référence ?

Question 3

1. Une lentille taillée dans du verre d'indice de réfraction 1,5 a une distance focale 5 fois plus élevée dans un liquide que dans l'air. Que vaut l'indice de réfraction du liquide ?

2. On dispose de trois lentilles. La première, recevant des rayons lumineux d'un objet situé à l'infini, forme une image à 1,5 cm du même côté que l'objet. Si on substitue la première lentille par la deuxième, l'image se forme 1 cm plus loin de la lentille.
    a) Quelles sont les puissances respectives de la première et de la deuxième lentille ?

b) Quelle doit être la puissance de la troisième lentille si, en l’accolant à la deuxième, l’image se forme au même endroit que pour la première lentille ?

Question 4

Un alpiniste chute depuis le sommet d’une falaise en poussant un cri d’une fréquence égale à 370 Hz. Lorsqu’il s’écrase au bas de la falaise, la fréquence du cri perçue par ses compagnons restés immobiles au sommet n’est plus que de 312 Hz.

1. Quelle est la vitesse de chute de l’alpiniste lorsqu’il heurte le sol ?
2. En supposant qu’il n’ait rencontré aucun obstacle durant sa chute, déterminez la hauteur de la falaise. Négligez les frottements dus à l’air.

Physique 1 – PHYS-F104 (2020-2021)

Interrogation de novembre

30 octobre 2020

Consignes générales :

1. **Les réponses doivent toutes être clairement justifiées et les unités doivent être indiquées pour les résultats numériques.**
2. En cas de besoin, vous prendrez les valeurs de constantes suivantes :
   accélération gravitationnelle : $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$
   constante gravitationnelle : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
3. Cette interrogation dure **2 heures (120 minutes)**.

Bon travail !

/4	/4	/4	/4	/4	/20

Question 1 (4 points) Une moto roule à une vitesse constante de 90 km/h quand elle dépasse une voiture de police à l'arrêt. Au moment du dépassement la voiture de police démarre pour la rattraper, avec une accélération variant avec le temps qui est donnée par l'équation $a(t) = j_0 t$, où j_0 représente le taux de variation de l'accélération, qu'on appelle l'"à-coup" ou le "jerk" et a une dimension de m/s^3. Dans ce cas, l'équation du mouvement de la voiture de police est donnée par :
$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{a_0}{2}t^2 + \frac{j_0}{6}t^3$ avec x_0, v_0, et a_0 définis de la même facon que dans la formule du MRUA.

a) Calculer l'instant où la voiture de police rattrape le motard si la voiture de police a un à-coup de 6 m/s^3.

b) Quelle est la distance parcourue par la voiture de police ?

Solution. Vitesse de la moto, en [m/s] : $v_\mathrm{m} = \frac{90000}{3600} = 25[\mathrm{m/s}]$
Position de la moto en fonction du temps :

$$x_\mathrm{m}(t) = x_0 + v_\mathrm{m} t = 25t$$

Position de la voiture de police en fonction du temps :

$$x_\mathrm{v}(t) = x_0 + v_0 t + \frac{a_0 t^2}{2} + \frac{j_0 t^3}{6}$$

avec $x_0 = 0$ (position initiale), $v_0 = 0$ (vitesse initiale) et $a_0 = 0$ (accélération initiale nulle).
Ils se croisent quand $x_\mathrm{m}(t) = x_\mathrm{v}(t)$, c'est à dire :

$$25t = \frac{j_0 t^3}{6}$$

Avec $j_0 = 6$. On peut en déduire l'instant où la voiture rejoint la moto :

$$25 = t^2 \longrightarrow t = 5\mathrm{s}$$

Finalement, on obtient la position (de la moto, pour plus de facilité) en $t = 5$s :

$$x = 25t = 125\mathrm{m}$$

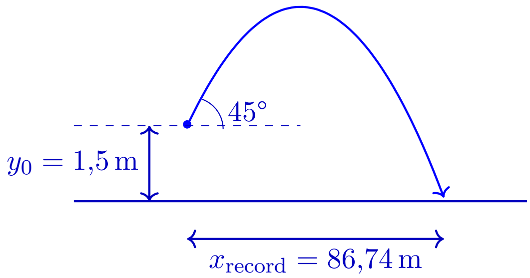
La voiture de police rejoint la moto 125 mètres plus loin.

Question 2 (4 points) Le record du monde du lancer du marteau se situe à 86,74 m.

a) Quel doit être la vitesse minimale du lancer afin d'espérer battre ce record lors des prochains Jeux Olympiques au Japon ? On supposera que la personne lance le marteau à partir d'une hauteur de 1m50 au dessus du sol et que l'angle du lancer est de 45° par rapport à l'horizontale. On négligera aussi les frottements dus à l'air.

b) Pour atteindre cette vitesse de lancer de marteau, l'athlète tourne sur lui-même. Combien de tours par seconde fait-il au moment du lancer en supposant que le bras de l'athlète et la corde du marteau font ensemble 1,2 m de long ?

Solution.



1. On écrit l'équation de la position selon x (direction horizontale, MRU) et y (direction verticale, MRUA), appliquée au moment où le marteau touche le sol :

$$86,74 = v_0 \cos(45°)t$$

$$0 = 1.5 + v_0 \sin(45°)t - 10\frac{t^2}{2}$$

De la première équation, on en déduit l'instant où le marteau retombe, en fonction de v_0 :

$$t = \frac{86,74}{v_0 \cos(45°)}$$

que l'on peut insérer dans la deuxième équation pour trouver v_0 :

$$0 = 1.5 + \frac{v_0 86,74\ \sin(45°)}{v_0 \cos(45)} - \frac{10 \times 86,74^2}{2v_0^2 \cos^2(45°)}$$

$$\frac{73800}{v_0^2} = 88.24$$

$$v_0 = 28,9[\mathrm{m/s}]$$

La vitesse initiale du marteau est de $28,9$ m/s.

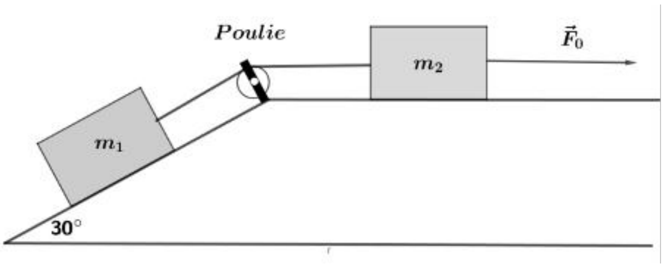
2. La vitesse angulaire du marteau au moment du lancer est donnée par la relation $v_0 = \omega R$ où $R = 1,2$m. Donc

$$\omega = \frac{28,9}{1,2} = 24.1\,[\mathrm{radian/s}]$$

Exprimée en tours par seconde, on obtient

$$\omega = 24.1\ /(2\pi) = 3,8[\mathrm{tours/seconde}]$$

Question 3 (4 points) On considère deux blocs de masses $m_1 = 3$ kg et $m_2 = 5$ kg glissant vers la droite avec une accélération a, respectivement sur un plan incliné et un plan horizontal. Les blocs sont reliés entre eux par une corde tendue, de masse négligeable et parallèle aux plans grâce à une poulie, comme le montre la figure suivante :



Le coefficient de frottement cinétique entre les blocs et les plans est $\mu_c = 0{,}25$.

a) Ecrivez la 2ème loi de Newton projetée sur des axes cartésiens de votre choix pour chacun des blocs 1 et 2.

b) Quelle intensité de force horizontale F_0 faut-il exercer pour que les blocs se déplacent vers la droite avec une accélération $a = 2$ m/s^2 ?

Solution.
Par simplicité, choisissons pour le Bloc 1 un repère incliné avec la direction x selon la direction du plan incliné, et pour le Bloc 2 un repère habituel avec x horizontal et y vertical.

Les forces agissant sur le Bloc 1 sont :

a) La force de poids $\vec{G}_1$, vers le bas.

b) La force de frottement $\vec{F}_{f1}$, dans le sens des x négatifs car l'ensemble se déplace vers la droite.

c) La tension $\vec{T}$ de la corde, dans le sens des x positifs

d) La force normale, $\vec{N}_1$ dans le sens des y positifs.

Les forces agissant sur le Bloc 2 sont :

a) La force de poids $\vec{G}_2$, vers le bas.

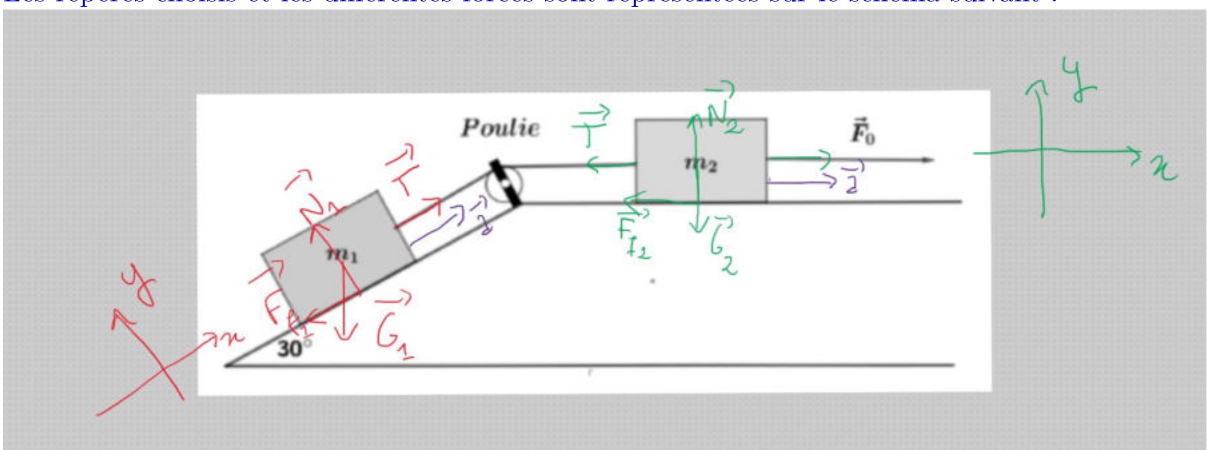
b) La force de frottement $\vec{F}_{f2}$, dans le sens des x négatifs car l'ensemble se déplace vers la droite.

c) La tension $\vec{T}$ de la corde, dans le sens des x négatifs.

d) La force normale, $\vec{N}_2$ dans le sens des y positifs (vers le haut).

e) La force de traction $\vec{F}_0$, dans le sens des x positifs.

Les repères choisis et les différentes forces sont représentées sur le schéma suivant :



a) Les bilans des forces (2ème loi de Newton, $\Sigma_i \vec{F_i} = m\vec{a}$) pour chaque bloc donnent :

Pour le Bloc1 :
Selon x : $T - \mu_c N_1 - m_1 g \cos(60°) = m_1 a$
Selon y : $-m_1 g \sin(60°) + N_1 = 0$

Pour le Bloc 2 :
Selon x :$-T - \mu_c N_2 + F_0 = m_2 a$
Selon y : $-m_2 g + N_2 = 0$

b) L'accélération est de 2 m/s^2 et $\mu_c = 0.4$. On doit en déduire F_0, qui ne se trouve que dans la troisième équation ce-dessus. On peut l'isoler :

$$F_0 = m_2 a + T + \mu_c N_2$$

Les inconnues sont T et N_2. On trouve N_2 grâce à la quatrième équation :

$$N_2 = m_2 g = 5 \times 10 = 50\,\text{Newton}$$

Et on trouve T à partir des equations du Bloc 1. On commence par l'isoler à partir de la 1ère équation :

$$T = \mu_c N_1 + m_1 g \cos(60°) + m_1 a$$

Tout est connu, sauf N_1 qui s'obtient à partir de la seconde équation :

$$N_1 = m_1 g \sin(60°) = 3 \times 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 26\,\text{Newton}$$

Donc :

$$T = 0.25 \times 26 + 3 \times 10 \times \frac{1}{2} + 3 \times 2 = 27.5\,\text{Newton}$$

Il ne reste qu'à trouver F_0 :

$$F_0 = 5 \times 2 + 31.4 + 0.25 \times 50 = 50\,\text{Newton}$$

La force de traction est donc de 61.4 Newton.

Question 4 (4 points) A l'intérieur d'un ascenseur, une masse m glisse sans frottement le long d'un plan incliné formant un angle de 30° avec le plancher. Quelle est son accélération a_O par rapport au plan si l'ascenseur :

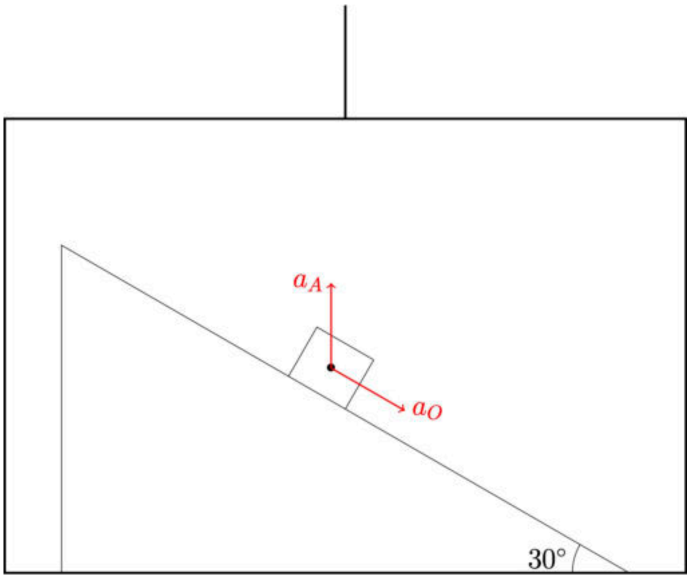
a) accélère vers le haut à 0,5g ?

b) accélère vers le bas à 0,5g ?

c) tombe en chute libre ?

d) monte à une vitesse constante ?

Pour vous aider, voici un schéma de la situation 1, avec a_A l'accélération de l'ascenseur et a_O l'accélération de l'objet par rapport au plan incliné.



Solution. Choisissons un repère incliné par rapport à l'horizontale, avec l'axe x dans la direction du plan incliné. On peut résondre l'exercice de plusieurs manières.
Soit on se place du point de vue de quelqu'un dans l'ascenseur, et on se souvient que le poids perçu dans l'ascensceur dépend de l'accélération de celui-ci :

$$F_{\text{p}} = m(g + a_A)$$

où a_A est l'accélération de l'ascenceur en choisissant les x positifs vers le haut. On peut ensuite écrire le bilan des forces pour chaque cas :

1. selon x : $m(g + a_A)\cos(90° - 30°) = ma_O$
selon y : $-m(g + a_A)\cos(30°) + N = 0$
On déduit l'accélération de la première équation :

$$m(g + 0,5g)\cos(60°) = ma_O$$

$$a_O = 1.5 \times 10 \times \frac{1}{2} = 7.5\text{m/s}^2$$

2. On a maintenant

$$m(g - 0,5g)\cos(60°) = ma_O$$

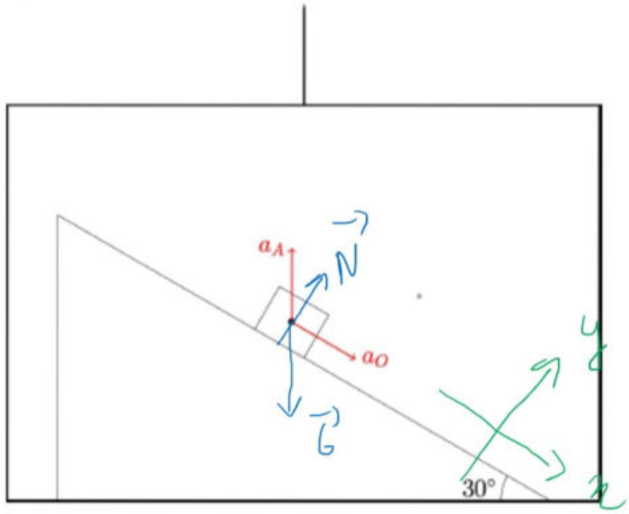
$$a_O = 0.5 \times 10 \times \frac{1}{2} = 2.5\text{m/s}^2$$

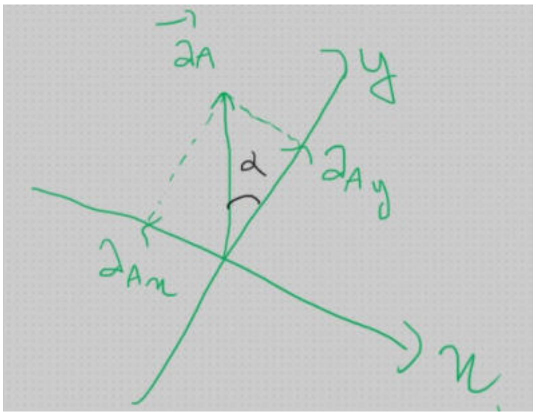
3. En chute libre, l'object tombe avec la même accélération que le plan incliné et le poids apparent $F_p = 0$. Il n'y a pas d'acclélération selon x et $a_O = 0$.

4. Si l'ascenceur monte a vitesse constante, le poids apparent est le poids réel, et donc on a :

$$mg\cos(60°) = ma_O$$
$$a_O = 10 \times \frac{1}{2} = 5\text{m/s}^2$$

Une autre manière de résoudre l'exercice est de se placer du point de vue extérieur à l'ascenceur. Dans ce cas, l'accélération totale a une composante verticale ainsi que le long du plan incliné. On écrit le bilan des forces :





selon x : $mg\cos(60°) = m(a_O - a_A\cos(60°))$
selon y : $-mg\cos(30°) + N = ma_A\cos(30°)$
qui est le même système d'équations que pour la première méthode. Les résultats s'obtiennent donc ensuite de la même manière.

Question 5 (4 points) Depuis 2007, le télescope Belge TRAPPIST est utilisé pour détecter des exoplanètes, c'est à dire des planètes en orbite autour d'autres étoiles que le Soleil. Depuis 2015, TRAPPIST a notamment contribué à la détection de sept planètes potentiellement semblables à la Terre autour d'une étoile de masse 1,6 x 10^{29} kg, appelée TRAPPIST-1. Les observations ont permis d'en déterminer la période de rotation. On supposera leur orbite circulaire.
(Rappel G = 6.67 x 10^{-11} m^3 kg^{-1}s^{-2})

a) Une de ces planètes, Trappist-f, a une période de rotation de 9,2 jours. Déterminez à quelle distance, en unité astronomique (UA = 150 millions de kilomètres), cette planète orbite autour de son étoile.
b) La masse de cette planète est estimée à 1,04 masse terrestre (une masse terrestre = 6 x 10^{24} kg) et la méthode de détection par occultation de l'étoile permet également de déterminer la taille de cette planète, dont le rayon est estimé à 1,45 rayon terrestre (rayon terrestre = 6400 km). Estimez l'accélération de la pesanteur que ressentent des habitants éventuels de cette planète.

Solution.
1. On utilise la loi de Newton appliquée à la force de gravitation universelle, induisant une accélération centripde $a_c = \omega^2 r$.

$$\frac{GM_* m_\mathrm{p}}{r^2} = m_\mathrm{p}\omega^2 r$$

où r est le rayon de l'orbite, M_* la masse de l'étoile et m_p la masse de la planète. La vitesse angulaire ω est donnée par

$$\omega = \frac{2\pi}{9.2 \times 3600 \times 24} = 7.9 \times 10^{-6}\mathrm{s}^{-1}$$

On déduit de la première équation que

$$r^3 = \frac{GM_*}{\omega^2} = 1.7 \times 10^{29}$$

et on obtient que $r = 5.55 \times 10^9\mathrm{m} = 0.037\,\mathrm{UA}$ en unité astronomique (UA).
2. On a pour une masse m quelquonque :

$$\frac{Gm_\mathrm{p}m}{R_\mathrm{p}^2} = ma$$

et on en déduit l'accélération de pesanteur a sur la planète :

$$a = \frac{Gm_\mathrm{p}}{R_\mathrm{p}^2} = \frac{6.67 \times 10^{-11} \times 1.04 \times 6 \times 10^{24}}{(1.45 \times 6400 \times 10^3)^2} = 4,8\mathrm{m/s}^2$$

L'accélération de pesanteur sur Trappist-1f est donc de $4,8\mathrm{m/s}^2$, soit à peu près la moitié de celle de la Terre.

Physique 1 – PHYS-F104 (2020-2021)

Examen de janvier 2021

08 janvier 2021

Nom :

Prénom :

N° de matricule :

Section (entourer) : Biologie — Géographie — Géologie — Pharmacie

Consignes générales :

1. Écrivez immédiatement en **CAPITALES** vos prénom, nom, numéro de matricule et section.
2. Vérifiez que votre énoncé comporte bien **9 feuilles** (1 page de garde, 5 questions et 3 brouillons).
3. Ne dégrafez pas les pages.
4. Vous n'avez droit à rien d'autre que de quoi écrire, votre formulaire (une feuille A4), votre calculatrice et votre carte d'étudiant.
5. Les GSM, tablettes, smartwatches et autres moyens de communication sont interdits. Ils doivent être éteints et rangés dans vos vestes.
6. Ne répondez pas en rouge, cette couleur étant réservée pour la correction.
7. **Les réponses doivent toutes être clairement justifiées et les unités doivent être indiquées pour les résultats numériques.**
8. En cas de besoin, vous prendrez les valeurs de constantes suivantes :
   accélération gravitationnelle terrestre : $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$
9. Cet examen dure **2 heures (120 minutes)**.

Bon travail !

/4	/4	/4	/4	/4	/20

Question 1 (4 points) Un groupe de coureurs se prépare pour une course à pied sur un parcours rectiligne de 10 km. Pour caractériser leur déplacement, les coureurs utilisent souvent, non pas leur vitesse moyenne (par exemple en km/h), mais leur « allure moyenne ». L'allure moyenne est le plus souvent exprimée en minutes par km (min/km) : il s'agit du nombre de minutes nécessaires pour parcourir 1 km.

a) Quelles sont les dimensions (Masse M, Longueur L, Temps T) de l'allure ?

b) Sophie parcourt la distance à une allure moyenne de 3'45"/km (3 minutes et 45 secondes par km).

   1) Quelle est sa vitesse moyenne ?

   2) En combien de temps (en minutes et secondes) Sophie parcourt-elle les 10 km ?

c) Gaétan et Sébastien s'élancent en même temps de la ligne de départ à des allures de 4'15"/km (correspondant à une vitesse de 14,12 km/h) et 4'05"/km (vitesse de 14,69 km/h) respectivement.

   1) Combien de mètres d'avance Sébastien a-t-il sur Gaétan quand Sébastien a parcouru 5km ?

   2) A ce moment de la course (Sébastien a parcouru 5km), quelle doit être l'accélération de Gaétan pour qu'il rattrape Sébastien exactement sur la ligne d'arrivée des 10km (Sébastien conservant une vitesse constante) ?

   3) Quelle sera la vitesse de Gaétan au moment de franchir la ligne d'arrivée ?

Solution.

a) $[\text{allure}] = \left[\frac{1}{v}\right] = TL^{-1}$

b) 1) Pour avoir une vitesse en mètre/seconde, convertissons l'allure en seconde/mètre :

$$3\text{'}45\text{"}/\text{km} = (3\times 60+45)\,\text{s/km} = \frac{(3\times 60+45)}{1000}\text{s/m} = 0{,}225\,\text{s/m}$$
$$v_S = \frac{1}{0,225} = 4{,}44\,\text{m/s}$$

   2) L'allure correspond au temps qu'il faut pour parcourir un km : il suffit donc de la multiplier par 10.

$$t = (3\times 60+45)\times 10 = 2\,250\,\text{s} = 37\text{'}30\text{"}$$

c) 1) On cherche d'abord à quel temps Sébastien atteint les 5 km, puis on détermine quelle distance a parcouru Gaétan en ce temps là, avant de faire la différence pour déterminer quelle avance a Sébastien :

$$v_S = \frac{14,69}{3,6}\text{m/s} = 4{,}08\,\text{m/s}$$
$$v_G = \frac{14,12}{3,6}\text{m/s} = 3{,}9\,\text{m/s}$$

$$\Delta x_S = v_S\Delta t$$
$$\Delta t = \frac{\Delta x_S}{v_S} = \frac{5000}{4,08} = 1\,225{,}5\,\text{s}$$

$$\Delta x_G = v_G\Delta t = 3,9\times 1225,5 = 4\,779{,}4\,\text{m} = 4{,}8\,\text{km}$$
$$\Delta x_S - \Delta x_G = 220{,}6\,\text{m}$$

2) On écrit les équations du mouvement de Sébastien et Gaétan en prenant comme point de départ le moment où Gaétan se met à accélérer :

$$
\begin{aligned}
x_G(t) &= x_{0_G} + v_{0_G} t + \frac{1}{2} a t^2 \\
x_S(t) &= x_{0_S} + v_S t \\
x_{0_G} &= 4\,779{,}4\,\mathrm{m}\ ;\ x_{0_S} = 5\,000\,\mathrm{m}\ ;\ v_{0_G} = 3{,}9\,\mathrm{m/s}
\end{aligned}
$$

On sait que au même temps t_f, les deux arrivent à la marque des 10 km : $x_G(t_f) = x_S(t_f) = 10\,000\,\mathrm{m}$.

$$
\begin{aligned}
x_S(t_f) = 10000 &= x_{0_S} + v_S t_f \\
t_f &= \frac{10000 - x_{0_S}}{v_S} = 1\,225{,}5\,\mathrm{s}
\end{aligned}
$$

On retombe bien sur le même temps qu'au c) 1), vu qu'il restait de nouveau 5 km à partir à Sébastien à la même vitesse constante. On cherche maintenant l'accélération de Gaétan :

$$
\begin{aligned}
x_G(t_f) = 10000 &= x_{0_G} + v_{0_G} t_f + \frac{1}{2} a t_f^2 \\
\frac{1}{2} a t_f^2 &= x_G(t_f) - x_{0_G} - v_{0_G} t_f \\
a &= \frac{2}{t_f^2} \left(x_G(t_f) - x_{0_G} - v_{0_G} t_f \right) \\
&= 6 \times 10^{-4}\,\mathrm{m/s^2}
\end{aligned}
$$

3)

$$
v_G(t) = v_{0_G} + at
$$

Au moment de franchir la ligne d'arrivée,

$$
v_G(t_f) = v_{0_G} + a t_f = 4{,}6\,\mathrm{m/s}
$$

Question 2 (4 points) Lors de la compétition de plongeon aux jeux olympiques, les athlètes doivent sauter d'un plongeoir placé à une hauteur de 10 m au dessus du bassin.

a) Sachant qu'au moment de l'impulsion, le plongeur d'une masse de 70 kg s'élance avec une vitesse verticale de 4 m/s afin d'avoir plus de temps pour effectuer des figures acrobatiques, quelle sera sa vitesse (en km/h) lorsqu'il pénétrera dans l'eau en supposant les frottements dus à l'air négligeables ?

b) Juste après son entrée dans l'eau, sa vitesse a été diminuée de 75 %. Quelle quantité d'énergie cinétique a été dissipée sous forme de vagues ?

Solution.

a) On utilise la conservation de l'énergie mécanique, entre le moment initial où le plongeur s'élance, et le moment final où le plongeur est sur le point de pénétrer dans l'eau.

$$E_{\text{méca, initiale}} = E_{\text{méca, finale}}$$

$$\begin{aligned} E_{\text{méca, initiale}} &= E_{\text{cin, initiale}} + E_{\text{pot, initiale}} \\ &= \frac{1}{2}mv^2_{\text{initiale}} + mgh_{\text{initiale}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{\text{méca, finale}} &= E_{\text{cin, finale}} + E_{\text{pot, finale}} \\ &= \frac{1}{2}mv^2_{\text{finale}} + mgh_{\text{finale}} \end{aligned}$$

$v_{\text{initiale}} = 4$ m/s, $h_{\text{initiale}} = 10$ m, $h_{\text{finale}} = 0$ m. On peut isoler v_{finale}.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2_{\text{initiale}} + mgh_{\text{initiale}} &= \frac{1}{2}mv^2_{\text{finale}} \\ v^2_{\text{finale}} &= v^2_{\text{initiale}} + 2gh_{\text{initiale}} \\ v_{\text{finale}} &= \sqrt{v^2_{\text{initiale}} + 2gh_{\text{initiale}}} = 14{,}7\,\text{m/s} \end{aligned}$$

En km/h, on obtient $v_{\text{finale}} = 14,7 \times 3,6 = 52{,}92\,\text{km/h}$.

b) La vitesse diminue de 75%, le plongeur perd donc 75% de sa vitesse finale : $v'_{\text{finale}} = v_{\text{finale}} - 75\% v_{\text{finale}} = 25\% v_{\text{finale}}$. La différence d'énergie cinétique (donc la quantité d'énergie dissipée) est

$$\Delta E_{\text{cin}} = \frac{1}{2}mv'^2_{\text{finale}} - \frac{1}{2}mv^2_{\text{finale}} = -7\,091\,\text{J}$$

Le signe - indique que le plongeur a bien perdu de l'énergie cinétique.

Question 3 (4 points) Lors de l'immersion d'un sous-marin de volume $V = 5000\,\mathrm{m}^3$, des ballasts (gros réservoirs) s'ouvrent et se remplissent d'eau, de sorte que le poids du sous-marin devient plus important que la poussée d'Archimède. Ainsi, lors de la descente, la masse du sous-marin est de 5300 tonnes. La masse volumique de l'eau de mer est de $\rho_{\mathrm{mer}} = 1025\,\mathrm{kg/m}^3$. D'autre part, le sous-marin possède un moteur qui active une hélice orientable qui lui confère une poussée *horizontale* de 5×10^6 N. Pour simplifier, nous commencerons par négliger l'effet du frottement de l'eau.

a) Écrire le bilan des forces lorsque le sous-marin effectue la descente. Que vaut la composante verticale, horizontale et le module de son accélération ?

b) Combien de temps faut-il au sous-marin pour atteindre la profondeur de 50 mètres ? Quelle distance horizontale a-t-il alors parcourue ? Quelle est la puissance moyenne délivrée par les moteurs du sous-marin ?

c) En réalité, l'eau exerce une résistance au mouvement, appelée *force de frottement fluide* qui s'oppose au déplacement. Si elle s'exprime comme $F = C\rho_{\mathrm{mer}}v^2$ où v est la vitesse de l'objet par rapport au fluide, et C est un coefficient qui dépend des propriétés géométriques de l'objet immergé. Quelles sont les unités de C ? Si $C = 30$ (dans les unités trouvées), quelle est la valeur maximale de la vitesse du sous-marin lorsqu'il se déplace horizontalement ?

Solution.

a) Sur l'axe x, seule la focrce de poussée horizontale du moteur F_p agit. Sur l'axe y, on a le poids du sous-marin ainsi que la poussée d'Archimède.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\underline{\text{sur x}} : F_p = ma_x$$

$$a_x = \frac{F_p}{m} = \frac{5 \times 10^6}{5300000} = 0{,}94\,\mathrm{m/s}^2$$

$$\underline{\text{sur y}} : F_A - G = ma_y$$

$$a_y = \frac{F_A - G}{m} = \frac{\rho_{\mathrm{mer}} g V - mg}{m} = -0{,}33\,\mathrm{m/s}^2$$

b) On peut trouver le temps nécessaire pour atteindre cette profondeur en utilisant le fait que ce sous-marin se déplace en MRUA :

$$\Delta y = \frac{1}{2} a_y \Delta t^2$$

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2\Delta y}{a_y}} = \sqrt{\frac{-100}{-0,33}} = 17{,}4\,\mathrm{s}$$

$$\Delta x = \frac{1}{2} a_x \Delta t^2 = 142{,}3\,\mathrm{m}$$

$$W = F_p\,\Delta x = 7{,}1 \times 10^8\,\mathrm{J}$$

$$P = \frac{W}{\Delta t} = 4{,}1 \times 10^7\,\mathrm{W}$$

c)

$$[F] = N = kg\frac{m}{s^2}$$
$$\left[C\rho_{\text{mer}}v^2\right] = [C]\,[\rho_{\text{mer}}]\left[v^2\right] = [C]\,\frac{kg}{m^3}\frac{m^2}{s^2}$$
$$F = C\rho_{\text{mer}}v^2$$

donc

$$kg\frac{m}{s^2} = [C]\,\frac{kg}{m^3}\frac{m^2}{s^2}$$
$$[C] = m^2$$

Ensuite, la vitesse maximale que le sous-marin peut atteindre est la vitesse qui donne une force de frottement fluide égale à la force de poussée du moteur :

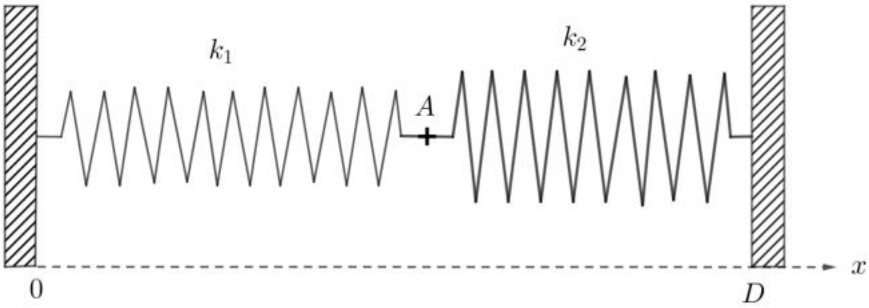
$$C\rho_{\text{mer}}v_{max}^2 = 5\times 10^6$$
$$v_{max} = \sqrt{\frac{5\times 10^6}{C\rho_{\text{mer}}}} = 12{,}75\,\text{m/s}$$

Question 4 (4 points) Deux ressorts de masses négligeables, de longueurs au repos l_1 et l_2 et de constantes de raideur k_1 et k_2 sont accrochés bout à bout et tendus horizontalement entre deux supports verticaux fixes distants de $D > l_1 + l_2$. A est le point d'attache commun des deux ressorts. Le dispositif est à l'équilibre, immobile.

a) Exprimer les allongements respectifs x_1 et x_2 des deux ressorts en fonction des paramètres du problème D, k_1, k_2, l_1 et l_2

b) Exprimer la résultante $\vec{F}_A$ qui agit sur le point A lorsqu'on écarte celui-ci d'une distance x vers la droite de sa position d'équilibre précédente en fonction de k_1, k_2 et de x.

c) On accroche maintenant une masse m_A au point A. Cette masse peut glisser sans frottement sur le sol. Quelle est la période d'oscillation de cette masse en fonction de m_A, k_1 et k_2 si on la lâche écartée de sa position d'équilibre ?



Solution.

a) Comme ce dispositif est à l'équilibre, immobile, les forces de rappel des ressorts k_1 et k_2 doivent parfaitement se compenser au point A. On sait également que toute la largeur du système est D.

$$-k_1 x_1 = -k_2 x_2$$
$$l_1 + x_1 + l_2 + x_2 = D$$

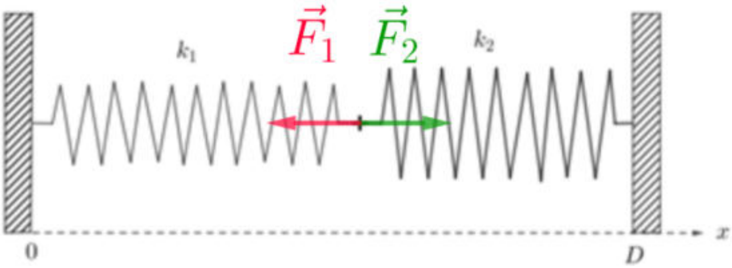
On va essayer de se débarrasser de x_1 dans la première équation pour ne garder qu'une seule inconnue.

$$x_1 = D - l_1 - l_2 - x_2$$
$$-k_1(D - l_1 - l_2 - x_2) = -k_2 x_2$$
$$-x_2(k_1 + k_2) = -k_1(D - l_1 - l_2)$$
$$x_2 = \frac{k_1(D - l_1 - l_2)}{k_1 + k_2}$$

Et finalement, x_1 devient

$$x_1 = D - l_1 - l_2 - \frac{k_1(D - l_1 - l_2)}{k_1 + k_2} = \frac{k_2(D - l_1 - l_2)}{k_1 + k_2}$$

b) La résultante $\vec{F}_A$ est la somme des forces de rappel appliquées par les deux ressorts :



$$\begin{aligned}\vec{F}_A &= \left[-k_1(x_1 + x) + k_2(x_2 - x)\right] \vec{1}_x \\ &= \left[-(k_1 + k_2)x - k_1 x_1 + k_2 x_2\right] \vec{1}_x\end{aligned}$$

On sait par a) que $-k_1 x_1 + k_2 x_2 = 0$, donc

$$\vec{F}_A = -(k_1 + k_2)x\, \vec{1}_x$$

c) On remarque dans l'expression de la résultante $\vec{F}_A$ que ce système est donc équivalent à un unique ressort de constante de rappel $k_1 + k_2$. Dans ce cas, la période d'oscillation est $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1 + k_2}}$.

Question 5 (4 points) Le Faucon 2000 est un vaisseau spatial d'une masse $m_F = 50$ tonnes. Afin de fuir ses poursuivants, il pénètre dans un champ d'astéroïdes à une vitesse $\vec{v}_F = (0\ \vec{1}_x +\ 20\ \vec{1}_y)$ km/s. Il entre en collision avec un petit astéroïde de masse inconnue m_A dont la vitesse est $\vec{v}_A = (-\ 25\ \vec{1}_x -\ 6,7\ \vec{1}_y)$ km/s et dont la trajectoire forme un angle θ avec l'axe y. Heureusement la collision n'est pas fatale : l'astéroïde s'est encastré dans le hangar de stockage du vaisseau.
Le Faucon 2000 poursuit sa route, mais la norme de sa vitesse a baissé de 5 % et sa trajectoire a dévié d'un angle $\alpha = 3°$. L'angle de déviation α est l'angle entre les trajectoires initiale et finale du vaisseau. Pour cet exercice, on ne considère que 2 dimensions : x et y.

a) Considérez les 3 quantités suivantes
   - Quantité de mouvement
   - Énergie cinétique
   - Énergie totale

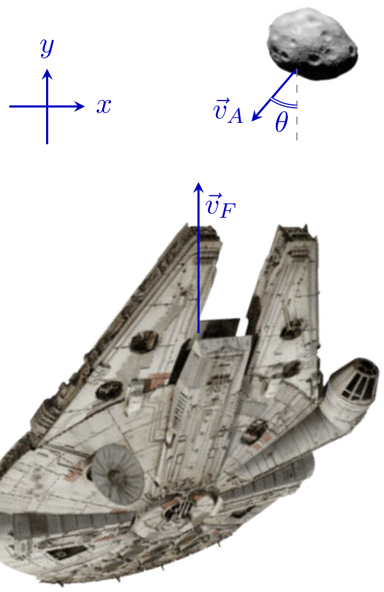
   Dire pour chacune d'elle si celle-ci est conservée ou non dans le problème et justifier pourquoi en une phrase.

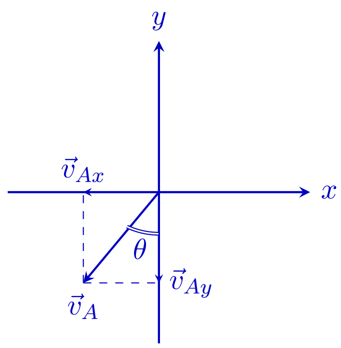
b) Représenter la situation initiale sur un schéma avec les axes x et y, les vecteurs vitesses $\vec{v}_F$ et $\vec{v}_A$, ainsi que l'angle θ. Calculer l'angle θ entre l'axe y et la trajectoire de l'astéroïde.

c) Représenter la situation finale sur un schéma avec les axes x et y, le vecteur vitesse final $\vec{v}_{FA}$ ainsi que l'angle α. Calculer la composante x de la vitesse finale v_{FA_x} ainsi que la masse de l'astéroïde m_A.

Solution.

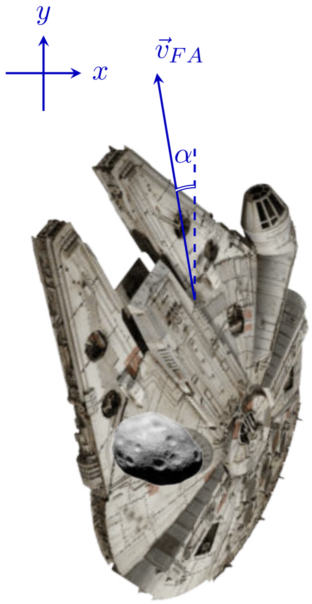
a)
   - La quantité de mouvement est conservée dans ce problème car aucune force extérieure n'agit.
   - L'énergie cinétique n'est pas conservée dans ce problème car il s'agit d'une collision inélastique (il y a déformation, les deux objets s'encastrent).
   - L'énergie totale est conservée dans ce problème (système isolé) car l'énergie cinétique s'est transformée en d'autres formes d'énergie (chaleur, déformation,...). Il n'y a pas de création ou de destruction d'énergie.

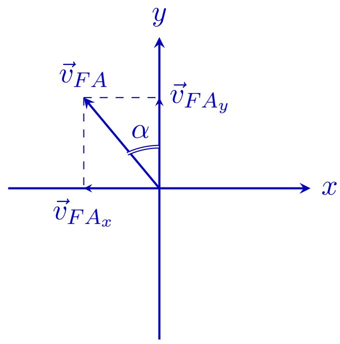




b)

$$\tan\theta = \frac{v_{A_x}}{v_{A_y}} \text{ donc } \theta = \arctan\left(\frac{v_{Ax}}{v_{Ay}}\right) = \arctan\left(\frac{-25}{-6,7}\right) = 75°$$





c)

Comme la norme de sa vitesse a baissé de 5%, $|\vec{v}_{FA}| = 95\% \, |\vec{v}_F| = 19\,\text{m/s}$. Par projection, $v_{FA_x} = |\vec{v}_{FA}| \sin(3°) = 0{,}99\,\text{m/s}$. Ensuite, on peut déterminer la masse de l'astéroïde à partir de la conservation de la quantité de mouvement :

$$\vec{P}_{\text{initial}} = m_F\vec{v}_F + m_A\vec{v}_A$$
$$\vec{P}_{\text{final}} = (m_F + m_A)\vec{v}_{FA}$$

$$\vec{P}_{\text{initial}} = \vec{P}_{\text{final}}$$
$$(0; m_F v_{F_x}) + (-m_A v_{A_x}; -m_A v_{A_y}) = \left(-\left(m_F + m_A\right) v_{FA_x}; -\left(m_F + m_A\right) v_{FA_y}\right)$$

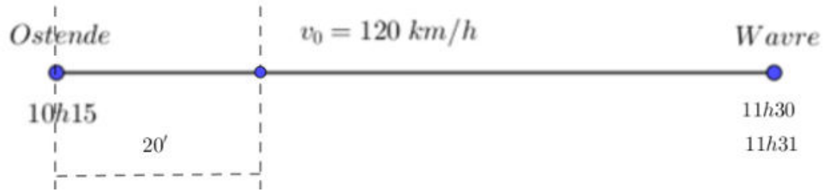
On regarde la composante x :

$$\begin{aligned} 0 - m_A v_{A_x} &= -\left(m_F + m_A\right) v_{FA_x} \\ -m_A v_{A_x} + m_A v_{FA_x} &= -m_F v_{FA_x} \\ m_A &= -\frac{m_F v_{FA_x}}{(v_{FA_x} - v_{A_x})} = 2\,061{,}6\,\text{kg} \end{aligned}$$

Question 1 (4 points) Il est 10h15. Maurice, qui habite Ostende, souhaite se rendre à Wavre en empruntant l'autoroute. La vitesse de la voiture reste constante pendant tout le trajet.
Au moment où il entre l'adresse de destination dans son GPS, celui-ci indique une heure d'arrivée de 11h30.

a) Le GPS supposant que le véhicule circule à la vitesse maximale autorisée, soit $v_0 = 120$ km/h, à quelle distance D se trouve la destination de Maurice ?

b) Après 20 minutes de trajet, le GPS indique désormais une heure d'arrivée de 11h31. A quelle vitesse v roule en fait Maurice (en km/h) ?
Attention : le GPS suppose **toujours**, dans son calcul, que la vitesse du véhicule est de 120 km/h.

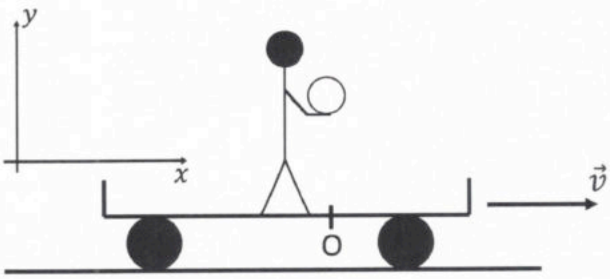


a) Comme la vitesse est constante, nous avons affaire à un MRU. Ainsi, la distance parcourue est égale à :
$D = v_0 \Delta t = 120 \times (11{,}5 - 10{,}25) km = 150 km$. 2pt

b) Comme le GPS indique maintenant une heure d'arrivée plus tardive que celle initiale, cela implique que Maurice roule en réalité plus lentement que 120 km/h. Cependant, la distance totale à parcourir est elle toujours identique. Ainsi, le GPS calcule le parcours de la manière suivante : pendant 20 min (égale à 0,33 h) Maurice à rouler à la vitesse v que l'on cherche et pendant le temps restant (de 10h35 à 11h31) à 120km/h, la vitesse v_0.
$D = v \times \frac{1}{3} + v_0 (11h31 - 10h35) \quad (km) \qquad v = 3 \times \left[D - v_0 \times \left(11 + \frac{31}{60} - 10 - \frac{35}{60} \right) \right] = 114 km/h$

2pt

Question 2 (4 points) Justine se trouve sur un chariot qui peut de déplacer de droite à gauche le long d'un rail (voir figure ci-dessous). Elle a en mains un ballon de foot de masse m = 430 grammes et de rayon R = 10 cm. Elle va réaliser plusieurs expériences en lançant le ballon parfaitement verticalement, dans diverses situations. La masse du chariot est de 200 kg et Justine pèse 60 kg.



a) Le chariot est au repos et on néglige la force de résistance de l'air. Justine lance la balle verticalement, et celle-ci atteint une hauteur de 30 cm au-dessus de sa main.

   1) Après combien de temps la balle retombe-t-elle dans ses mains ?

   2) Quelle était la vitesse de la balle, v_{0y}, au moment où elle s'échappe de ses mains ?

b) Le chariot se déplace à présent à une vitesse constante v = 2,5 m/s. On néglige le frottement de l'air et le frottement du chariot sur les rails. Justine répète la même expérience, en lançant la balle exactement de la même manière qu'au point a).

   1) A quelle distance de Justine (du point O) la balle retombera-t-elle à la hauteur de ses mains ?

   2) De combien aura avancé le chariot lorsque la balle revient à la hauteur des mains de Justine ?

c) Mêmes données qu'au point précédent. Cette fois, on prend en compte la résistance de l'air, mais uniquement dans la direction horizontale. On néglige la résistance de l'air dans la direction verticale, ainsi que les forces de friction entre le chariot et le rail. On supposera, pour simplifier, que la force de résistance de l'air agissant horizontalement est constante tout au long du mouvement, et donnée par $F_r = C_2 R^2 v^2$, avec $C_2 = 0,85$ kg/m^3, R est le rayon de la balle et v correspond à la vitesse horizontale de la balle au moment où elle est lâchée.
A quelle distance de Justine (du point O) la balle retombera-t-elle à la hauteur de ses mains ?

Répartition des points :
a) 1) 1 point
a) 2) 1 point
b) 1) 1 point
b) 2) 1 point
c) Bonus 1 point

a) 1) et 2) MRUA selon y. ①

$$\begin{cases} y(t) = y_0 + v_{0y}\, t - g\dfrac{t^2}{2} \\ v(t) = v_{0y} - g t \end{cases}$$

Soit t_1 le moment où elle atteint le moment le $\underbrace{\text{plus haut}}_{\hookrightarrow \text{ vitesse nulle}}$ (0,3 m).

on a $$\begin{cases} 0{,}3 = 0 + v_{0y}\, t_1 - 10\dfrac{t_1^2}{2} \\ 0 = v_{0y} - 10\, t_1 \end{cases} \Rightarrow v_{0y} = 10\, t_1 . \ (*)$$

$$\Rightarrow 0{,}3 = 10\, t_1^2 - 10\frac{t_1^2}{2} = 5\, t_1^2 \Rightarrow t_1^2 = 0{,}06$$

$$\Rightarrow t_1 = 0{,}245 \text{ s}.$$

La balle met le même temps pour redescendre

$\Rightarrow t_2$, le moment où la balle retombe dans les mains, est

$t_2 = 2 \cdot t_1 = \underline{0{,}49 \text{ s}}$.

On peut s'en convaincre grâce aux équations :

$$y(t_2) = 0 = 0 + \underbrace{v_{0y}}_{(*) \Rightarrow v_{0y} = 10 t_1 = \boxed{2{,}45 \text{ m/s}}} t_2 - 10\frac{t_2^2}{2}$$

vitesse initiale : réponse au point 2

$$\Rightarrow 0 = 2{,}45\, \cancel{t_2} - 5\, t_2^{\cancel{2}}$$

$$5 t_2 = 2{,}45$$

$$t_2 = \frac{2{,}45}{5} \simeq \underline{0{,}49 \text{ s}}.$$

⚠ l'énoncé pouvait laisser penser que l'on demande le temps entre le haut de la trajectoire et le moment où la balle retombe dans les mains de Justine, c'est à dire $\frac{t_2}{2} = 0{,}245$ s. Nous avons également accepté cette réponse.

b) (1) A quelle distance de Justine la balle retombe-t-elle ?

(2)

→ comme Justine, le chariot et la balle vont à la même vitesse constante selon x (pas de force de frottement, ni de friction de l'air), la balle retombe dans les mains de justine (distance = 0 m).

(2) équations selon x pour le chariot :

$$x(t) = 0 + v_{0x}\, t_2$$

$$= 2,5 \cdot 0,49 \simeq \underline{1,25\ m}.$$

la distance parcourue par le chariot est de 1,25 m.

⚠| Nous avons accordé le point • au b)2) dans le cas d'un raisonnement correct mais avec une valeur de t_2 obtenue précédemment erronée.

• au b)1) si la réponse

⚠| donnée correspond à la distance par rapport au point O au temps initial, c'est à dire 1,25 m, avec justification que Justine et le chariot se déplacent ensemble

c) Bilan des forces selon x :

$$-F_R = m_{balle}\ a_{balle\,x} \quad (\text{si } \vec{v} \text{ dans le sens x positif})$$

$$-0,85 \cdot (0,10)^2 \cdot (2,5)^2 = 0,430 \cdot a_{balle\,x}$$

$$-0,053 = 0,430\ a_{balle\,x}$$

→ l'accélération de la balle selon x est de $a_{balle\,x} = \frac{-0,053}{0,430} = -0,123$.

⇒ MRUA selon x. $x_b(t_2) = 0 + 2.5 \cdot t_2 - \frac{0,123\, t_2^2}{2}$

pour le chariot : $x_{ch}(t_2) = 2,5\, t_2$

⇒ écart entre les deux : $\Delta x = -\frac{0,123}{2} t_2^2 = \underline{-0,015\ m}$

la balle retombe 0,015 m en arrière du point O (Justine

Question 3 (4 points) L'astronaute Thomas Pesquet se trouve en apesanteur dans l'espace. Sa masse, incluant sa combinaison, est de 100 kg.

/1,5

a) Initialement au repos, il décide de lancer deux objets afin de se propulser. Le premier a une masse $m_1 = 10$ kg et part avec une vitesse de $\vec{v}_1 = (0; -50)$ m/s, et le second d'une de masse $m_2 = 30$ kg part avec une vitesse $\vec{v}_2 = (-20; -20)$ m/s. Quelles sont les composantes de la vitesse $\vec{v}_a$ acquise par l'astronaute ?

/2,5

b) Une fois cette vitesse $\vec{v}_a$ acquise, l'astronaute se heurte à un obstacle de masse inconnue et initialement au repos et il est projeté vers la gauche à une vitesse $\vec{v}'_a = (v'_a; 0)$ où v'_a est négatif. L'obstacle est quant à lui mis en mouvement vers en haut à droite, avec une vitesse $\vec{v}_o = (v_{ox}, v_{oy})$ dont la composante x vaut +0,218 m/s. L'astronaute est alors rattrapé par un filet élastique qu'on modélise comme un simple ressort de constante de rigidité $k = 800$ N/m. Ce ressort s'allonge à son maximum de 1 m. Que vaut la masse de l'obstacle ?

(a) Pas de forces appliquées sur le système (astronaute + 2 masses)

=> quantité de mouvement totale du système est conservée.

Avant le lancer : $\vec{P_a} = \vec{P_1} = \vec{P_2} = \vec{0}$ (repos) => $\sum_i \vec{P_i} = \vec{0}$ (*)

Après : $\vec{P_a} = m_a \vec{v_a}$, $\vec{P_1} = m_1 \vec{v_1}$, $\vec{P_2} = m_2 \vec{v_2}$

Donc : $m_a \vec{v_a} + m_1 \vec{v_1} + m_2 \vec{v_2} = \vec{0}$ (par (*))

En composantes : $\begin{array}{l} Ox \\ Oy \end{array} \left\{ \begin{array}{l} m_a v_{ax} + m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = 0 \\ m_a v_{ay} + m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} = 0 \end{array} \right.$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_{ax} = \frac{-1}{m_a}(m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}) \\ v_{ay} = \frac{-1}{m_a}(m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y}) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_{ax} = \frac{-1}{100}(10.0 + 30(-20)) = 6 \frac{m}{s} \\ v_{ay} = \frac{-1}{100}(10(-50) + 30(-20)) = 11 \frac{m}{s} \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\vec{v_a} = (6; 11) \frac{m}{s}}$$

(b) De nouveau, pas de force appliquée sur le système (astronaut + obstacle) $\Rightarrow \sum_i \vec{P_i} = C^{ste}$ (Conservation quantité de mouvement)

Avant la collisions : $\vec{P_a} = m_a \vec{v_a}$; $\vec{v_a} = (6;11)\ \frac{m}{s}$

$\vec{P_o'} = \vec{0}$ (repos)

Après : $\vec{P_a'} = m_a \vec{v_a'}$; $\vec{v_a'} = (v_a';0)$ avec $v_a' < 0$ (*)

$\vec{P_o} = m_o \vec{v_o}$; $\vec{v_o} = (v_{ox}; v_{oy})$ avec $v_{ox} = 0{,}218\ \frac{m}{s}$

Donc : $m_a \vec{v_a} = m_a \vec{v_a'} + m_o \vec{v_o}$

Composantes $\Rightarrow$

$$\begin{cases} Ox & m_a v_{ax} = m_a v_{ax}' + m_o v_{ox} \Rightarrow m_o = \dfrac{m_a v_{ax} - m_a \overbrace{v_{ax}'}^{\text{inconnue}}}{v_{ox}} \\ Oy & \underbrace{m_a v_{ay} = m_a v_{ay}' + m_o v_{oy}}_{\text{Pas nécessaire pour trouver } m_o} \end{cases}$$

On doit trouver $v_{ax}' \overset{(*)}{=} v_a'$. Pour cela on regarde le système astronaut + filet = ressort avec $k = 800\ \frac{N}{m}$ et masse = 100 kg.
Pas de force appliquée $\Rightarrow$ Conservation de l'énergie mécanique
Au moment où l'astronaute touche le filet, le ressort est à élongation nulle ($\Delta x = 0$). $\Rightarrow E_0 = K_0 + U_0 = \frac{m_a \vec{v_a'}^2}{2} + \frac{k \Delta x^2}{2} = \frac{m_a}{2}((v_a')^2 + (0)^2) + \frac{k}{2}(0)^2$

$= \frac{m_a (v_a')^2}{2}$.

Quand le ressort arrête l'astronaut : $\Delta x = 1m$; $(\vec{v_a}')^2 = 0$

$\Rightarrow E_1 = K_1 + U_1 = \frac{m_a \cdot 0}{2} + \frac{k \cdot (1)^2}{2} = \frac{k}{2}$

Par conservation de l'énergie mécanique $E_0 = E_1$

$\Rightarrow \frac{m_a (v_a')^2}{2} = \frac{k}{2} \Rightarrow |v_a'| = \sqrt{\frac{k}{m_a}} = \sqrt{\frac{800}{100}} = 2\sqrt{2} \, \frac{m}{s}$

Maintenant qu'on a $|v_a'| = 2\sqrt{2} \, \frac{m}{s}$ on sait que $v_{ax}' = -2\sqrt{2} \, \frac{m}{s}$ par (⊛) et (+).

Ceci veut dire que :

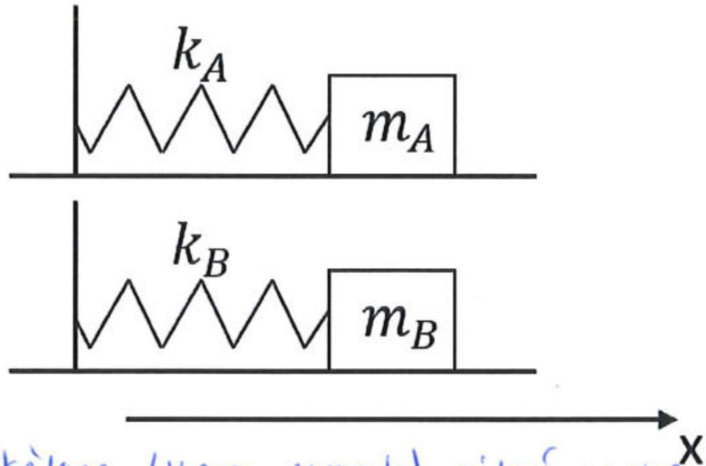
$m_o = \frac{m_a v_{ax} - m_a v_{ax}'}{v_{ox}} = \frac{100 \cdot 6 - 100(-2\sqrt{2})}{0,218} = \frac{100(6 + 2\sqrt{2})}{0,218} = 4050 \, kg.$

$$\boxed{m_o = 4050 \, kg}$$

Question 4 (4 points) Soit deux systèmes masse-ressort A et B. Ils sont mis en mouvement simultanément avec des amplitudes identiques. Dans le système B, la constante de rappel est 3 fois plus grande que celle du système A, et la période d'oscillation observée vaut 2/3 de la période du système A.

a) Quel est le rapport des masses m_A/m_B ?

b) Quel est le rapport des vitesses des deux masses (v_A/v_B) lors de leurs passages à leurs positions centrales respectives ?



Soit deux systèmes (masse ressort) séparés: A et B
k = constante de rappel   T = période
Données: $k_B = 3\, k_A$
$T_B = \frac{2}{3} T_A$

points :

a) Pour un ressort: $T = \frac{2\pi}{\omega}$ $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $\rightarrow T^2 = (2\pi)^2 \frac{m}{k}$

$\rightarrow m = k \cdot \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2$

- pour le système A: $m_A = k_A \left(\frac{T_A}{2\pi}\right)^2$
- pour le système B: $m_B = k_B \left(\frac{T_B}{2\pi}\right)^2$

$\Rightarrow \frac{m_A}{m_B} = \frac{k_A}{k_B} \cdot \frac{T_A^2}{\cancel{(2\pi)^2}} \frac{\cancel{(2\pi)^2}}{T_B^2}$

2

$\rightarrow \frac{m_A}{m_B} = \frac{\cancel{k_A}}{(3\cancel{k_A})} \frac{(T_A)^2}{(\frac{2}{3} T_A)^2} = \frac{1}{3} \frac{1}{4/9} \frac{\cancel{T_A^2}}{\cancel{T_A^2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$

$\rightarrow \boxed{\frac{m_A}{m_B} = \frac{3}{4}}$

b) Position centrale → correspond à la vitesse maximale $v_{MAX} = \text{Amplitude} \cdot \omega$

- pour le système A: $v_A = \text{Ampl.}_A \cdot \omega_A$ or $\text{Ampl.}_A = \text{Ampl.}_B$
- pour le système B: $v_B = \text{Ampl}_B \cdot \omega_B$

2

$\rightarrow \frac{v_A}{v_B} = \frac{\cancel{\text{Ampl}_A}}{\cancel{\text{Ampl}_B}} \cdot \frac{\omega_A}{\omega_B} = \sqrt{\frac{k_A}{m_A}} \cdot \sqrt{\frac{m_B}{k_B}} = \sqrt{\frac{k_A}{(3k_A)} \cdot \frac{m_B}{m_A}}$

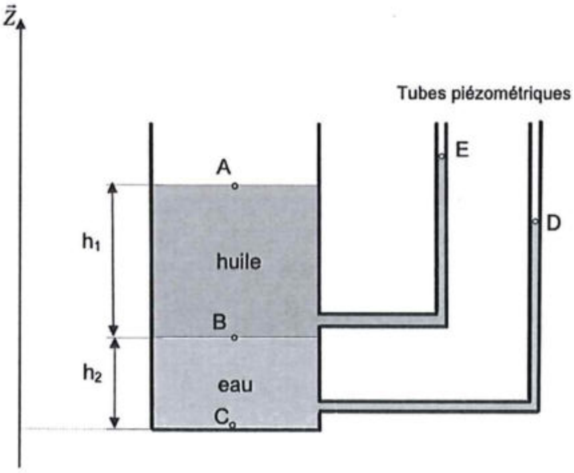
$= \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$

$\rightarrow \boxed{\frac{v_A}{v_B} = \frac{2}{3}}$

Question 5 (4 points) La figure ci-dessous représente un réservoir ouvert, équipé de deux tubes et rempli avec deux liquides non miscibles :
- de l'huile de masse volumique $\rho_1 = 850$ kg/m^3 sur une hauteur $h_1 = 6$ m,
- de l'eau de masse volumique $\rho_2 = 1000$ kg/m^3 sur une hauteur $h_2 = 5$ m.

On désigne par A un point de la surface libre de l'huile, B un point sur l'interface entre les deux liquides, C un point appartenant au fond du réservoir, D et E des points représentants les niveaux dans les tubes (attention : leur hauteur n'est pas correctement representée sur le schéma) et (0, Z) est un axe vertical tel que $Z_C = 0$ m.

La pression atmosphérique vaut $P_{\text{atm}} = 1 \times 10^5$ Pa.



Déterminez

a) la pression P_B au point B,

b) le niveau de l'huile Z_E dans le tube,

c) la pression P_C au point C,

d) le niveau de l'eau Z_D dans le tube.

points:

- Problème d'hydrostatique
- Formule de la $P_{hydrost}$:

$$P_{hydrost} = \rho_{liquide} \cdot g \cdot \Delta h_{liquide}$$

1 a) P_B : considérer les fluides au dessus du point B:

$P_B = P_{atm} + \rho_{huile} \cdot g \cdot \Delta h_{huile} = P_{atm} + 850 \, kg/m^3 \cdot 10 \, m/s^2 \cdot 6 \, m$

$= 10^5 \, Pa + 51\,000 \, Pa = 151\,000 \, Pa$

$\rightarrow \boxed{P_B = 1{,}51 \, 10^5 \, Pa}$

1 b) $Z_E = Z_A$: même hauteur car même fluide.

$P_A = P_E = P_{atm}$

$\rightarrow P_B = P_{atm} + \rho_h \, g \, \Delta h_h = P_{atm} + \rho_h \cdot g \cdot (Z_E - Z_B)$ $\rightarrow \boxed{Z_E = 11 \, m}$

$\rightarrow Z_E = h_1 + h_2 = 6 + 5 \, m$

1 c) $P_C = P_B + \rho_{eau} \cdot g \cdot \Delta h_{eau} = 1{,}51 \, 10^5 \, Pa + 1000 \, kg/m^3 \cdot 10 \, m/s^2 \cdot 5 \, m$

$= 2{,}01 \, 10^5 \, Pa$

$\rightarrow \boxed{P_C = 2{,}01 \, 10^5 \, Pa}$

1 d) $P_C = P_{atm} + \rho_{eau} \cdot g \cdot (Z_D - 0)$

$\rightarrow Z_D = \dfrac{P_C - P_{atm}}{\rho_{eau} \cdot g} = 6 \; \dfrac{(2{,}01 - 1) \, 10^5 \, Pa}{1000 \, kg/m^3 \cdot 10 \, m/s^2} = 10{,}1 \, m$

$\rightarrow \boxed{Z_D = 10.1 \, m}$

Physique 1 – PHYS-F104 (2020-2021)

Examen de juin 2021

Deuxième partie

10 juin 2021

Nom :

Prénom :

N° de matricule :

Section (entourer) : Biologie — Géographie — Géologie — Pharmacie

Consignes générales :

1. Écrivez immédiatement en **lettres CAPITALES** vos prénom, nom, numéro de matricule et section.

2. Vérifiez que votre énoncé comporte bien **7 feuilles** (4 questions + 2 brouillons).

3. Ne dégrafez pas les pages.

4. Les réponses à chaque question doivent être placées sur les faces recto/verso de l'énoncé, n'écrivez pas de réponse sur les brouillons. Les feuilles de brouillon ne seront pas corrigées.

5. Vous n'avez droit à rien d'autre que de quoi écrire, votre formulaire, votre calculatrice et votre carte d'étudiant.

6. Les GSM, tablettes, smartwatches et autres moyens de communication sont interdits. Ils doivent être éteints et rangés dans les sacs le long du mur. En aucun cas vous ne pouvez avoir un GSM (ou autre moyen de communication) à portée de main, même éteint.

7. Ne répondez pas en rouge, cette couleur étant réservée pour la correction.

8. **Les réponses doivent toutes être clairement justifiées et les unités doivent être indiquées pour les résultats numériques.**

9. Cette partie dure 2 heures (120 minutes).

Bon travail !

/5	/5	/5	/5		/20

Question 1 (5 points) Considérez une corde de longueur L = 2,00 m fixée aux deux extrémités. Si la tension de la corde est de 300 N et la fréquence fondamentale de 15 Hz, calculez

a) la masse linéique de la corde,

b) la fréquence et longueur d'onde de la cinquième harmonique,

c) la longueur d'onde du son produit par la corde quand elle vibre à la fréquence fondamentale (v_{son}=344 m/s).

a) (2,5)

$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad f_1^2 = \frac{1}{4L^2}\frac{F}{\mu} \qquad \mu = \frac{F}{4L^2 f_1^2} = \frac{300}{4\text{x}4\text{x}(15)^2} = 0{,}083\ kg/m$$

b) (1,5)

$$f_5 = 5 \text{ x } f_1 = 5 \text{ x } 15 = 75\ Hz \qquad \lambda_5 = \frac{2\text{x}L}{5} = \frac{2\text{x}2}{5} = 0{,}8\ m$$

c) (1)

$$\lambda_1 = \frac{v_{son}}{f_1} = \frac{344}{15} = 22{,}9\ m$$

Question 2 (5 points)

a) Un objet de hauteur h=1,4 cm est placé à 5 cm à gauche d'une lentille convergente d'une distance focale de f = 12 cm (voir figure ; F et F' représentent les points focaux, l'objet est représenté par la flèche sur le schéma).

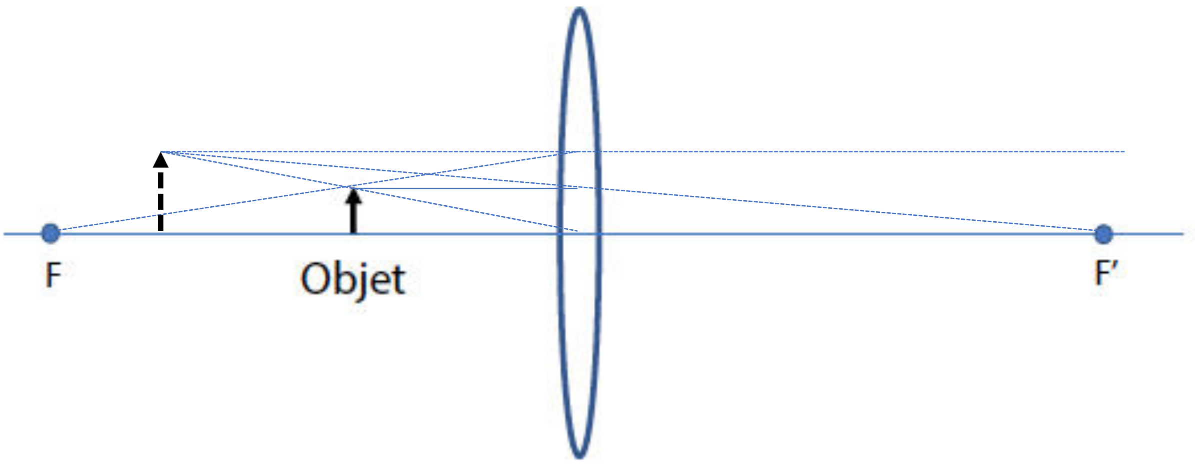
1) Déterminez graphiquement l'image produite par la lentille.

2) Calculez la distance entre l'image et la lentille.

3) Déterminez la hauteur de l'image.

b) Si vous submergez la lentille dans l'eau, trouvez sa distance focale (prendre comme indices de réfraction de l'eau n_{eau} = 1,33 et de la lentille n_{verre} = 1,54).

1) (1)



2) (1)

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{12} \qquad \frac{1}{s'}=\frac{1}{12}-\frac{1}{5}=-0{,}116\ \ 1/cm \qquad s'=-8{,}57\ cm$$

3) (1,5)

$$h'=mh \qquad m=-\frac{s'}{s}=-\frac{-8{,}57}{5}=+1{,}7 \qquad h'=1{,}7\text{x}1{,}4=2{,}4\ cm$$

b) (1,5)

$$air\ \ \frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) \qquad eau\ \ \frac{1}{f'}=(n'-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) \qquad n'=\frac{1{,}54}{1{,}33}$$

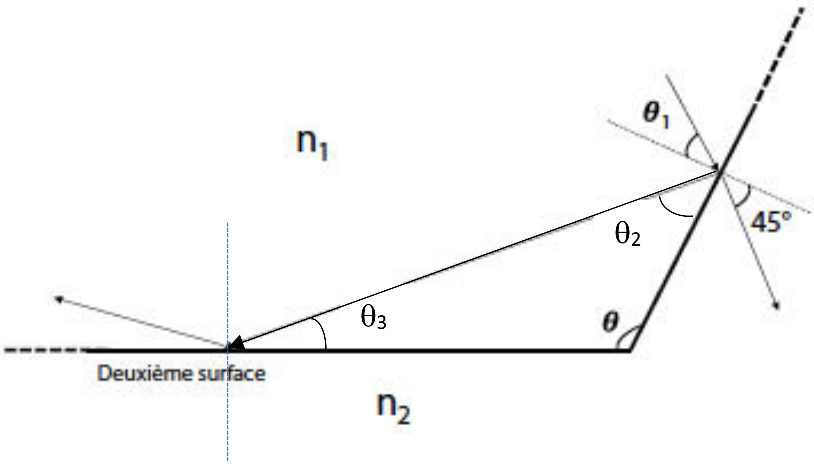
$$\frac{f'}{f}=\frac{n-1}{n'-1} \qquad f'=f\,\frac{n-1}{n'-1}=12\,\frac{1{,}54-1}{\frac{1{,}54}{1{,}33}-1}=41{,}04\ cm$$

Question 3 (5 points) Un rayon, provenant d'un milieu avec un indice de réfraction n_1=1,5, tombe sur un matériau d'indice de réfraction n_2 = 1,33 avec un angle θ_1 tel que l'angle réfracté est de 45° (voir la figure ; tous les rayons sont dans le même plan).

a) Déterminez l'angle d'incidence θ_1.

b) Considérez le rayon réfléchi. Déterminez l'angle θ (voir la figure) pour lequel ce rayon réfléchi va subir le phénomène de réflexion interne totale (angle critique) lorsqu'il rencontre la deuxième surface.

c) Si on change l'indice de réfraction n_1 = 1, un angle critique est-il possible ? Si oui, lequel ? Si non, pourquoi ?



θ_3 θ_2

a)(1,5)

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \qquad 1{,}5 \sin\theta_1 = 1{,}33 \sin 45° \qquad \theta_1 = 38{,}8°$$

b)(2,5)

$$1{,}5 \sin\theta_c = 1{,}33 \sin 90° \qquad \sin\theta_c = \frac{1{,}33}{1{,}5} \sin 90° \qquad \theta_c = 62{,}4°$$

θ_2=90°-38,8°=51,2°

θ_3=90°-62,4°=27,6°

θ=180°-27,6°-51,2°=101,2°

c) (1)

Non → $\sin\theta_c = \frac{n_2}{n_1}$ $\quad mais\ \ n_2 > n_1 \quad \rightarrow \sin\theta_c > 1\ \ pas\ possible$

Question 4 (5 points) Considérez deux fentes illuminées par une source lumineuse de longueur d'onde λ = 500 nm. La distance entre les fentes et l'écran est de 3 m.

a) Déterminez la position y sur l'écran de la frange brillante d'ordre m = 3 (par rapport au maximum de l'intensité de la frange brillante m = 0) si la distance séparant les deux fentes est de 1 mm.

b) Si la distance entre les franges brillantes de cinquième ordre et de sixième ordre est de 1,6 x 10^{-3} m, déterminez la distance entre les deux fentes.

c) Déterminez la position y sur l'écran de l'interférence destructive correspondant à m = 2 (prendre la distance séparant les deux fentes égale à 1 mm).

a)(1)

$$d\frac{y}{D} = m\lambda \qquad y = m\frac{\lambda D}{d} = 3\,\frac{5\text{x}10^{-7}\text{x}3}{1\text{x}10^{-3}} = 4{,}5\text{x}10^{-3}\ m$$

b)(3)

$$y_5 = 5\frac{\lambda D}{d} \qquad y_6 = 6\frac{\lambda D}{d} \qquad \rightarrow \Delta y = \frac{\lambda D}{d} \qquad \rightarrow d = \frac{\lambda D}{\Delta y} = \frac{5\text{x}10^{-7}\text{x}\ 3}{1{,}6\text{x}10^{-3}} =$$

$$= 9{,}3\text{x}10^{-4} m$$

c)(1)

$$d\frac{y}{D} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \ \rightarrow d\frac{y}{D} = \left(2 + \frac{1}{2}\right)\lambda = \frac{5}{2}\ \lambda$$

$$y = \frac{D}{d}\,\frac{5}{2}\lambda = \frac{3}{1\text{x}10^{-3}}\frac{5}{2}5\text{x}10^{-7} = 3{,}75\text{x}10^{-3} m$$

Physique 1 – PHYS-F104 (2021-2022)

Interro de novembre 2021

05 novembre 2021

Nom :

Prénom :

N° de matricule :

Section (entourer) : Biologie — Géographie — Géologie — Pharmacie

---

Consignes générales :

1. Écrivez immédiatement en **CAPITALES** vos prénom, nom, numéro de matricule et section.
2. Vérifiez que votre énoncé comporte bien **7 feuilles** (1 page de garde, 5 questions et 1 brouillon).
3. Ne dégrafez pas les pages.
4. Vous n'avez droit à rien d'autre que de quoi écrire, votre formulaire (une feuille A4), votre calculatrice et votre carte d'étudiant.
5. Les GSM, tablettes, smartwatches et autres moyens de communication sont interdits. Ils doivent être éteints et rangés dans vos vestes.
6. Ne répondez pas en rouge, cette couleur étant réservée pour la correction.
7. **Les réponses doivent toutes être clairement justifiées et les unités doivent être indiquées pour les résultats numériques.**
8. En cas de besoin, vous prendrez les valeurs de constantes suivantes :
   accélération gravitationnelle terrestre : $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$
9. Cet interro dure **2 heures (120 minutes)**.

Bon travail !

/4	/4	/4	/4	/4	/20

Question 1 (4 points) La force $\vec{F_1}$ d'intensité 4 N fait un angle de 30° avec l'axe horizontal (axe x) et est orientée vers les x et y positifs. La force $\vec{F_2}$ s'écrit $\vec{F_2} = (-4\ \vec{1_x} + 3\ \vec{1_y})$ N.

a) Exprimez 4 N dans le système d'unité MKS.

b) Quelles sont les composantes de $\vec{F_1}$ selon l'axe x et l'axe y.

c) Que vaut le module de $\vec{F_2}$?

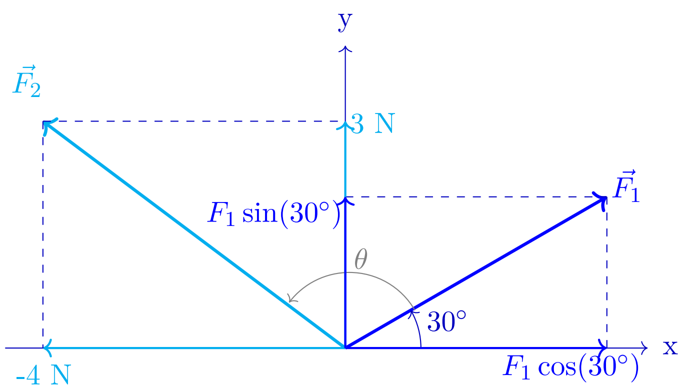
d) Que vaut l'angle entre $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$?

Solution.

a) On utilise la loi de Newton : $F = ma$ où F est une force exprimée en N, m est une masse exprimée en kg et a est une accélération exprimée en m/s^2. Cela permet de déduire que 4 N équivaut à 4 kg m/s^2 dans le système d'unité MKS.

b) Puisque $\vec{F_1}$ fait un angle de 30° avec l'horizontale vers les x et y positifs, on peut calculer les composantes de $\vec{F_1}$ via une projection sur les axes x et y :

$$\vec{F_1} = 4\,\text{N}\,\cos(30°)\vec{1}_x + 4\,\text{N}\,\sin(30°)\vec{1}_y = 2\sqrt{3}\ \text{N}\,\vec{1}_x + 2\,\text{N}\,\vec{1}_y \tag{1}$$



c) Le module (ou norme) de $\vec{F_2}$ est la longeur du vecteur. En utilisant la relation de Pythagore dans le système d'axe x-y, on peut donc écrire que :

$$|\vec{F_2}| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2}\ \text{N} = \sqrt{25}\ \text{N} = 5\,\text{N}$$

d) L'angle θ entre les deux vecteurs est donné par la relation suivante :

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{F_1}.\vec{F_2}}{|\vec{F_1}||\vec{F_2}|} \tag{2}$$

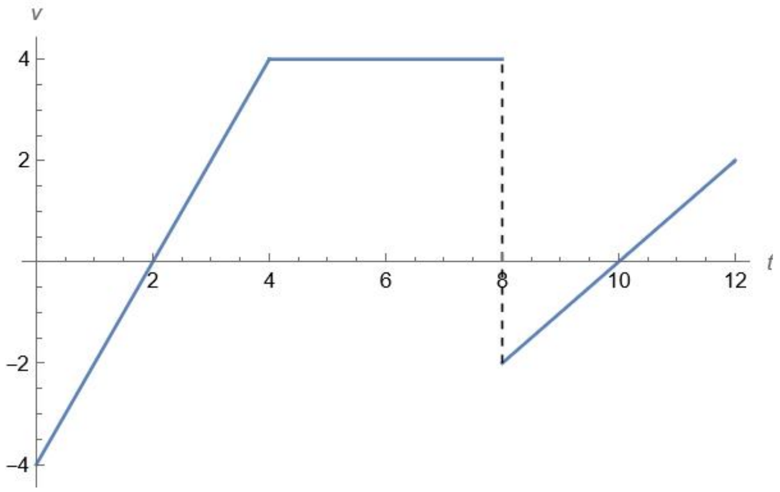
où $|\vec{F_1}| = 4\,\text{N}$ et $|\vec{F_2}| = 5\,\text{N}$. Il reste donc déterminer le produit scalaire $\vec{F_1}.\vec{F_2}$, qui se calcule comme suit :

$$\vec{F_1}.\vec{F_2} = 2\sqrt{3}.(-4) + 2.3 = -8\sqrt{3} + 6 \tag{3}$$

En isolant θ dans l'équation 2, on obtient :

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{F_1}.\vec{F_2}}{|\vec{F_1}||\vec{F_2}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-8\sqrt{3}+6}{20}\right) \approx 113{,}1° \tag{4}$$

Question 2 (4 points) La vitesse d'un mobile est décrite par le graphique suivant.



En supposant que notre mobile démarre à l'origine,

a) Quelle est sa position après $4\,\mathrm{s}$?

b) Quelle est son accélération en $t = 3\,\mathrm{s}$ et $t = 9\,\mathrm{s}$?

c) Quelle est la distance totale parcourue par notre mobile après $12\,\mathrm{s}$?

Solution.

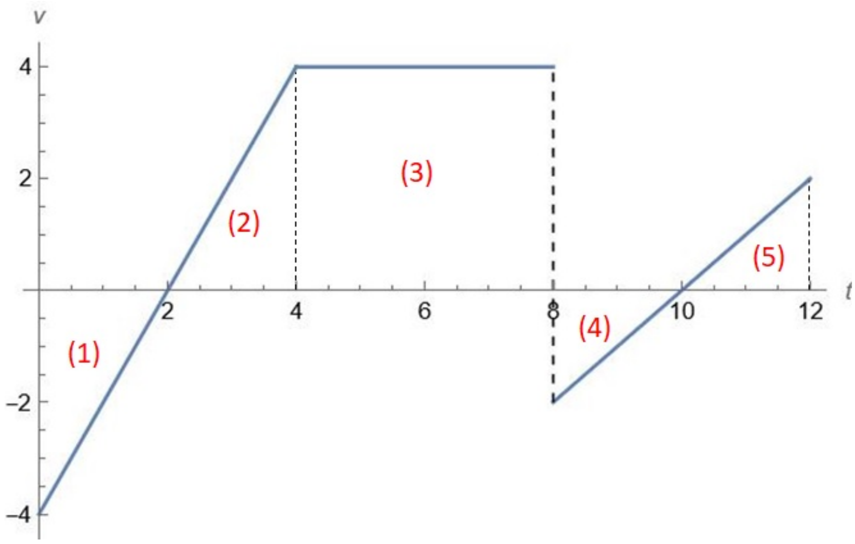


Fig. 1

a) Pour cette première question, il y a plusieurs manière de raisonner. La façon la plus rapide est de se rappeler que la position du mobile s'obtient par intégration de la vitesse, c'est-à-dire via l'aire sous la courbe. Après $t = 4\,\mathrm{s}$, les aires qui nous intéressent sont les (1) et (2) sur la figure 1. Comme elles sont d'aires égales mais qu'il y en a une négative, la (1), et une positive, la (2), la somme des deux s'annulent et notre mobile se retrouve à sa position initiale $x_0 = 0\,\mathrm{m}$.
Sinon, nous pouvons trouver l'équation de la vitesse entre $t = 0\,\mathrm{s}$ et $t = 4\,\mathrm{s}$, $v(t) = 2t - 4$, intégrer cette dernière, $x(t) = t^2 - 4t + 0$, car $x_0 = 0\,\mathrm{m}$, et regarder sa position après $4\,\mathrm{s}$, $x(t = 4\,\mathrm{s}) = 4^2 - 4 \times 4 = 0\,\mathrm{m}$.

b) Pour ce deuxième point, l'accélération correspond à la pente de notre graphique aux temps $t = 3\,\mathrm{s}$ et $t = 9\,\mathrm{s}$. Entre $t = 0\,\mathrm{s}$ et $t = 4\,\mathrm{s}$, la pente est constante et est égale à 2, donc en particulier, $a(t = 3\,\mathrm{s}) = 2\,\mathrm{m/s^2}$.
Et en $t = 9\,\mathrm{s}$, nous procédons de la même manière. La pente est constante entre $t = 8\,\mathrm{s}$ et $t = 12\,\mathrm{s}$ et est égale à 1. Donc $a(t = 9\,\mathrm{s}) = 1\,\mathrm{m/s^2}$.

c) Enfin, pour ce dernier point, nous devons calculer la distance totale parcourue. Attention cela est différent de la position finale ! Quand vous faites l'aller-retour Bruxelles-Liège, votre position finale est celle d'origine donc si votre origine est sur votre lieu de départ, $x_f = 0\,\mathrm{m}$, par contre la distance totale parcourue est non nulle.
Donc ici, nous pouvons à nouveau calculer l'aire sous la courbe mais chaque partie aura un signe positif (donc différent du point a où l'on s'intéressait à la position). Ansi, les aires (1) et (2) sont égales, tous comme les aires (4) et (5). Donc

$$d_{\mathrm{tot}} = 2 \times \frac{2 \times 4}{2} + 4 \times 4 + 2 \times \frac{2 \times 1}{2} = 28\,\mathrm{m}.$$

Question 3 (4 points) François cherche à savoir la hauteur du pont suspendu sur lequel il se trouve. Isabelle lui suggère de laisser tomber une roche au bas du pont, elle chronométra alors le temps que prendra la roche à tomber dans la rivière sous le pont et pourra ainsi déterminer la hauteur du pont. François qui n'a pas bien compris les consignes d'Isabelle lance la roche vers le haut, avec un angle de 20° par rapport à l'horizontale. Isabelle chronomètre quand même le temps que prend la roche à monter et à retomber dans la rivière.

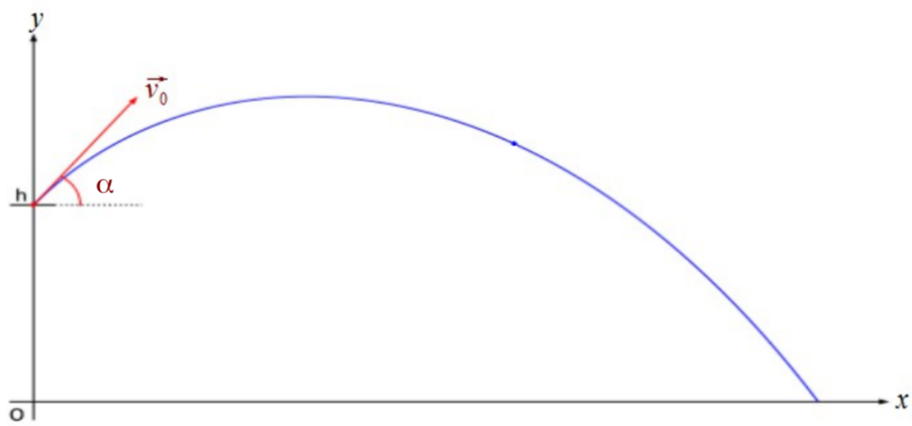
a) Sachant que la roche est restée dans les airs durant 6 s et que la vitesse initiale du lancer était de 3 m/s, à quelle hauteur est située le pont ?

b) Considérons qu'un oiseau parte du pont de manière horizontale et avec une vitesse constante, en même temps que François lance la roche. Quelle est la vitesse que l'oiseau doit avoir pour rencontrer la roche ?

c) A quelle distance du pont l'oiseau rencontre la roche dans ce cas ?

Solution.

a) Pour commencer, dessinons le schema avec la trajectoire, le vecteur vitesse et l'angle par rapport à l'horizontale, $\alpha = 20°$, avec comme origine du répère le point O au sol (surface de la rivière).



Appliquons maintenant les équations d'un MRUA à deux dimensions selon y, entre le moment du lancement et le moment où la roche tombe dans la rivière :

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{5}$$

Ici, on a $y(t = 6\,\text{s}) = 0\,\text{m}$ (hauteur final au sol), $y_0 = h$ (où h est la hauteur du pont), $t = 6\,\text{s}$ (durée du trajet de la pièrre entre $y_0 = h$ et $y = 0$) et $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$

On trouve donc la hauteur du pont :

$$h = \frac{1}{2}gt^2 - v_0\ \sin(\alpha)\ t = \frac{1}{2} \times 10 \times 6^2 - 3 \times \sin(20°) \times 6 = 173{,}8\,\text{m}$$

b) Pour étudier une possible rencontre, écrivons les équations du mouvement pour les deux mobiles selon x :

• Pour l'oiseau, c'est un MRU : $x_{\text{ois}} = v_{\text{ois}}t$

• Pour la roche aussi mais avec angle de lancement α : $x_{\text{roche}} = v_0 \cos\alpha\ t$

Au moment de la rencontre : $x_{\text{ois}} = x_{\text{roche}}$ et $t_{\text{ois}} = t_{\text{roche}} = t_{\text{renc}}$.

On trouve donc la vitesse de l'oiseau : $v_{\text{ois}}t_{\text{renc}} = v_0 \cos\alpha\ t_{\text{renc}}$

$\rightarrow v_{\text{ois}} = v_0 \cos\alpha = 3 \times \cos(20°) = 2.82$ m/s

c) La première étape est de calculer le temps de rencontre : le temps que la roche prend pour monter et re-descendre jusqu'à la position du pont. On applique pour celà l'équation avec $y(t_{\text{renc}}) = h$ et $y_0 = h$. Donc on obtient : $h = h + v_0 \sin\alpha\ t - \frac{1}{2}gt^2 \to \frac{1}{2}gt^2 - v_0 \sin\alpha\ t = 0$
On trouve donc deux solutions :
1) La pierre est à une hauteur h au moment initial (t=0)
2) La pierre retourne à une hauteur h au moment de la rencontre : $t_{\text{renc}} = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$.
L'application numérique donne comme résultat : $t_{\text{renc}} = \frac{2\times\sin(20°)\times 3}{10} = 0{,}21\,\text{s}$. Avec ce t_{renc}, on peut finalement calculer la distance avec les équations selon x en b) :

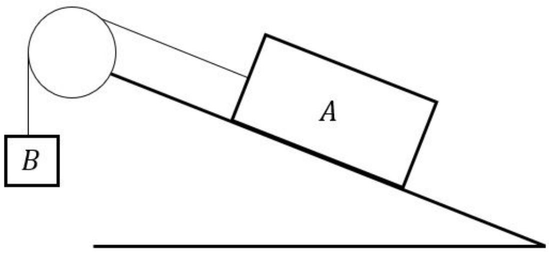
$$x_{\text{renc}} = x_{\text{ois}}(t_{\text{renc}}) = v_{\text{ois}} t_{\text{renc}} = 2.82 \times 0.21 = 0{,}59\,\text{m}.$$

Question 4 (4 points) Un bloc en bois de masse $m_A = 100\,\mathrm{kg}$ se trouve sur une pente avec un angle $\alpha = 30°$ et est accroché à une caisse en fer de masse $m_B = 250\,\mathrm{kg}$ par un système de poulie avec un câble non-extensible et de masse négligeable. Le système est dessiné sur la figure ci-dessous. Grâce à la force de frottement statique entre le bloc et la pente le tout se trouve en équilibre statique.

— a) Calculez le module de la force de frottement entre le bloc et la pente, et dessinez le vecteur de force sur l'image ci-dessous.

À un certain moment le câble dans le système de la poulie se casse et le bloc se met à glisser sur la pente avec une accélération constante de $2\,\mathrm{m/s^2}$.

— b) Calculez le coefficient de frottement dynamique entre le bloc et la pente et calculez le module de la force de frottement.



Solution.

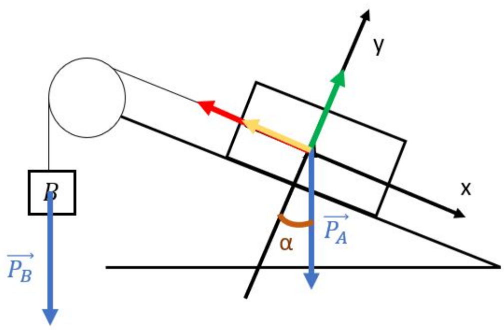


FIG. 2 – Schéma du système avant que le cable se casse.

a) On choisit le repère des axes comme indiqué sur la figure 2. Nous avons que la force de gravité agissant sur les masses A et B est respectivement donné par : $\vec{P}_A$ et $\vec{P}_B$, la force normale agissant sur le bloc A est indiquée en vert et est dénotée : $\vec{N}$, la tension du câble sur le bloc A, $\vec{T}_A$ est dessinée en rouge. La force de frottement, $\vec{F}_f$ indiquée en jaune, entre le bloc est la pente va toujours être parallèle à la surface de contacte (parallèle à la pente), mais en principe on ne connaît pas encore sa direction. Nous allons pour l'instant choisir cette direction de telle façon que le vecteur de force pointe vers le haut de la pente (direction négative des x).

Vu que le système est en équilibre nous avons que l'accélération du bloc A est nulle, $\vec{a}_A = 0$. Donc, la seconde loi de Newton décomposée selon les différents axes de notre repère nous donne :

$$\begin{cases} 0 = P_{Ax} - T_A - F_f & \text{selon x,} \\ 0 = -P_{Ay} + N & \text{selon y,} \end{cases} \tag{6}$$

où nous avons dénoté P_{Ax}, P_{Ay} comme les composantes x et y du vecteur $\vec{P}_A$. Quand on regarde le triangle rectangle formé par $\vec{P}_A$, l'axe y et la ligne orange, on voit que la composante P_{Ax} est égale à l'opposé, et P_{Ay} égale l'adjacente. Nous avons donc que $P_{Ax} = \sin(\alpha)\, P_A$ et $P_{Ay} = -\cos(\alpha)\, P_A$ (le signe négative pour la composante y vient du fait que le vecteur pointe dans la direction opposée de l'axe y).

Pour continuer on doit savoir quelle est la valeur de l'angle α. Pour ceci regardons la figure 3. On sait de l'énoncé que l'angle $\alpha_1 = 30°$, et on voit que l'angle $\alpha_2 = \alpha_1 = 30°$. L'arc jaune et mauve dans la figure 3 sont des angles droits et sont égales à la somme de $\alpha_2 + \alpha_3$ (jaune) et $\alpha + \alpha_3$ (mauve). Nous trouvons donc que $\alpha + \alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3 \implies \alpha = \alpha_2 = \alpha_1 = 30°$. Pour

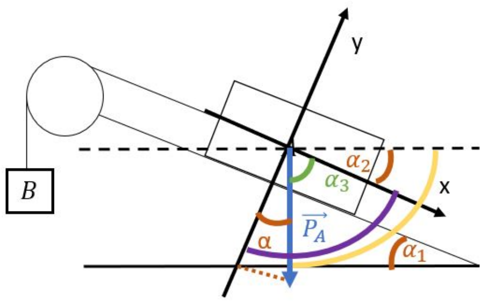


FIG. 3 – Schéma pour trouver l'angle α.

trouver le module de la force de frottement on voit que on a que besoin de l'équation selon x dans (6), ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} 0 &= P_{Ax} - T_A - F_f, \\ F_f &= P_{Ax} - T_A, \\ F_f &= \sin\alpha\; m_A\; g - m_B\; g, \\ F_f &= -2\,\text{kN}. \end{aligned} \tag{7}$$

Pour obtenir ce résultat nous avons remplacé $T_A = m_B g$, parce que $T_A = P_B = m_B g$. L'équation (7) nous dit que le module de la force est négative (ce qui n'est possible). Ceci indique que nous nous sommes trompé dans notre choix initiale pour la direction de la force de frottement. Le résultat finale est donc que le module de la force égale $F_f = 2\,\text{kN}$, mais que le vecteur pointe dans la direction positive des x (donc vers le bas de la pente).

b) Quand le câble casse et que le bloc se met à glisser (uniquement selon la direction x), nous avons que $\vec{T}_A = 0$ et que la force de frottement $\vec{F}_d$, dirigée complètement selon l'axe des x mais dans la direction négative (opposé au mouvement), est donnée par la formule $F_d = \mu_d N$. Ceci veut dire qu'en utilisant l'équation de Newton, $\vec{F}_{totale} = m_A \vec{a}_A$, nous obtenons les équations suivantes :

$$\begin{cases} 2m_A = P_{Ax} - F_d & \text{selon x,} \\ 0 = -P_{Ay} + N & \text{selon y,} \end{cases} \tag{8}$$

ce qui nous donnent :

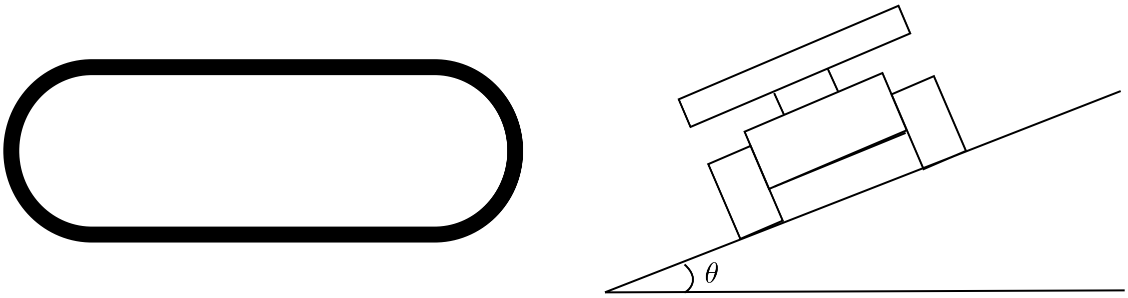
$$\begin{cases} 2m_A = \sin\alpha\; m_A\; g - \mu_d N & \text{selon x} \\ 0 = -\cos\alpha\; m_A\; g + N & \text{selon y} \end{cases}$$

L'équation selon y nous dit que $N = \frac{\sqrt{3}}{2} m_A g$ et donc que l'équation selon x devient :

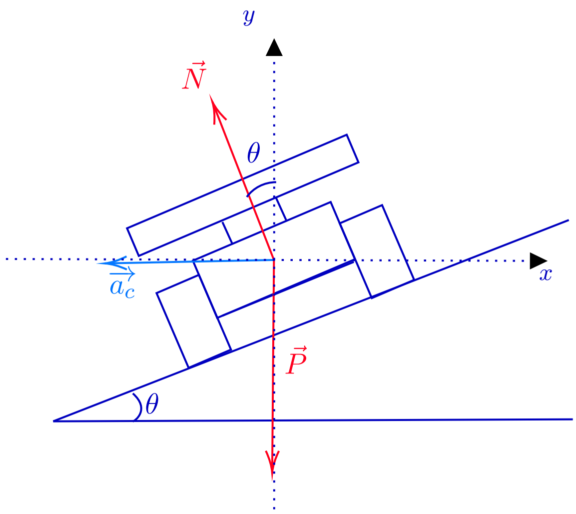
$$\begin{aligned} 2m_A &= \frac{1}{2} m_A g - \mu_d \frac{\sqrt{3}}{2} m_A g \\ \frac{2\left(\frac{1}{2}g - 2\right)}{\sqrt{3}g} &= \mu_d \approx 0.35. \end{aligned} \tag{9}$$

Ceci veut dire que le module de la force de frottement $F_d = 300\,\mathrm{N}$.

Question 5 (4 points) Le circuit automobile d'Indianapolis est réputé pour sa forme en anneau et les grandes vitesses que peuvent obtenir les voitures dans les virages. Il est composé de deux lignes droites et de deux virages en demi-cercle d'1 km chacun. Sachant que les voitures prennent ces virages à une vitesse de 200 km/h, que doit valoir l'angle d'inclinaison du virage (θ sur le dessin) si l'on souhaite que les voitures tournent sans modifier leur vitesse avec une force de frottement nulle ?



Solution. La première étape est de faire le bilan des forces et de les représenter sur le schéma. Comme on nous informe que nous aimerions n'avoir aucune force de frottement, seule deux forces extérieurs agissent sur ma voiture : son poids $\vec{P}$ dirigé vers le bas et la réaction du sol $\vec{N}$ perpendiculaire à la surface et dirigée vers le haut. Comme nous sommes dans un virage circulaire et que l'on souhaite que la vitesse reste la même, cela nous informe que nous sommes dans un MCU et que la seule accélération est celle centripète $\vec{a}_c$ dirigée vers le centre de la trajectoire (et non parallèle au sol).



Maintenant que nous avons représenté nos forces, nous pouvons choisir un repère. Ici, le plus simple est celui représenté sur la figure ci-dessus. En effet, ainsi, seul $\vec{N}$ a une composante x et une compasante y et forme un angle θ avec l'axe des y.

Selon la deuxième loi de Newton, $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}$. Dans notre cas, nous avons donc $\vec{N} + \vec{P} = m\vec{a}_c$ où m est la masse de la voiture. Projetons cette équation sur nos axes.

$$\begin{aligned} Ox &: \quad -N\sin\theta = -ma_c \\ Oy &: \quad N\cos\theta - mg = 0 \end{aligned}$$

Ecrites autrement, ces deux équations nous donnent

$$\begin{cases} N\sin\theta = ma_c \\ N\cos\theta = mg \end{cases} \tag{10}$$

En prenant le rapport de ces deux équations, la norme de $\vec{N}$ ainsi que la masse m se simplifient et nous terminons avec

$$\tan\theta = \frac{a_c}{g}.$$

Rappelons nous que la formule de l'accélération centripète est $a_c = \frac{v^2}{R}$ où R est le rayon de la trajectoire. La distance d'un virage en forme de demi-cercle est d'1 km. Donc le rayon est $R = \frac{1\,\mathrm{km}}{\pi} = 318\,\mathrm{m}$. En n'oubliant pas de convertir la vitesse en m/s, l'angle θ doit être

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v^2}{Rg}\right) = 44°. \tag{11}$$

Physique 1 – PHYS-F104 (2021-2022)

Examen de janvier 2022

21 janvier 2022

Nom :

Prénom :

N° de matricule :

Section (entourer) : Biologie — Géographie — Géologie — Pharmacie

Consignes générales :

1. Écrivez immédiatement en **CAPITALES** vos prénom, nom, numéro de matricule et section.
2. Vérifiez que votre énoncé comporte bien **10 feuilles** (1 page de garde, 6 questions et 3 brouillons).
3. Ne dégrafez pas les pages.
4. **Ne répondez qu'aux questions qui concernent votre section. Barrez les autres.** Au total, chaque section répond à 5 questions.
5. Vous n'avez droit à rien d'autre que de quoi écrire, votre formulaire (une feuille A4), votre calculatrice et votre carte d'étudiant.
6. Les GSM, tablettes, smartwatches et autres moyens de communication sont interdits. Ils doivent être éteints et rangés dans vos vestes.
7. Ne répondez pas en rouge, cette couleur étant réservée pour la correction.
8. **Les réponses doivent toutes être clairement justifiées et les unités doivent être indiquées pour les résultats numériques.**
9. En cas de besoin, vous prendrez les valeurs de constantes suivantes :
   accélération gravitationnelle terrestre : $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$
10. Cet examen dure **2 heures (120 minutes)**.

Bon travail !

/4	/4	/4	/4	/4	/20

Question 1 (4 points - Toutes sections) Une voiture roule à vitesse constante $v_0 = 54\,\text{km/h}$ en ligne droite. Au temps t_0, le conducteur aperçoit un obstacle, mais ne commence à freiner avec une décélération constante de norme $a_0 = 7{,}50\,\text{m/s}^2$ qu'au bout d'un temps de réaction $\epsilon = 0{,}6\,\text{s}$.

a) Calculez le temps mis par le véhicule depuis l'instant initial t_0 jusqu'à l'arrêt de la voiture.

b) Calculez la distance parcourue par le véhicule depuis l'instant initial t_0 jusqu'à l'arrêt de la voiture.

Un point est situé à 30 cm du centre de la roue de la voiture. A partir de $t = \epsilon$, la roue commence à rouler de moins en moins vite. Sachant qu'à $t = \epsilon$ le point tourne avec une vitesse tangentielle de 1 m/s et en utilisant le temps pendant lequel la voiture freine, calculez :

c) L'accéleration angulaire de la roue pendant la durée du freinage ;

d) La vitesse tangentielle du point au bout de 2 secondes depuis $t = \epsilon$.

Solution.

a) On cherche à avoir $v(t_{stop}) = 0$, soit $-a_0(t_{stop} - \epsilon) + v_0 = 0$. On obtient : $t_{stop} = \frac{v_0}{a_0} + \epsilon = 2{,}60\,\text{s}$.

b) La distance de freinage peut être calculé en deux étapes :
Distance entre $t = 0$ et $t = \epsilon$, MRU : $d_1 = x(\epsilon) - x(0) = v_0\epsilon = 9$ m
Distance entre $t = \epsilon$ et $t = t_{stop}$, MRUA : $d_2 = x(t_{stop}) - x(\epsilon) = v_0\ (t_{stop} - \epsilon) - \frac{1}{2}(t_{stop} - \epsilon)^2 a_0 = 15{,}0\,\text{m}$
La distance de freinage est donc : $d_{stop} = d_1 + d_2 = 24{,}0\,\text{m}$.

c) Pour un mouvement circulaire uniformément accéléré (MCUA) : $\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{R} \times \frac{1}{\Delta t} = -\frac{v_0}{R\ \Delta t}$, avec $\Delta t = t_{stop} - \epsilon = 2\,\text{s}$. Ceci donne : $\alpha = -\frac{v_0}{2R} = 1.66\ \text{rad/s}^2$

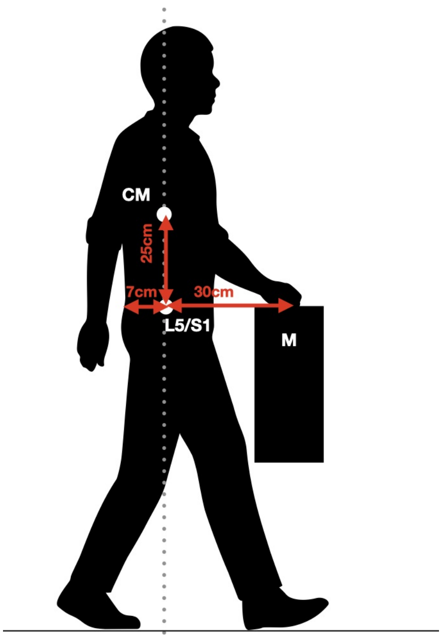
d) Au bout de 2 sec depuis $t = \epsilon$, la voiture est à l'arrêt, donc la vitesse du point est nulle, $v_p = 0$ m/s.

Question 2 (4 points - Toutes sections) Vous êtes responsable de la sécurité et de la santé des travailleurs dans une entreprise. Un travailleur porte une charge de masse $M = 3{,}5\,\text{kg}$, dont nous allons examiner l'impact sur le dos, en particulier au point L5/S1 qui correspond à l'articulation sacro-iliaque participant à la rotation du dos. La position du centre de masse du tronc (partie supérieure du corps au dessus de L5/S1 comprenant également la tête et les bras), dont la masse est estimée à 50 kg, se trouve à la verticale du point L5/S1. L'action des muscles du dos agissant pour maintenir l'équilibre du travailleur peut être modélisée comme une force verticale vers le bas appliquée 7 cm en arrière du point L5/S1. La situation correspond au schéma ci-dessous. La distance entre le point L5/S1 et le point M est de 30 cm et celle entre le point L5/S1 et le point CM est de 25 cm.

a) Calculez la force devant être exercée par les muscles du dos afin de maintenir l'équilibre du travailleur.

b) Des études ont montré que les muscles du dos peuvent exercer une force maximale de 335 N. Quelle est la charge maximale pouvant être portée par le travailleur pour ne pas franchir cette limite ?

c) Afin de minimiser le moment de force dû aux muscles du dos, le travailleur doit-il porter la charge au plus près ou au plus loin de lui ? Pourquoi ?



Solution.

a) Comme le dos est en équilibre statique (pas de rotation), la somme des moments de force calculés à partir du point L5/S1 est nulle. On remarque que le moment de force induit par le poids de la partie supérieure du corps est nul, car la force $\vec{F}_{CM}$ est colinéaire avec le vecteur $\vec{r}_{CM}$ reliant les points L5/S1 et CM. On a donc :

$$\vec{\mathcal{M}}_{\text{muscles}} + \vec{\mathcal{M}}_M = 0$$

En normes, cela donne

$$F_{\text{muscles}} \times 0.07 \times \sin(90) - Mg \times 0.3 sin(90) = 0$$

et donc

$$F_{\text{muscles}} = \frac{3.5 \times 10 \times 0.3}{0.07} = 150N$$

La force devant être exercée par les muscles du dos est donc de 150N.

b) Si on reprend le calcul précédent avec $F_{\text{muscles}} = 335N$ et que l'on cherche M_{max}, on a :

$$335 \times 0.07 - M_{max}g \times 0.3 = 0$$

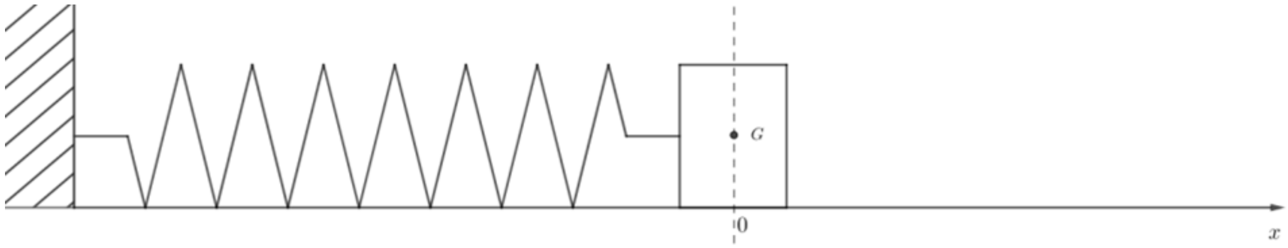
et donc

$$M_{max} = \frac{335 \times 0.07}{10 \times 0.3} = 7.82\text{kg}$$

Le poids maximum supporté dans cette position est donc de 7.8 kg.

c) Le travailleur doit porter sa charge" au plus près de lui, afin de minimiser le moment de force appliqué au point L5/S1, qui doit être contrebalancé par le moment de force des muscles du dos. En effet, ce moment de force est proportionnel à la distance (horizontale) séparant la masse M et le point L5/S1.

Question 3 (4 points - Toutes sections) Un solide S de masse m glisse sans frottement sur une tige horizontale. Le solide est accroché à un ressort de raideur k dont l'autre extrémité est fixée à un support immobile. La position du centre de masse G du solide à l'équilibre constitue l'origine O de l'axe des abscisses. On écarte le solide de sa position d'équilibre de 5 cm dans le sens positif des abscisses et on le libère sans vitesse initiale. L'origine des temps sera prise à l'instant où l'on libère le solide.



L'énergie du système "solide - ressort" est constante et égale à 20 mJ. A l'instant $t = 0{,}1$ s , l'énergie potentielle élastique du système est de 5 mJ. Déterminez :

a) la raideur du ressort k ;

b) la position du centre de masse G du solide à $t = 0{,}1$ s ;

c) la pulsation propre ω du système "solide - ressort" ;

d) la masse m du solide S.

Solution.

a) A $x = 5\,\text{cm}$, $E = \frac{1}{2}kx^2 = 20\,\text{mJ} \Rightarrow k = \frac{2E}{x^2} = 16\,\text{N/m}$;

b) A $t = 0{,}1\,\text{s}$, $E = \frac{1}{2}kx^2 = 5\,\text{mJ} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2E}{k}} = 2{,}5\,\text{cm}$;

c) $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$
$x(0) = A\cos\varphi = 0{,}05\,\text{m} \Rightarrow \varphi = 0$
$\Rightarrow x(t) = A\cos(\omega t)$

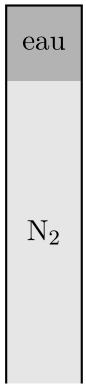
$$\Rightarrow \omega = \frac{1}{t}\arccos\left(\frac{x}{A}\right) = 10{,}5\,\text{rad/s}$$

pour $t = 0{,}1$ s et $x = 2{,}5$ cm ;

d) $m = \frac{k}{\omega^2} = 0{,}15\,\text{kg}$.

Question 4 (4 points - Toutes sections) Supposez que vous souffliez de manière à ce que la pression dans le bas d'une paille de hauteur $h = 10\,\mathrm{cm}$ placée à la verticale remplie d'eau de masse volumique $\rho_e = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}$ soit égale à $1\,100\,\mathrm{mbar}$. L'eau se met à monter et est éjectée par le dessus de la paille. Vous pouvez négliger les frottements.
Rappel : la pression atmosphérique vaut $1{,}013\,25\,\mathrm{bar}$, et $1\,\mathrm{bar} = 1 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$.

a) Quelle est la vitesse à laquelle le jet d'eau part du bas de la paille si le sommet de sa trajectoire correspond à une hauteur maximale de 1 m (mesurée à partir du bas de la paille) ?



Vous bouchez le haut de la paille avec votre doigt à un moment où il ne reste qu'une colonne d'eau de hauteur $h_e = 2\,\mathrm{cm}$ d'eau, tout en haut de la paille. Le souffle humain est principalement composé d'azote. Le dessous de la paille s'est donc rempli d'une colonne de N_2 de hauteur $h_{N_2} = 8\,\mathrm{cm}$ comme l'indique la figure ci-contre. Pour maintenir cette situation à l'équilibre, vous devez exercer une pression de $2{,}009\,48\,\mathrm{mbar}$ avec votre souffle.

b) Que vaut la masse volumique du N_2, ρ_{N_2} ?

Solution.

a) On la trouve grâce à l'équation de Bernoulli, vu que le fluide est en mouvement. On va comparer les valeurs en bas de la paille et celle en haut.

$$P_1 + \rho_e g h_1 + \frac{1}{2}\rho_e v_1^2 = P_2 + \rho_e g h_2 + \frac{1}{2}\rho_e v_2^2$$

P_1 correspond à la pression exercée par votre souffle en bas de la paille, donc à 1100 mbar, donc 11×10^4 Pascals. h_1 correspond à la hauteur en bas de la paille, donc $h_1 = 0\,\mathrm{m}$. v_1 correspond à la vitesse de l'eau en bas de la paille, qui est recherchée. P_2 correspond à la pression au sommet de la trajectoire du jet d'eau, hors de la paille, qui est donc à la pression atmosphérique. h_2 correspond à la hauteur maximale atteinte, donc $h_2 = 1\,\mathrm{m}$. v_2 correspond à la vitesse de l'eau au sommet de sa trajectoire, avant de retomber. Elle vaut donc $v_2 = 0\,\mathrm{m/s}$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\rho_e v_1^2 &= P_2 + \rho_e g h_2 - P_1 \\ v_1 &= \sqrt{\frac{2\,(P_2 + \rho_e g h_2 - P_1)}{\rho_e}} = 1{,}63\,\mathrm{m/s}\end{aligned}$$

b) La pression exercée par les colonnes d'eau et de N_2 doit donc compenser exactement les $2{,}009\,48\,\mathrm{mbar}$ exercés par le souffle. $2{,}009\,48\,\mathrm{mbar}$ correspondent à $200{,}948\,\mathrm{Pa}$.

$$\begin{aligned}200,948 &= \rho_e g h_e + \rho_{N_2} g h_{N_2} \\ \rho_{N_2} &= \frac{201 - \rho_e g h_e}{g h_{N_2}} = \frac{200,948 - 1000 \times 10 \times 0,02}{10 \times 0,08} = 1{,}185\,\mathrm{kg/m^3}\end{aligned}$$

Question 5 (4 points - Toutes sections sauf BIOL) Lors du dernier gros film hollywoodien, une scène de poursuite se déroule sur un lac gelé. Deux fuyards filent en voiture en ligne droite à 100 km/h. Pour les arrêter, un poursuivant roule en moto à 120 km/h et arrive avec un angle de 20° par rapport à la trajectoire des fuyards. Il saute alors de sa moto au moment de la collision, cette dernière s'arrêtant net en heurtant la voiture, et il atterrit sur le toit de la voiture. En supposant que la masse de la voiture est de 1 200 kg, que celle de la moto est de 150 kg et que chaque acteur pèse 80 kg,

a) De quel angle est dévié la voiture des fuyards ?

b) S'agit-il d'une collision élastique ou inélastique ? Justifiez.

Solution.

a) Comme l'action se déroule en l'absence de frottement et à vitesse constante, on peut appliquer la conservation de la quantitée de mouvement. Posons $m_1 = m_{\text{voiture + fuyards}}$, $m_2 = m_{\text{poursuivant}}$, et $m_3 = m_{\text{moto}}$. La situation de l'exercice correspond à l'équation suivante :

$$m_1\vec{v}_v + (m_2 + m_3)\vec{v}_m = (m_1 + m_2)\vec{v}$$

En choisissant nos axes tel que la voiture filait initialement vers les x positifs et supposant que la moto arrive par la doite de la voiture, la projection sur nos axes donnent :

$$\begin{aligned} m_1 v_v + (m_2 + m_3)v_m \cos\theta &= (m_1 + m_2)v\cos\alpha & (1)\\ (m_2 + m_3)v_m \sin\theta &= (m_1 + m_2)v\sin\alpha & (2) \end{aligned}$$

où α est l'angle de déviation que nous cherchons. Afin de l'isoler, nous allons prendre le rapport entre (2) et (1) :

$$\tan\alpha = \frac{(m_2 + m_3)v_m \sin\theta}{m_1 v_v + (m_2 + m_3)v_m \cos\theta} \;\Rightarrow\; \alpha 3{,}3°$$

b) Pour répondre à cette question, nous devons vérifier si l'énergie cinétique est conservée ou pas. Pour cela, calculer d'abord la vitesse finale v de la voiture en calculant la somme au carré de (1) et (2) :

$$(m_1 + m_2)^2 v^2 = m_1^2 v_v^2 + 2m_1(m_2 + m_3)v_v v_m \cos\theta + (m_2 + m_3)^2 v_m^2$$

$$\Rightarrow v = \frac{1}{m_1 + m_2}\sqrt{m_1^2 v_v^2 + 2m_1(m_2 + m_3)v_v v_m \cos\theta + (m_2 + m_3)^2 v_m^2} = 113\,\text{km/h}$$

Ainsi, la différence d'énergie cinétique est :

$$K_f - K_i = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 - \frac{1}{2}m_1 v_v^2 - \frac{1}{2}(m_2 + m_3)v_m^2 \neq 0$$

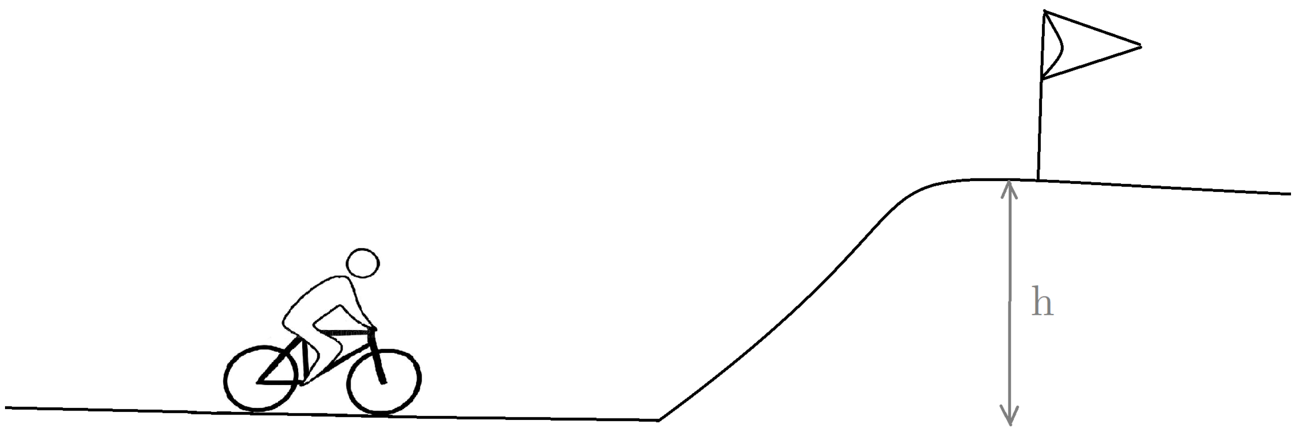
Donc l'énergie cinétique n'est pas conservée et la collision est inélastique.

Question 6 (4 points - BIOL uniquement) A la fin d'une étape du tour du France, un cycliste pédale à une vitesse de 36 km/h. Il voit l'arrivée juste en haut de la colline, dix mètres plus haut. Considérons deux situations :

a) Épuisé, il décide de ne plus pédaler, comptant atteindre le sommet en laissant rouler le vélo. Y arrivera-t-il ? Si oui, quelle sera sa vitesse une fois en haut ? Si non, à quelle hauteur s'arrêtera-t-il ?

b) Dans un dernier effort, il pédale encore durant cinq secondes. Cet élan lui permet d'atteindre le sommet avec une vitesse finale de 8 m/s. Quelle énergie a-t-il dû dépenser pour y arriver ?

c) Quelle puissance a-t-il dû fournir ?



Vous pouvez considérer que l'ensemble cycliste-vélo a une masse de 80kg. Les frottements sont négligés dans cet exercice.

Solution.
Pour cet exercice, il faut utiliser la conservation d'énergie. Au pied de la colline, l'énergie du cycliste est égale à son énergie cinétique et vaut $E_i = K = \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{80}{2}10^2 = 4000J$.

a) Si le cycliste ne pédale plus, le cycliste s'arrêtera lorsque toute son énergie cinétique aura été convertie en énergie potentielle. La conservation d'énergie s'écrit donc :

$$E_i = E_f \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_i^2 = mgh_f \tag{3}$$

Où E_i est l'énergie initiale et E_f est l'énergie finale. De cette équation, on en déduit la hauteur finale, h_f :

$$h_f = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{mg} = \frac{v^2}{2g} = \frac{10^2}{20} = 5m \tag{4}$$

Puisque $h_f < 10m$, le cycliste n'arrivera pas à franchir la colline et s'arrêtera à mi-hauteur :h_f = h/2 = 5m.

b) En pédalant, le cycliste effectue un travail extérieur à prendre en compte dans le bilan d'énergie. Par conservation d'énergie, l'énergie finale vaudra l'énergie initiale du cycliste plus ce travail supplémentaire effectué en pédalant, W_{velo} :

$$E_f = E_i + W_{velo} \Leftrightarrow W_{velo} = E_f - E_i \tag{5}$$

L'énergie finale du cycliste en haute de la colline sera la somme de son énergie potentielle (mgh) et de son énergie cinétique restante $\frac{1}{2}mv_f^2$ où v_f = 8m/s. L'énergie finale totale s'écrit :

$$E_f = mgh + \frac{1}{2}mv_f^2 = 8000 + \frac{80}{2}64 = 10560J \tag{6}$$

En reprenant l'équation 5, on peut en déduire la valeur du travail effectué par le cycliste en pédalant : W_{velo} = 10560 - 4000J = 6560J.

c) Par définition, la puissance est le travail effectué par unité de temps :

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{6560J}{5s} = 1312W \tag{7}$$

Physique 1 – PHYS-F104 (2021-2022)

Examen de juin 2022

16 juin 2022

Nom :

Prénom :

N° de matricule :

Section (entourer) : Biologie — Géographie — Géologie — Pharmacie

---

Consignes générales :

1. Écrivez immédiatement en **CAPITALES** vos prénom, nom, numéro de matricule et section.
2. Vérifiez que votre énoncé comporte bien **10 feuilles** (1 page de garde, 6 questions et 3 brouillons).
3. Ne dégrafez pas les pages.
4. **Ne répondez qu'aux questions qui concernent votre section. Barrez les autres.** Au total, chaque section répond à 5 questions.
5. Vous n'avez droit à rien d'autre que de quoi écrire, votre formulaire (une feuille A4), votre calculatrice et votre carte d'étudiant.
6. Les GSM, tablettes, smartwatches et autres moyens de communication sont interdits. Ils doivent être éteints et rangés dans vos vestes ou sacs, eux-mêmes mis au vestiaire ou devant la salle.
7. Ne répondez pas en rouge, cette couleur étant réservée pour la correction.
8. **Les réponses doivent toutes être clairement justifiées et les unités doivent être indiquées pour les résultats numériques.**
9. En cas de besoin, vous prendrez les valeurs de constantes suivantes :
   accélération gravitationnelle terrestre : $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$
   pression atmosphérique : $P_{\mathrm{atm}} = 1 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$
10. Cet examen dure **2 heures (120 minutes)**.

Bon travail !

/4	/4	/4	/4	/4	/20

Question 1 (4 points - Toutes sections) Soient 2 vecteurs $\vec{A} = 2\ \vec{1}_x - \vec{1}_y$ et $\vec{B} = 3\ \vec{1}_x + 2\ \vec{1}_y$.

a) Exprimez $\vec{C} = \vec{B} - 2\vec{A}$ en fonction des vecteurs de base.

b) Quelle est la valeur du produit scalaire $\vec{A} \cdot \vec{B}$? En déduire l'angle θ entre les deux vecteurs.

c) Quels sont le sens et la direction du produit vectoriel $\vec{A} \times \vec{B}$? Quelle est sa norme ?

Solution.

a) On rappelle que pour l'addition vectorielle, on additionne composante par composante. Ainsi, pour les composantes x et y de C, nous avons $C_x = B_x - 2A_x$ et $C_y = B_y - 2A_y$. Ayant d'après l'énoncé, $A_x = 2$, $A_y = -1$, $B_x = 3$ et $B_y = 2$, nous obtenons $C_x = -1$ et $C_y = 4$, donc $\vec{C} = -\vec{1}_x + 4\ \vec{1}_y$

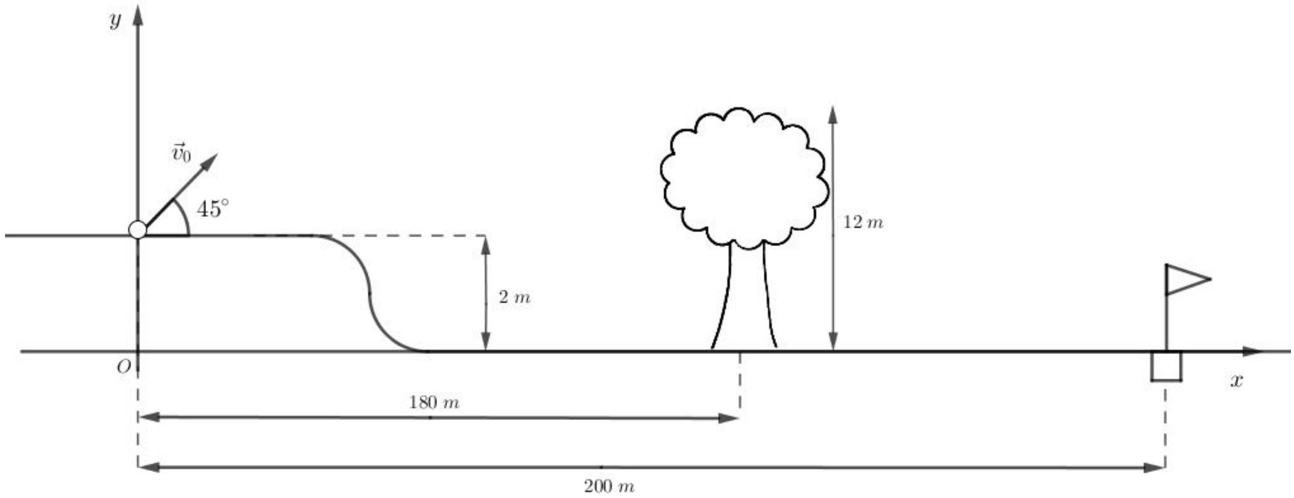
b) Concernant le produit scalaire, nous avons deux formules à notre disposition : une dépendant des composantes des vecteurs $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y$ et une dépendant de la norme des vecteurs et l'angle les séparant $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta$. Ne disposant pas de cette dernière information (c'est d'ailleurs ce que l'on nous demande ensuite), nous allons utiliser la première formule, celle avec les composantes. Nous obtenons alors $\vec{A} \cdot \vec{B} = 4$. Maintenant pour connaitre l'angle, nous allons prendre la seconde formule et calculer au préalable la norme de mes vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$. Pour rappel, la norme d'un vecteur est relié à ces composantes par $|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$. Ici nous avons donc $|\vec{A}| = \sqrt{5}$ et $|\vec{B}| = \sqrt{13}$. En isolant θ dans la formule, nous obtenons

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}\right) = \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{5}\sqrt{13}}\right) = 60°.$$

c) Pour cette question, il faut se rappeler que le vecteur résultant d'un produit vectoriel est toujours perpendiculaire à ceux initiaux. Nous devons donc réfléchir en 3D. En définissant l'axe x comme celui allant vers la droite de cette feuille, l'axe y allant vers le haut, l'aze z sort alors de cette feuille vers vous. Nous pouvons maintenant utiliser la règle de la main droite : pouce sur le premier vecteur du produit (ici $\vec{A}$), index sur le second (ici $\vec{B}$). L'index pointe alors dans la direction et le sens du résultat, ici vers la feuille. D'après notre système d'axe, ceci correspond aux z négatifs.
Ensuite concernant la norme du produit vectoriel, comme nous connaissant déjà celles de $\vec{A}$ et de $\vec{B}$ ainsi que l'angle les séparant grâce au point précédant, nous pouvons utiliser la formule

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}| \sin\theta = \sqrt{5}\sqrt{13} \sin(60°) = 7.$$

Question 2 (4 points - Toutes sections) La figure ci-dessous, pas à l'échelle, schématise un parcours de golf. Le joueur désire envoyer la balle dans le trou situé en contrebas (drapeau). Le terrain de golf est toutefois bordé par un rideau d'arbres d'une hauteur de 12 m. Le joueur frappe sur la balle qui part avec un angle de 45° par rapport à l'horizontale, comme indiqué sur le schéma.



a) Ecrire les équations du mouvement $x(t)$ et $y(t)$ de la position de la balle selon les axes x et y respectivement. En déduire l'équation cartésienne $y(x)$ de la trajectoire de celle-ci.

b) Déterminer la vitesse initiale v_0 que le joueur doit communiquer à la balle s'il désire que celle-ci frôle la cime des arbres.

c) La balle tombe-t-elle alors directement dans le trou (sans rouler) ? Sinon, à quelle distance du drapeau celle-ci touche-t-elle le sol ?

Solution.

a) Nous nous trouvons dans le cas d'une chute libre pour laquelle les équations générales sont :

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0\cos(\theta)t \\ y(t) = y_0 + v_0\sin(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Dans le cadre de cet exercice, ceci devient

$$\begin{cases} x(t) = v_0\cos(45°)t \\ y(t) = 2 + v_0\sin(45°)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Ensuite pour obtenir l'équation de $y(x)$, il suffit d'isoler t dans $x(t)$ afin de l'injecter dans $y(t)$:

$$\begin{cases} t = \frac{x}{v_0\cos(45°)} \\ y(x) = 2 + \tan(45°)x - \frac{g}{2v_0^2\cos(45°)^2}x^2 \end{cases} = \begin{cases} t = \frac{\sqrt{2}x}{v_0} \\ y(x) = 2 + x - \frac{g}{v_0^2}x^2 \end{cases}$$

en se rappelant que $\cos(45°) = 1/\sqrt{2}$.

b) Nous aimerions que la balle frôle la cîme des arbres, c'est-à-dire que le point $y(x = 180\,\text{m}) = 12\,\text{m}$ fasse partie de la trajectoire $y(x)$. Cela n'arrivera que si la vitesse initiale v_0 prend une valeur bien précise. Pour la déterminer, nous allons isoler v_0 dans $y(x)$ et remplacer x et y par 180 m et 12 m :

$$v_0 = \sqrt{\frac{gx^2}{x+2-y}} = 44\,\text{m/s}.$$

c) Pour cette dernière question, nous voulons savoir si la balle atterrit directement dans le trou (*hole in one*). Pour cela nous alons traduire la condition "toucher le sol" en équation. Cela se produit lorsque $y = 0\,\mathrm{m}$. Nous allons introduire cette condition dans $y(x)$ et trouver x qui résoud cette équation car nous connaissons maintenant toutes les autre variables. Cela se traduit par l'équation du second degré en x suivante :

$$2 + x - \frac{g}{v_0^2}x^2 = 0$$

pour laquelle le delta vaut $\Delta = 1 + \frac{8g}{v_0^2}$ qui est positif. Nous avons donc deux solutions à cette équation :

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{\Delta}}{2g/v_0^2} = \frac{v_0^2}{2g}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{8g}{v_0^2}}\right)$$

La solution avec le $-$ donnant un résultat négatif, ce n'est pas celle que nous recherchons. Nous obtenons donc :

$$x = \frac{v_0^2}{2g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{8g}{v_0^2}}\right) = 192\,\mathrm{m}.$$

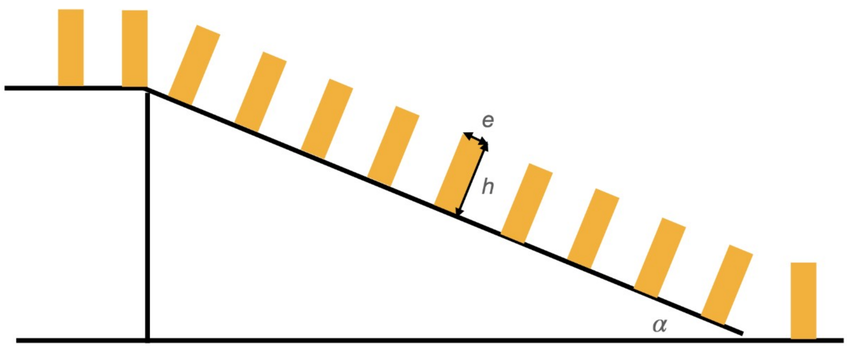
La balle n'atterrit donc pas directement dans le trou mais à $8\,\mathrm{m}$ du drapeau.

Question 3 (4 points - Toutes sections) Vous êtes un.e passionné.e de dominos et vous avez la chance de participer au prochain Domino Challenge. L'objectif est de réaliser un gigantesque parcours comprenant plusieurs milliers de dominos et l'on vous a confié une section de ce parcours. Vous aimeriez réaliser un parcours qui défie les lois de la gravité en plaçant les dominos sur un plan incliné, avec un angle d'inclinaison maximal, comme sur le schéma ci-dessous. Pour ce faire, vous devez vous assurer de deux choses : premièrement, que les dominos puissent tenir sans glisser ; deuxièmement, que les dominos puissent tenir sans basculer.

a) Réalisez le schéma d'un domino sur le plan incliné et représentez les différentes forces en jeu

b) Déterminez l'angle d'inclinaison maximal α_1 pour que le domino ne glisse pas, en fonction du coefficient de frottement statique μ_s.

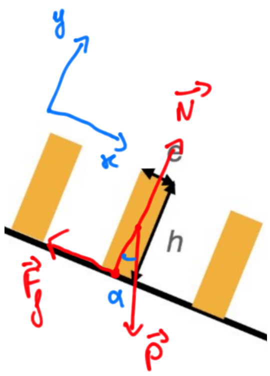
c) Pour le matériau du plan incliné, vous avez le choix entre de l'acier dont le coefficient de frottement statique maximal vaut $0,1$ ou du bois dont le coefficient vaut $0,58$. Lequel choisissez-vous pour que l'angle d'inclinaison soit maximal, et quel est l'angle α_1 avant glissement ?



Solution.

a) Il y a trois forces qui entrent en jeu dans cette situation : le poids du domino $\vec{P}$ qui est dirigé vers le bas, la réaction normale du sol $\vec{N}$ qui est dirigée perpendiculairement à celui-ci vers le haut et la force de frottement $\vec{F_f}$ qui s'oppose au glissement du domino vers le bas de la pente et qui est dirigée parallèlement au sol vers le haut.

Nous choisissons comme système d'axes, l'axe x parallèle au sol vers le bas et l'axe y perpendiculaire au sol vers le haut. Ainsi, seul un vecteur, le poids, nécite d'être projeté. Les deux autres sont déjà totalement dirigés selon x ou y.



b) Maintenant que nous avons représenté toutes les forces, nous allons pouvoir déterminer les conditions d'équilibre. Si le domino ne glisse pas, c'est que la somme des forces extérieures est nulle (1ère loi de Newton) :

$$\sum \vec{F} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_f = \vec{0}.$$

Nous allons ensuite projeter cette équation sur les axes x et y :

$$\begin{cases} mg\sin\alpha - F_f = 0; \\ N - mg\cos\alpha = 0. \end{cases}$$

N'oublions pas que nous cherchons l'angle maximal α_1. Dans ce cas-là, la force de frottement est maximale. En effet si l'angle était supérieur à α_1 alors le domino glisserait, ce qui indiquerait que les frottements ne sont plus suffisantes pour maintenir le domino immobile. Dans cette situation, nos équations deviennent :

$$\begin{cases} mg\sin\alpha_1 - F_{f,\text{max}} = 0; \\ N - mg\cos\alpha_1 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

La valeur de la force de frottement maximale est proportionnelle à la réaction normale de la surface avec comme coefficient de proportionnalité μ_s, le coefficient de frottement statique : $F_{f,\text{max}} = \mu_s N$. Ainsi, le coefficient μ_s est égale au rapport entre $F_{f,\text{max}}$ et N que nous pouvons isoler chacun via (1) :

$$\mu_s = \frac{F_{f,\text{max}}}{N} = \frac{mg\sin\alpha_1}{mg\cos\alpha_1} = \tan\alpha_1$$

Ceci est notre condition d'équilibre. Tant que la tangente de l'angle α reste inférieure à μ_s, le domino ne glissera pas.

c) En utilisant le résultat du point précédent, pour avoir l'angle α_1 le plus grand, il faut avoir le coefficient μ_s le plus grand car pour un angle compris entre 0° et 90° (ce qui est notre cas ici), plus un angle est grand, plus sa tangente le sera. Il nous faut donc utiliser du bois qui possède un coefficient de frottement statique valant 0.58 pour obtenir un angle α_1 valant 30°.

Question 4 (4 points - Toutes sections) Une façon de produire de l'énergie renouvelable est d'utiliser des centrales hydroélectriques. Celles-ci produisent de l'électricité en faisant passer de l'eau dans des turbines. La puissance générée par ces turbines peut se calculer en modifiant l'équation de Bernoulli :

$$\rho_{eau} g h_B + \frac{1}{2}\rho_{eau} v_B^2 + p_B = \rho_{eau} g h_C + \frac{1}{2}\rho_{eau} v_C^2 + p_C + \frac{T}{D}, \tag{2}$$

où T dénote la puissance de la turbine, D est une quantité physique. Les indices B et C se réfèrent à l'entrée et la sortie de la turbine (voir schéma).

a) Trouvez les unités de la quantité physique D dans le système international.

Supposez que vous ayez une situation donnée par le schéma ci-dessous, où aux points A et C l'eau est à l'air libre, $\rho_{eau} = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$, et la pression au point B vaut $p_B = 2 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$.

b) Calculez la vitesse d'écoulement de l'eau au point B, en supposant que la vitesse de l'eau au point A est nulle et la différence de hauteur entre A et B est de 30 mètres.

c) Si la valeur numérique de la quantité D vaut $D = 20$, et en négligeant la vitesse de l'eau au point C, quelle est la puissance fournie par la turbine ?

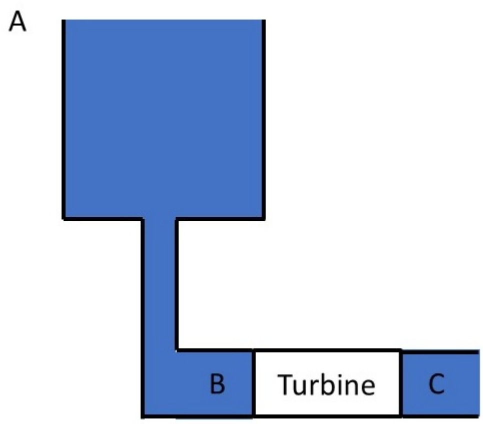


Fig. 1 – Schéma de la turbine.

Solution.

a) On veut trouver les unités de la quantité physique D en terme de (kg, m, s). Pour cela on prend l'équation de Bernouilli modifiée :

$$\rho_{eau} g h_B + \frac{1}{2}\rho_{eau} v_B^2 + p_B = \rho_{eau} g h_C + \frac{1}{2}\rho_{eau} v_C^2 + p_C + \frac{T}{D}.$$

Chaque terme dans cette équation doit avoir les mêmes unités en (kg, m, s), et donc :

$$\left[\frac{T}{D}\right] = [\rho_{eau} g h_B] = [\frac{1}{2}\rho_{eau} v_B^2] = [p_B] = \cdots .$$

Pour trouver les unités de D on doit donc calculer les unités d'un des terme qui entre dans l'équation de Bernouilli. Prenons par exemple le terme $\rho_{eau} g h_B$:

$$[\rho_{eau} g h_B] = [\rho_{eau}] \cdot [g] \cdot [h_B] = \mathrm{kg/m^3} \cdot \mathrm{m/s^2} \cdot \mathrm{m} = \mathrm{kg\,s^2/m}.$$

On a donc que

$$\left[\frac{T}{D}\right] = \mathrm{kg\,s^2/m} \implies [T] \cdot \mathrm{m\,s^2/kg} = [D]. \tag{3}$$

Pour arriver à la solution finale il nous reste plus qu'à calculer les unités de T.

$$[T] = \mathrm{W} = \mathrm{J/s} = \mathrm{N\,m/s} = \mathrm{kg\,m/s^2} \cdot \mathrm{m/s} = \mathrm{kg\,m^2/s^3},$$

avec W = Watt, J = Joule et N = Newton. Si maintenant on utilise ceci dans l'équation (3) on obtient

$$[D] = [T] \cdot \mathrm{m\,s^2/kg} = \mathrm{kg\,m^2/s^3} \cdot \mathrm{m\,s^2/kg} = \mathrm{m^3/s}.$$

Ce sont les unités d'un débit.

b) Pour calculer la vitesse d'écoulement de l'eau au point B on va utiliser l'équation de Bernouilli standard entre le point A et B :

$$\rho_{eau} g h_A + \frac{1}{2}\rho_{eau} v_A^2 + p_A = \rho_{eau} g h_B + \frac{1}{2}\rho_{eau} v_B^2 + p_B.$$

Dans l'énoncé il est dit que le point A est à l'air libre, ce qui implique que la pression au point A, dénoté par p_A, est égale à la pression atmosphérique. On a donc que $p_A = 1 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$. Il est aussi marqué que "la différence de hauteur entre A et B est de 30 mètres", ce qui implique que $h_A = 30\,\mathrm{m}$ et que $h_B = 0\,\mathrm{m}$, et que " que la vitesse de l'eau au point A est nulle", donc $v_A = 0\,\mathrm{m/s}$.
Si maintenant on met tous ça dans l'équation ci-dessus, on trouve

$$\begin{aligned}
&\rho_{eau} g h_A + p_A = \frac{1}{2}\rho_{eau} v_B^2 + p_B \\
&\Longrightarrow \frac{1}{2}\rho_{eau} v_B^2 = \rho_{eau} g h_A + p_A - p_B \\
&\Longrightarrow v_B = \sqrt{2\frac{\rho_{eau} g h_A + p_A - p_B}{\rho_{eau}}} = 20\,\mathrm{m/s}.
\end{aligned} \tag{4}$$

c) Pour résoudre le dernière exercice, on utilise l'équation de Bernouilli modifiée donnée dans l'énoncé :

$$\rho_{eau} g h_B + \frac{1}{2}\rho_{eau} v_B^2 + p_B = \rho_{eau} g h_C + \frac{1}{2}\rho_{eau} v_C^2 + p_C + \frac{T}{D}. \tag{5}$$

Vu que les points B et C se trouvent à la même hauteur, on a que $h_B = h_C = 0$ m. Le point C est aussi à l'air libre donc a $p_C = 1 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$, et on peut négliger la vitesse de l'eau au point C, donc $v_C = 0\,\mathrm{m/s}$.
Avec ces données, on trouve que la puissance T est égale à :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\rho_{eau} v_B^2 + p_B = p_C + \frac{T}{D} \\
&\Longrightarrow \frac{T}{D} = \frac{1}{2}\rho_{eau} v_B^2 + p_B - p_C \\
&\Longrightarrow T = D\left(\frac{1}{2}\rho_{eau} v_B^2 + p_B - p_C\right) = 6 \times 10^6\,\mathrm{W}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Question 5 (4 points - Toutes sections sauf BIOL) A la plaine de jeu, Alice et Bob décident d'aller jouer sur un tourniquet (assimilable à une plaque circulaire libre de tourner autour de son axe central).
Alice se positionne sur le tourniquet (donc sur la plaque circulaire) à une distance $d_A = 1\,\mathrm{m}$ du centre et Bob à une distance $d_B = 1{,}2\,\mathrm{m}$. Ils décident de faire le tour du tourniquet en marchant sur celui-ci à la même vitesse ($2\,\mathrm{m/s}$) mais de sens opposés.
A peine ont-ils entamé leur marche que le tourniquet, initialement au repos, se met à tourner.

a) Quels sont les vitesses angulaires de Alice et Bob ? (Considérez qu'ils effectuent un MCU autour de l'axe du tourniquet)

b) Quelle sera la vitesse angulaire finale du tourniquet ?

Le moment d'inertie de Alice est égal à celui de Bob et vaut $20\,\mathrm{kg\,m^2}$. Celui du tourniquet est de $10{,}8\,\mathrm{kg\,m^2}$.

Solution.

a) Pour un MCU, la vitesse angulaire est donnée par $\omega = v_t/d$ où v_t est la vitesse tangentielle et d est la distance à l'axe de rotation. On obtient donc pour Alice et Bob :

$$\omega_A = \frac{2\,\mathrm{m/s}}{1\,\mathrm{m}} = 2\,\mathrm{rad/s} \qquad \omega_B = \frac{2\,\mathrm{m/s}}{1{,}2\,\mathrm{m}} = 1{,}67\,\mathrm{rad/s} \tag{7}$$

b) En l'absence de couple extérieur, on peut utiliser le principe de conservation du moment cinétique. Puisque initialement le tourniquet était à l'arrêt, nous avons que le moment cinétique total est nul :

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f = \vec{L}_A + \vec{L}_B + \vec{L}_t = 0 \tag{8}$$

Le moment cinétique final tient compte la contribution de Alice, Bob et du tourniquet. Ceux-ci étant tous alignés, on peut réécrire l'équation :

$$I_t\omega_t - I\omega_A + I\omega_B = 0 \tag{9}$$

où le $-$ tient compte du fait que le mouvement d'Alice est opposé à celui de Bob. On peut isoler la vitesse angulaire ω_t :

$$\omega_t = \frac{I\omega_A - I\omega_B}{I_t} = \frac{1.2 \times 2 - 20 \times 1.67}{10.8}\mathrm{rad/s} = 0{,}037\,\mathrm{rad/s} \tag{10}$$

Le tourniquet se met donc en mouvement à une vitesse angulaire de $0{,}037\,\mathrm{rad/s}$ dans le sens du mouvement de Bob.

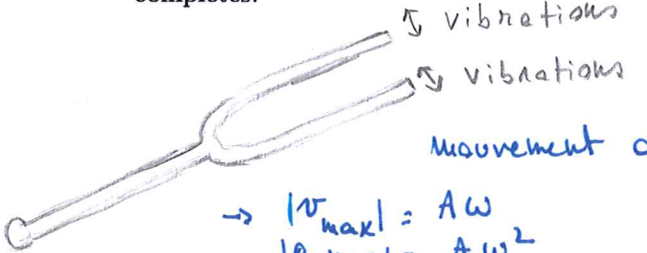
Question 6 (4 points - BIOL uniquement) Un diapason, un instrument de musique de référence composé de deux branches vibrantes, vibre à la fréquence du La, soit à la fréquence $\nu = 440\,\text{Hz}$. On mesure sur une photographie l'amplitude du mouvement de l'extrémité des branches du diapason : A = 0,5 mm.

a) Quelle est la vitesse maximale de l'extrémité du diapason ?

b) Quelle est l'accélération maximale de ce point ?

c) Représentez en graphique la position de l'extrémité d'une branche du diapason en fonction du temps, en supposant que la position au temps $t = 0$ vaut A. Dessinez au minimum deux périodes complètes.

d) Représentez en graphique la vitesse en fonction du temps. Dessinez au minimum deux périodes complètes.



fréquence $\nu = 440\ \text{Hz}$ $\qquad T = \frac{1}{\nu}$

Amplitude $A = 0.5\ \text{mm}$

mouvement oscillant : $x(t) = A\cos(\omega t)$

$v(t) = -A\omega\sin(\omega t) = \frac{dx}{dt}$

$a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t) = \frac{dv}{dt}$

$\rightarrow |v_{max}| = A\omega$

$|a_{max}| = A\omega^2$

$\omega = 2\pi\nu = 2764,6\ \text{rad s}^{-1}$

a) $v_{max} = A.\omega = 0.0005\ \text{m} * 2764,6\ \text{rad s}^{-1}$

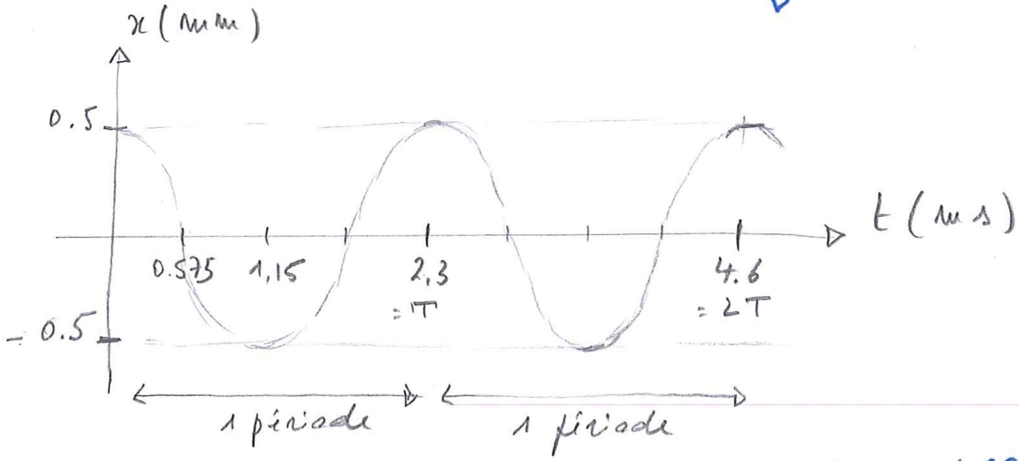
$\rightarrow \boxed{v_{max} = 1,38\ \text{m/s}}$

b) $a_{max} = A.\omega^2 = 0.0005\ \text{m} * (2764,6\ \text{rad s}^{-1})^2$

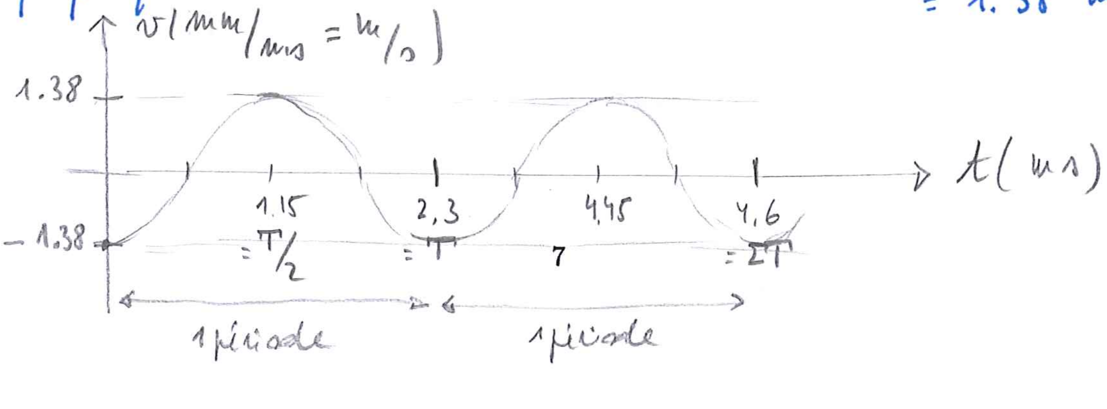
$\rightarrow \boxed{a_{max} = 3815\ \text{m/s}^2}$

c) graphique $x(t) = A\cos\omega t$ $\qquad A = 0.5\ \text{mm} \quad \omega = 2764,6\ \text{rad s}^{-1}$

$T = \frac{1}{\nu} = 0.00231 = 2,3\ \text{ms}$



d) graphique $v(t) = -A\omega\sin(\omega t)$ $\qquad A\omega = 1,38\ \text{m/s} = 1.38\ \text{mm/ms}$



Physique 1 – PHYS-F104 (2021-2022)

Examen de juin 2022

Deuxième partie

16 juin 2022

Nom :

Prénom :

N° de matricule :

Section (entourer) : Géographie — Géologie — Pharmacie

Consignes générales :

1. Écrivez immédiatement en **lettres CAPITALES** vos prénom, nom, numéro de matricule et section.
2. Vérifiez que votre énoncé comporte bien **7 feuilles** (4 questions + 2 brouillons).
3. Ne dégrafez pas les pages.
4. Les réponses à chaque question doivent être placées sur les faces recto/verso de l’énoncé, n’écrivez pas de réponse sur les brouillons. Les feuilles de brouillon ne seront pas corrigées.
5. Vous n’avez droit à rien d’autre que de quoi écrire, votre formulaire, votre calculatrice et votre carte d’étudiant.
6. Les GSM, tablettes, smartwatches et autres moyens de communication sont interdits. Ils doivent être éteints et rangés dans les sacs le long du mur. En aucun cas vous ne pouvez avoir un GSM (ou autre moyen de communication) à portée de main, même éteint.
7. Ne répondez pas en rouge, cette couleur étant réservée pour la correction.
8. **Les réponses doivent toutes être clairement justifiées et les unités doivent être indiquées pour les résultats numériques.**
9. Cette partie dure 2 heures (120 minutes).

Bon travail !

/5	/5	/5	/5		/20

Question 1 (5 points) La puissance émise par une enceinte sphérique est de P = 1,5 mW. Si la puissance est émise dans toutes les directions uniformément, déterminer :

a) Le niveau d'intensité à 6 m d'une enceinte.
b) Le niveau d'intensité à une distance de 6 m de deux enceintes (placées l'une à côté de l'autre) : une enceinte émet une puissance de P et l'autre une puissance de 2P.

(Intensité de référence $I_O = 10^{-12}$ W/m^2)

a) $I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{1{,}5x10^{-3}}{4\pi 6^2} = 3{,}32x10^{-6}\ W/m^2$

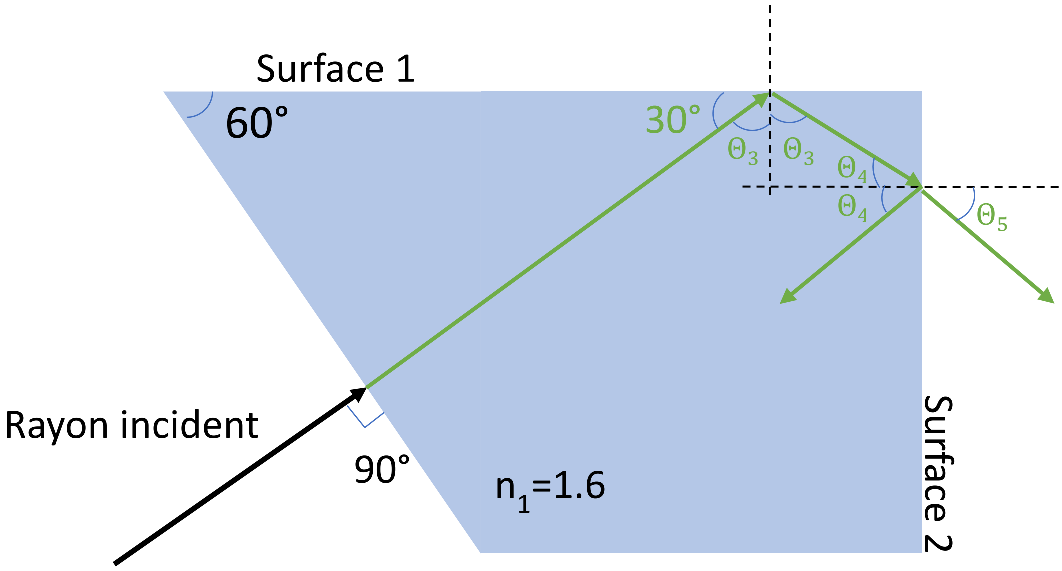
$$\beta = 10log\frac{I}{I_0} = 10log\frac{3{,}32x10^{-6}}{10^{-12}} = 65{,}2\ dB$$

b) $I_{tot} = I_1 + I_2 = 3I_1$

$$\beta = 10log\frac{I_{tot}}{I_0} = 10log\frac{3I_1}{I_0} = 10log3 + \ 10log\frac{I_1}{I_0} = 70\ dB$$

Question 2 (5 points) Considérer un objet d'indice de réfraction n_1=1,6 (voir figure). L'objet est plongé dans l'eau (n=1,333). Un rayon incident arrive sur la surface oblique de l'objet à 90° (normale à la surface). L'angle formé par le coté oblique et la surface 1 est de 60°. Déterminer :

a) Le pourcentage de la lumière réfléchie.
b) L'angle du rayon réfracté à la surface 2 (après réflexion sur la surface 1). Indiquez sur le schéma les rayons et les angles réfléchis et réfractés sur ces deux surfaces.
c) Déterminer l'angle d'incidence du rayon sur la surface 2 pour avoir le phénomène de réflexion totale sur cette surface.



a) $\frac{I_r}{I} = \left(\frac{n_1 - n_0}{n_1 + n_0}\right)^2 = \left(\frac{1{,}6-1{,}33}{1{,}6+1{,}33}\right)^2 = 0.008$ 0,8%

b) L'angle d'incidence du rayon incident est de 0° (mesuré par rapport à la normale), donc le rayon n'est pas dévié.

Ce rayon transmis rencontre ensuite la surface 1, avec un angle d'incidence $\Theta_3 = 90 - 30 = 60°$. Cet angle est supérieur à l'angle limite de réflexion totale pour cette surface, il n'y a donc pas de réfraction, et tout le rayon est réfléchi vers la surface 2 en partant avec le même angle Θ_3. Il arrive sur la surface 2 avec l'angle d'incidence $\Theta_4 = 90 - \Theta_3 = 30°$

Surface 2 $n_1 \sin\Theta_4 = n \sin\Theta_5$ $1{,}6\ \sin 30° = 1{,}33 \sin\Theta_5$

$\sin\Theta_5 = \frac{1{,}6}{1{,}33}\sin 30° = 0{,}601$ $\Theta_5 = 36{,}9°$

c) $\sin \Theta_c = \frac{1,33}{1,6}$ $\Theta_c = 56,2°$

Question 3 (5 points) Considérer deux fentes séparées par une distance d et illuminées par une source lumineuse de longueur d'onde λ = 400 nm. Un écran se trouve à une distance L des fentes de l'autre côté de la source. Déterminer :

a) La distance d de séparation entre les fentes si l'angle correspondant à la frange brillante m = 2 est de 20°.
b) L'angle correspondant à la frange sombre m = 1.
c) La distance L entre les fentes et l'écran si la distance entre la frange sombre m=4 et la frange brillante m=3 est de 0,2 m.

a) $\sin\theta = m\frac{\lambda}{d}$ $d = \frac{2x400x10^{-9}}{\sin 20°} = 2,34x10^{-6}\ m$

b) $\sin\theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{d} = 1,5\ \frac{400x10^{-9}}{2,34x10^{-6}} = 0,256$ $\theta = 14,8°$

c) $y_{sombre,m=4} = \frac{9x400x10^{-9}}{2}\ \frac{L}{2,34x10^{-6}}$ car $\left(4 + \frac{1}{2}\right) = \frac{9}{2}$

$y_{lumineuse,m=3} = \frac{3x400x10^{-9}}{2,34x10^{-6}}\ L$

$$y_4 - y_3 = \frac{9x400x10^{-9}}{2}\ \frac{L}{2,34x10^{-6}} - \frac{3x400x10^{-9}}{2,34x10^{-6}}\ L$$

$$y_4 - y_3 = 0,2\ m \qquad L = 0,79\ m$$

Question 4 (5 points) Considérer une lentille mince et un objet situé à s = +15 cm de la lentille. Le facteur d'agrandissement linéaire (magnification) de la lentille est de m = –0,2 et l'indice de réfraction de la lentille est de n = 1,6.

a) Calculer la position (distance de la lentille) de l'image.
b) Déterminer la distance focale de la lentille.
c) La lentille est-elle convergente ou divergente ?
d) Déterminer les rayons de courbure de la lentille (on suppose que la lentille est symétrique).

a) $m = -\frac{s'}{s}$ $\qquad s' = -ms = -(-0{,}2)x15 = 3\ cm$

b) $\frac{1}{f} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{15} + \frac{1}{3} = 2{,}5\ cm$

c) Lentille convergente (f>0)

d) $\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = (n-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\right) = (n-1)\left(\frac{2}{r}\right)$

$$\frac{1}{2{,}5} = (1{,}6-1)\frac{2}{r} \qquad r = 0{,}6x2x2{,}5 = 3\ cm$$

Math-F112 / 10 crédits

En géo, on ne voit que le module T qui s'étalera aussi du Q1 à la moitié du Q2. Comme en physique, les bases sont d'abord revues au début de l'année puis la matière se complique petit à petit par la suite.
Vu les slides très claires et complètes, les cours théoriques ne sont pas indispensables je trouve. Comme séances d'exercices, tu auras les ex-cathedras et les séminaires (tp). Aux ex-cathedras, c'est une assistante de math qui résout les exercices dans un auditoire. Entre chaque exercice, elle te laisse (vraiment un peu) le temps de réfléchir/résoudre l'exercice en question. Puis il y a les séminaires semblables à ceux de chimie et physique. Tu résous les exercices et tu peux demander de l'aide aux assistant.e.s qui sont là donc let's gooo :)
Le test facultatif de novembre est un QCM. Les questions se ressemblent assez bien d'année en année donc n'hésite pas à driller tes skills grâce aux anciens exams!
Comme en physique, l'exam de janvier compte pour 2/3 de la note finale contre 1/3 en juin. Essaie de bien réussir la partie de janvier (plus accessible) pour être plus chill en juin :) En fonction des profs, tu auras ou non de la théorie à ton examen. La théorie, c'est les démonstrations et les théorèmes… Bref, t'as compris, du fun ! Donc si ton.ta prof demande de la théorie à l'examen, bloque tout dans ta tête pour pouvoir gratter un maximum de points rien qu'avec du par coeur !

Correction

Faculté des Sciences

Examen de Mathématiques — Math-F-112

(Titulaires : D. Leemans, C. Azizieh, S. Rexhep)

3 Novembre 2017

Sections: BIOL1, CHIM1, GEOG1, GEOL1, INFO1, IRBI1, SCIE1

Consignes :

- Indiquez votre nom, prénom et matricule aux endroits indiqués et sur chaque feuille que vous rendez.
- Répondez aux questions à choix multiple en noircissant la case appropriée.

Votre NOM et Prénom :

Votre section :

Votre matricule, à noircir :

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Les questions qui suivent sont à choix multiple, répondez-y en cochant la case appropriée.

Question 1 Parmi les fonctions suivantes quelle est celle qui n'est ni paire ni impaire.

- ☐ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^2 + 1$
- ☐ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x$
- ☐ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \sin(x)$
- ☐ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^3 + x$
- ■ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to 2 - x$
- ☐ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^2 + 2$

Question 2 Le produit $(1, 1, 5) \times (2, 1, 0)$ vaut

- ☐ $(2, 10, -1)$
- ■ $(-5, 10, -1)$
- ☐ $(4, 3, 2)$
- ☐ $(4, 2, 7)$
- ☐ $(1, 5, 10)$
- ☐ $(3, 3, -3)$

Question 3 L'ensemble des solutions de l'équation suivante est ...

$$\sin^2(x) + 2\sin(x) + 1 = 0$$

- ☐ $\{\pi/4 + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$
- ■ $\{3\pi/2 + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$
- ☐ $\{2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$
- ☐ $\{\pi/2 + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$
- ☐ $\{\pi/4 + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$
- ☐ $\{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$

Question 4 Le point symétrique au point $(1, 0)$ par rapport à la droite d'equation $y = 2 - x$ est le point de coordonnées

- ■ $(2, 1)$
- ☐ $(3, -1)$
- ☐ $(3, -4)$
- ☐ $(-1, 1)$
- ☐ $(0, 0)$
- ☐ $(-2, 1)$

Question 5 Si x est tel que $log_x 7 = 1/3$, x vaut

- ■ 343
- ☐ 1/343
- ☐ 49
- ☐ 1/7
- ☐ 7
- ☐ 1/49

Question 6 Combien de mots de 4 lettres peut-on former avec les lettres XYZTUV sans utiliser deux fois la même lettre ?

- ■ 360
- ☐ 240
- ☐ 180
- ☐ 45
- ☐ 720
- ☐ 28

Question 7 Lesquelles des argumentations suivantes sont correctes ?

- ☐ Quand il pleut je prend mon parapluie. J'ai pris mon parapluie aujourd'hui. Donc il pleut aujourd'hui.
- ■ Tous les rubis sont rouges, et toutes les émeraudes vertes. Une pierre précieuse bleue n'est donc ni un rubis, ni une émeraude.
- ☐ Tout étudiant étudie durant le week-end. Jacques travaille le vendredi. Jacques n'est donc pas étudiant.
- ☐ Aucun étudiant ne possède une voiture. Donc aucun conducteur n'est étudiant.
- ☐ Tout étudiant a le droit de vote. Hélène n'a pas voté, Elle n'est donc pas une étudiante.

Question 8 L'équation du plan de $\mathbb{R}^3$ passant par $a = (1, 4, 2)$ et perpendiculaire à la droite passant par les points $b = (1, 2, -1)$ et $c = (1, 1, 1)$ est

- ☐ $x + 2y + z = 16$
- ☐ $z = 5$
- ☐ $y - 2z = 6$
- ☐ $x + y + z = 12$
- ☐ $x + z = 8$
- ■ $y = 2z$

Question 9 Le sinus de l'angle $-7\pi/6$ vaut

- ☐ $\sqrt{3}/2$
- ☐ $-\sqrt{3}/2$
- ☐ $-1/2$
- ☐ $-\sqrt{2}/2$
- ■ $1/2$
- ☐ $\sqrt{2}/2$

Question 10 Pour quelle(s) valeur(s) de λ, la droite de R^3 d'équation

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-4}{\lambda}$$

est-elle parallèle au plan d'équation $x + y + z = 0$.

- ■ -5
- ☐ -2
- ☐ 0
- ☐ 5
- ☐ -4
- ☐ 3

MATH-F-112 – MATHÉMATIQUES

L'examen comprend 5 questions valant chacune 10 points.

Toutes vos réponses doivent être **soigneusement justifiées**.

Vous pouvez utiliser UNIQUEMENT de quoi écrire.

Répondez à chaque question sur la page correspondante.

Inscrivez vos nom, prénom, matricule ci-dessous ET sur chaque feuille de réponse.

NOM, PRENOM:

MATRICULE:

SECTION:

Question 1		/10
Question 2		/10
Question 3		/10
Question 4		/10
Question 5		/10
Total		/50

1. (10 points) Prouver l'égalité

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Testons d'abord cette égalité pour $n = 0$. Elle donne $0 = 0$.

Supposons ensuite que l'égalité est vérifiée pour n et montrons qu'alors elle est aussi vérifiée pour $n+1$.

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i=0}^{n+1} i^2 &= (n+1)^2 + \textstyle\sum_{i=0}^{n} i^2 \\
&= (n+1)^2 + \tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= (n+1)\tfrac{6(n+1)+n(2n+1)}{6} \\
&= (n+1)\tfrac{6(n+1)+2n^2+n}{6} \\
&= (n+1)\tfrac{2n^2+7n+6}{6} \\
&= (n+1)\tfrac{(2n+3)(n+2)}{6} \\
&= \tfrac{(2(n+1)+1)(n+1)((n+1)+1)}{6}
\end{aligned}$$

2. (10 points) Démontrer que la droite d'équation $2x + y + 3 = 0$ coupe le segment limité par les points $a = (-5, 1)$ et $b = (3, 7)$.

   Le point de coordonnées $(-5, 7)$ est sur la droite. Il est au dessus du point a. Le point de coordonnées $(3, -9)$ est aussi sur la droite. Il est en-dessous de b. La droite doit donc nécessairement couper le segment limité par les points a et b.

3. (10 points) Considérons la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \lceil x \rceil - \sqrt{x}.$$

(a) Déterminer en quels points de $\mathbb{R}$ cette fonction est continue.

(b) Etudier la croissance de cette fonction.

(a) Il faut d'abord noter que pour que cette fonction soit définie, il faut que x soit un nombre positif à cause de la racine carrée. Pour tout réel non entier, la fonction f est une différence de fonctions continues, et donc elle est continue. Pour les entiers positifs, la fonction est clairement discontinue car la limite à gauche et la limite à droite diffèrent de 1. La réponse est donc l'ensemble des réels positifs non entiers.

(b) La dérivée ne peut être calculée que pour les points où la fonction est continue. En ces points, le plafond est une constante et donc sa dérivée vaut 0. La dérivée de f est donc $-\frac{1}{2\sqrt{x}}$ et la fonction est donc toujours décroissante sur les réels non entiers.

4. (10 points) Calculer en utilisant le développement de Taylor de $y = \sin x$ au voisinage de $x = \pi/6$ une valeur approchée de $\sin 32^o$ (se limiter au terme du second degré).

   L'angle $\pi/6$ est un angle de 30 degrés. $32^o - 30^o = 2^o$. Comme π correspond à 180^o, 2^o correspond à $\pi/90$.

   Le développement de Taylor du 2ème degré de $\sin x$ au voisinage de $\pi/6$ vaut donc

$$\sin(\pi/6) + \cos(\pi/6)(\pi/90) - \sin(\pi/6)(\pi/90)^2/2$$

5. (10 points) Calculer

$$\int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{4x}{1+x^2} dx.$$

On pose $t = 1 + x^2$ et donc $dt = 2xdx$. On remplace dans l'intégrale en recalculant les bornes. Quand $x = 0$, $t = 1$ et quand $x = \sqrt{e-1}$, $t = 1 + e - 1 = e$. L'intégrale devient

$$\int_1^e \frac{2}{t} dt = [2 \ln |t|]_1^e = 2 \ln e - 2 \ln 1 = 2.$$

Correction

Faculté des Sciences

Examen de Mathématiques — Math-F-112

(Titulaires : B. Premoselli, J. de Saedeleer, C. Lecoutre)

31 Octobre 2018

Sections: BIOL1, CHIM1, GEOG1, GEOL1, INFO1, IRBI1, SCIE1

Votre matricule, à noircir :

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Consignes :

- Indiquez votre nom, prénom et matricule aux endroits indiqués et sur chaque feuille que vous rendez.
- Répondez aux questions à choix multiple en noircissant la case appropriée.

Votre NOM et Prénom :

Votre section :

Les questions qui suivent sont à choix multiple, répondez-y en cochant la case appropriée.

Question 1 Que vaut $\sin(\frac{\pi}{6} + x)$?

- ■ $\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$
- ☐ $-\sin x$
- ☐ $\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$
- ☐ $\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$
- ☐ $\cos x$
- ☐ $\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$

Question 2 Parmi les fonctions suivantes, quelle est celle qui n'est pas surjective ?

- ☐ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, x \mapsto x^2$
- ☐ $f : \mathbb{R} \to [-1, 1], x \mapsto \sin x$
- ☐ $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, x \mapsto \sqrt[3]{x}$
- ☐ $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, x \mapsto x^2$
- ☐ $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, x \mapsto \sqrt{x}$
- ■ $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$

Question 3 Dans le plan, le point symétrique au point $(1, 0)$ par rapport à la droite d'équation $y = 3 - x$ est le point de coordonnées

- ■ $(3, 2)$
- ☐ $(0, 0)$
- ☐ $(3, -4)$
- ☐ $(-3, 2)$
- ☐ $(-1, 1)$
- ☐ $(2, 1)$

Question 4 Le produit vectoriel $(-2, 1, 0) \times (3, 1, 4)$ vaut

- ☐ $(3, 3, -3)$
- ☐ $(4, 3, 2)$
- ☐ $(2, 10, -1)$
- ■ $(4, 8, -5)$
- ☐ $(4, 2, 7)$
- ☐ $(1, 5, 10)$

Question 5 L'équation $x^2 - 6x + y^2 - 8y = 0$ est celle d'un cercle

- ■ de centre $(3, 4)$ et de rayon 5
- ☐ de centre $(0, 0)$ et de rayon 5
- ☐ de centre $(4, 5)$ et de rayon 3
- ☐ de centre $(0, 0)$ et de rayon 2
- ☐ de centre $(1, 2)$ et de rayon 7
- ☐ de centre $(4, 3)$ et de rayon 5

Question 6 Parmi les fonctions suivantes quelle est celle qui n'est ni paire ni impaire ?

- ☐ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^2 + 2$
- ■ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^2 - x$
- ☐ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^2 + 1$
- ☐ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \cos(x)$
- ☐ $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R} : x \to 1/x$
- ☐ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^3 + 3x$

Question 7 Laquelle des argumentations suivantes est correcte ?

- ☐ Quand il pleut je prends mon parapluie. J'ai pris mon parapluie aujourd'hui. Donc il pleut aujourd'hui.
- ☐ Tout homme est mortel. Socrate est mortel. Donc Socrate est un homme.
- ☐ Tout étudiant étudie durant le week-end. Jacques travaille le vendredi. Jacques n'est donc pas étudiant.
- ☐ Tous les rubis sont rouges, et toutes les émeraudes vertes. Une pierre précieuse verte ou rouge est donc un rubis ou une émeraude.
- ■ Toute étudiante a le droit de vote. Hélène est étudiante. Elle a donc le droit de vote.

Question 8 Combien de tas de 5 lettres peut-on former avec les lettres XYZTUVW sans utiliser deux fois la même lettre ?

- ☐ 240
- ☐ 15
- ■ 21
- ☐ 2520
- ☐ 360
- ☐ 720

Question 9 Le cosinus de l'angle $-7\pi/6$ vaut

- ☐ $1/\sqrt{3}$
- ■ $-1/\sqrt{3}$
- ☐ $-1/2$
- ☐ $-\sqrt{3}/2$
- ☐ $1/2$
- ☐ $\sqrt{3}/2$

Question 10 Quelle est l'équation du plan de $\mathbb{R}^3$ passant par $a = (1,1,1)$ et perpendiculaire à la droite passant par les points $b = (1,2,-1)$ et $c = (-1,-1,3)$?

- ☐ $z = 5$
- ☐ $x + z = 8$
- ☐ $x + y + z = 12$
- ☐ $x + 2y + z = 16$
- ■ $-2x - 3y + 4z + 1 = 0$
- ☐ $y - 2z = 6$

Module S – Examen blanc 2018

1) On considère le champ de vecteurs f défini sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3: (x, y, z) \mapsto (z^2, xyz, y)$$

   a) Calculer la divergence et le rotationnel de ce champ en un point (x, y, z)quelconque de $\mathbb{R}^3$;
   b) Calculer le flux de ce champ de vecteur à travers la sphère de rayon 1 centrée en l'origine (0,0,0) , orientée vers l'extérieur :

$$\oiint_S f.dS$$

   (Aide : utiliser le théorème de la divergence).

2) On considère la suite (x_n) définie par :

$$x_n = \frac{\ln(n^n)}{n!} \; pour \; n \geq 1$$

   a) Calculer la limite de cette suite : $\lim_{n\to\infty} x_n$
   b) On considère maintenant la série correspondante :

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

   Cette série est-elle convergente ? convergente absolument ?

3) On considère l'application linéaire suivante de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ (aussi appelé opérateur linéaire sur $\mathbb{R}^3$) :

$$L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3: (x, y, z) \mapsto (3x, 2y + z, x - z)$$

   a) Quelle est la matrice de L dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$?
   b) Les vecteurs (3,0,1), (0,2,0) et (0,1,-1) sont-ils linéairement indépendants ?
   c) Chercher les valeurs propres de cet opérateur linéaire, et chercher les vecteurs propres (sous-espaces propres) associés.
   d) Le noyau de cette application est-il réduit à {(0,0,0)} ? L est-elle injective ? Surjective ?

Note : ceci n'est pas un examen, et ne fera en particulier pas l'objet d'une correction individuelle, et aucune note n'y sera attribuée. Il constitue uniquement un exemple de questions du niveau de celles de l'examen portant sur la matière vue dans le module S du cours MATHF112/MATHF1112.

Examen blanc 2018

(1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \mapsto (z^2, xyz, y)$.

a) $\operatorname{div} f = \dfrac{\partial f_1}{\partial x} + \dfrac{\partial f_2}{\partial y} + \dfrac{\partial f_3}{\partial z}$

$$= \frac{\partial z^2}{\partial x} + \frac{\partial xyz}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial z} = 0 + xz + 0 = xz$$

$$\operatorname{rot} f = \begin{vmatrix} \overline{e_1} & \overline{e_2} & \overline{e_3} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2 & xyz & y \end{vmatrix} = (1 - xy)\,\overline{e_1} + 2z\,\overline{e_2} + yz\,\overline{e_3}$$

↳ c'est le champ de vecteurs :

$\operatorname{rot} f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \mapsto (1-xy, 2z, yz)$.

b) flux à travers sphère rayon 1 centrée en $(0,0,0)$:

$$\underset{S}{\oiint} f \cdot dS = \underset{V}{\iiint} \operatorname{div} f \, dx\,dy\,dz \qquad \text{(Thm de la divergence)}$$

S : surface fermée orientée vers l'extérieur

V ↳ volume délimité par la sphère = boule rayon 1 centrée en $(0,0,0)$

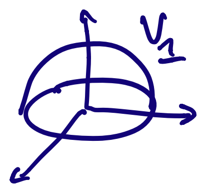
↳ $\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\} = V$

$$\iiint_V xz \, dx\,dy\,dz = ?$$

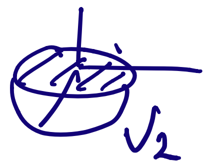
- En fait, on pouvait directement calculer cette intégrale en utilisant le fait que $z \mapsto z$ est impaire, et que de ce fait :

$$\iiint_V xz \, dx\,dy\,dz = \iiint_{V_1} xz \, dx\,dy\,dz + \iiint_{V_2} xz \, dx\,dy\,dz$$

où $V_1 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1 \text{ et } z \geq 0\}$



$V_2 = \{ \ldots \quad \ldots \text{ et } z \leq 0\}$



et en utilisant le chgt de variable :

$$\begin{cases} u = x \\ v = y \\ w = -z \end{cases}$$

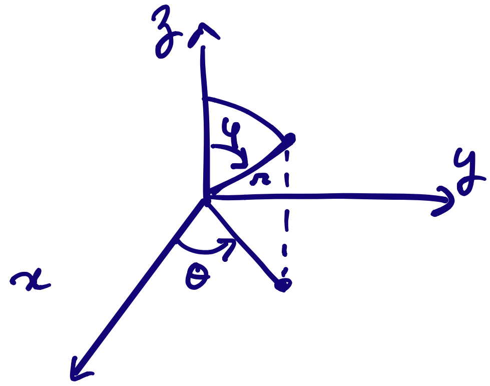
constater que $\displaystyle\iiint_{V_2} xz \, dx\,dy\,dz = -\iiint_{V_1} xz \, dx\,dy\,dz$,

ce qui implique que l'intégrale est <u>nulle</u>.

- Si on ne voit pas cela tout de suite, on peut aussi explicitement calculer l'intégrale en passant aux coord. sphériques :

↳ car le domaine est une boule

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \qquad (r,\theta,\varphi) \in [0,1] \times [0,2\pi] \times [0,\pi]$$



le jacobien de ce chgt de variable s'obtient comme le dét. de la matrice jacobienne associée :

$$\begin{vmatrix} \cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -r\sin\varphi \end{vmatrix}$$

$$= \dots = r^2\sin\varphi$$

(! bon à savoir, de m̂ que les jacobiens associés aux coord. polaires (r) et cylindriques (r))

<u>Formule de chgt de variable</u> :

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{V'} r^2\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\,|r^2\sin\varphi|\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

où $V' = [0,1] \times [0,2\pi] \times [0,\pi]$

↳ rectangle de dim 3

Par le thm de Fubini, cette dernière intégrale vaut :

$$\left(\int_0^1 r^4\, dr\right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta\right) \cdot \left(\int_0^{\pi} \sin\varphi\, |\sin\varphi|\, \cos\varphi\, d\varphi\right)$$

(*)

(l'expression est toute simple car on intègre sur un rectangle en 3D le produit de 3 fonctions ne faisant intervenir qu'une seule variable à chaque fois : r^4, $\cos\theta$ et $\sin\varphi\,|\sin\varphi|\cos\varphi$).

Or, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta = 0$ $\left(\text{c'est } \Big[\sin\theta\Big]_0^{2\pi} = 0 - 0 = 0\right)$

Donc cette intégrale vaut 0.

(*) Si vous ne voyez pas cela, appliquez bêtement Fubini comme suit :

$$\int_0^1 dr \left(\int_0^{\pi} d\varphi \left(\int_0^{2\pi} r^4 \cos\theta\, \sin\varphi\,|\sin\varphi|\cos\varphi\, d\theta\right)\right)$$

$$= \int_0^1 dr\, r^4 \left(\int_0^{\pi} \sin\varphi\,|\sin\varphi|\cos\varphi\, d\varphi \left(\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta}_{=0}\right)\right)$$

$= 0$.

② a) $x_n = \dfrac{\ln(n^n)}{n!}$, $n \geq 1$.

Que vaut $\lim x_n$? (note : pour les suites, comme la limite est toujours pour $n \to \infty$, on écrit souvent "$\lim x_n$" au lieu de "$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$")

Soit $n \geq 1$ naturel.

$$0 \leq |x_n| = x_n = \frac{n \ln n}{n!} = \frac{\ln n}{(n-1)!} \leq \frac{\ln n}{n-1}$$

car $(n-1)! \geq n-1$ $\forall n \geq 1$

(de manière générale, $n! \geq n$ $\forall n \geq 1$:

si $n \geq 1$: $n! = n \underbrace{(n-1)!}_{\geq 1} \geq n$.).

Quand on voit cela, et quand on sait que $\ln(n)$ tend vers $+\infty$ beaucoup + lentement que la fonction $n-1$, on "sent" que $\dfrac{\ln n}{n-1}$ va tendre vers 0 (car $\ln n$ est bcp + petit que $n-1$ quand n est "grand").

Montrons-le formellement :

$\lim \dfrac{\ln n}{n-1} = ?$ c'est un cas $\dfrac{\infty}{\infty}$.

On va appliquer la règle de l'Hospital à la lim de la fonction réelle $x \mapsto \frac{\ln x}{x-1}$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{+\infty} \frac{1}{x} : \text{Cas } \frac{1}{+\infty},$$

cette lim vaut donc 0 par les règles de calcul sur les limites.

Donc la suite $\frac{\ln n}{n-1}$ tend aussi vers 0.

Donc par le test de comparaison ("thm du sandwich") :

$$0 \leq \lim |x_n| = \lim x_n \leq \lim \frac{\ln n}{n-1} = 0,$$

donc $\lim x_n = 0$.

b) Convergence de $\sum \frac{\ln(n^n)}{n!}$: (série à termes positifs)

On essaie le critère du quotient (souvent ça marche bien dès qu'il y a des factorielles) :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln\left((n+1)^{n+1}\right)}{(n+1)!} \frac{n!}{\ln(n^n)}$$

$$= \lim \frac{n+1}{n} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}}$$

$$= \lim \left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \frac{1}{n+1}$$

- $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 + \underbrace{\lim \frac{1}{n}}_{\text{cas } \frac{1}{\infty} \to 0} = 1 + 0 = 1$

- $\lim \frac{1}{n+1} = 0$ (cas $\frac{1}{\infty}$ à nouveau)

- $\lim \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = ?$ Cas $\frac{\infty}{\infty} \to$ l'Hospital

appliqué à la fonction d'une variable réelle

$$x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \overbrace{\frac{x}{x+1}}^{\text{cas } \infty/\infty}$$

$$= \lim \frac{1}{1} = 1.$$

encore l'Hospital

La lim d'un produit étant égale au produit des limites (lorsque ces différents limites existent dans $\mathbb{R}$), on obtient :

$$\lim \left(\left(1+\frac{1}{n}\right) \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \frac{1}{n+1} \right) =$$

$$= \lim \left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot \lim \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \cdot \lim \frac{1}{n+1}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0.$$

Par le critère du quotient, notre série converge donc absolument (ainsi que simplement).

↓

ici la conv. simple revient à la conv. absolue car c'est une série à termes > 0).

③ On considère l'application linéaire suivante de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$:

$$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto (3x, 2y + z, x - z).$$

a) Il s'agit des composants des images de $\overline{e_1} = (1,0,0)$, $\overline{e_2} = (0,1,0)$ et $\overline{e_3} = (0,0,1)$ écrits en colonnes :

$L(\overline{e_1}) = L(1,0,0) = (3, 0, 1)$
$L(\overline{e_2}) = (0, 2, 0)$
$L(\overline{e_3}) = (0, 1, -1)$

la matrice s'écrit donc : $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) Vecteurs linéairement indépendants ?

Une manière de voir cela est de repartir de la déf de vecteurs lin. indépendants :

$$\lambda(3,0,1) + \mu(0,2,0) + \gamma(0,1,-1) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\lambda = 0 \\ 2\mu + \gamma = 0 \\ \lambda - \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ oui, les vecteurs sont bien lin^t indépendants car la seule sol. est $\lambda = \mu = \gamma = 0$.

On aurait pu aussi calculer le déterminant de la matrice constituée par ces vecteurs et constater que celui-ci est non nul.

c) Vecteurs propres :

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (3-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) = 0$$

$\Leftrightarrow \lambda = 3$ ou $\lambda = 2$ ou $\lambda = -1$

$\Rightarrow$ 3 valeurs propres : 3, 2 et -1.

- Sous-espace propre associé à 3 : V_3 :

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{3x = 3x} \\ 2y + z = 3y \\ x - z = 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x = 4z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad V_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z \text{ et } x = 4z\}$$

c'est une droite (intersection de 2 plans).

Il est engendré par n'importe lequel de ses vecteurs non nuls (par ex. par $(4,1,1)$).

- Sous-espace propre associé à la V.P. 2 (V_2) :

$$\begin{cases} 3x = 2x \\ 2y + z = 2y \\ x - z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \cancel{2y = 2y} \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \text{ et } z = 0\}$$

A nouveau, c'est l'intersection de 2 plans, c'est une droite.

Il est engendré par exemple par le vecteur $(0,1,0)$. $\quad (V_2 = \langle (0,1,0) \rangle)$

- Sous-espace propre associé à la V.P. -1 (V_{-1}).

$$\begin{cases} 3x = -x \\ 2y + z = -y \\ x - z = -z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ 3y + z = 0 \\ \cancel{x = 0} \end{cases}$$

$\Rightarrow V_{-1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=0 \text{ et } 3y+z=0\} = \langle (0,1,-3) \rangle$

Il est engendré par le vecteur $(0,1,-3)$.

d) le noyau de L est réduit à $(0,0,0)$ car on a vu que 0 n'était pas valeur propre.

Donc L est injective. Comme $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

la dim de l'espace vectoriel de départ ($\mathbb{R}^3$) est 3,

et par le thm du rang

$$\underbrace{\dim(\mathbb{R}^3)}_{=3} = \underbrace{\dim \ker L}_{=0} + \dim \operatorname{Im} L$$

$\Rightarrow \quad \dim \operatorname{Im} L = 3$.

Donc $\operatorname{Im} L$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dim 3. C'est donc $\mathbb{R}^3$ tout entier.

Donc L surjective.

(si W sous-espace de V avec $\dim W = \dim V \ (<\infty)$ alors $W = V$).

(L est en fait une bijection).

Math-F-112 – Mathématiques

Modules T et S du Q2

BIOL1 – CHIM1 – IRBI1 – SCIE1

L'examen comprend 5 questions valant chacune 10 points.
Toutes vos réponses doivent être **soigneusement justifiées**.
Vous pouvez utiliser UNIQUEMENT de quoi écrire.
Répondez à chaque question sur la page correspondante.
Inscrivez vos nom, prénom, matricule ci-dessous ET sur chaque feuille de réponse.

NOM, PRENOM:

MATRICULE:

SECTION:

Question 1		/10
Question 2		/10
Question 3		/10
Question 4		/10
Question 5		/10
Total		/50

1. (10 points) Soit l'équation différentielle

$$y'(x) - y(x)\sin(x)\cos(x) = e^{\sin^2(x)}.$$

(a) Trouver une solution particulière de cette équation.

(b) Résoudre l'équation homogène associée.

(c) Donner la solution générale de l'équation.

(d) Résoudre le problème de Cauchy pour $y(1) = 0$.

2. (10 points) Intégrer la fonction $f(x, y) = y + xy$ sur le domaine $D = \{(x, y) \in R^2 | x^2 + y^2 \leq r_0^2, x \geq 0, y \geq 0\}$ où r_0 est un nombre réel strictement positif.

3. (10 points) On considère le champ de vecteurs f défini sur $\mathbb{R}^3$ par:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto (z + y, y + x, x + z)$$

(a) Calculer la divergence et le rotationel de ce champ en un point (x, y, z) quelconque de $\mathbb{R}^3$

(b) Calculer le flux de ce champ de vecteurs à travers la sphère S de rayon 1 centrée en l'origine $(0, 0, 0)$ et orientée vers l'extérieur:

$$\oiint_S f.dS$$

(Aide: utiliser le théorème de la divergence)

4. (10 points) On considère la suite (x_n) définie par:

$$x_n = \frac{n+1}{n^2\ 3^n} \quad \textit{pour } n \geq 1$$

(a) Calculer la limite de cette suite: $\lim_{n\to+\infty} x_n$

(b) On considère maintenant la série correspondante:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

Cette série est-elle convergente? Est-elle convergente absolument?

5. (10 points) On considère l'opérateur linéaire suivant sur $\mathbb{R}^3$:

$$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto (2x, y + z, -x + 3z)$$

(a) Ecrire la matrice de L dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$;

(b) Chercher les valeurs propres de L, et chercher les sous-espaces propres associés;

(c) Montrer que les vecteurs $(2, 0, -1), (0, 1, 0)$ et $(0, 1, 3)$ sont linéairement indépendants.

Juin 2018

Q1) ⚠ erreur dans l'énoncé.

b) $y'(x) = y(x) \cdot 2\sin(x)\cos(x)$

$\frac{y'(x)}{y(x)} = 2\sin(x)\cos(x) \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y_H} = \int 2\sin(x)\cos(x)\,dx$

$\Leftrightarrow \ln y_H = \sin^2(x) + C \Leftrightarrow y_H = K \cdot e^{\sin^2 x}$

a) $y_P = K(x) \cdot e^{\sin^2 x}$

$\rightarrow K' e^{\sin^2 x} + \cancel{K(x)\, 2\sin x\cos x \cdot e^{\sin^2 x} - K(x)\, e^{\sin^2 x} \cdot 2\sin x\cos x}$
$= e^{\sin^2 x}$

$\rightarrow K' = e^{\sin^2 x} \cdot e^{-\sin^2 x} = e^{\sin^2 x - \sin^2 x} = 1$

$\rightarrow K(x) = \int 1\,dx = x$

$y_P = x \cdot e^{\sin^2 x}$

c) $y = y_H + y_P = K \cdot e^{\sin^2(x)} + x\, e^{\sin^2 x}$

d) $y(1) = 0$

$y = K \cdot e^{\sin^2(1)} + 1 \cdot e^{\sin^2(1)} = 0$

$K = -1$

Q2

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} r \in [0; r_0] \\ \theta \in [0; \frac{\pi}{2}] \end{array}$$

$$\int_0^{r_0}\int_0^{\pi/2} (r\sin\theta + r\cos\theta\, r\sin\theta)\, r \, d\theta\, dr$$

$$= \int_0^{r_0} r^2 [-\cos\theta]_0^{\pi/2} + r^3 [\tfrac{1}{2}\sin^2\theta]_0^{\pi/2}\, dr$$

$$= \int_0^{r_0} r^2 [-0-(-1)] + r^3 [\tfrac{1}{2}\cdot 1^2 - \tfrac{1}{2}\cdot 0^2]\, dr$$

$$= \int_0^{r_0} r^2 + \frac{r^3}{2}\, dr$$

$$= \int_0^{r_0} r^2 dr + \frac{1}{2}\int_0^{r_0} r^3 dr$$

$$= \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{r_0} + \frac{1}{2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{r_0}$$

$$= \frac{r_0^3}{3} + \frac{r_0^4}{8}$$

Juin 2018

3 a) $\bar{\nabla} \cdot \bar{f} = 2$

$$\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z+y \\ y+x \\ x+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 1-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) $\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases}$ $\quad \theta \in [0;\pi]$, $\varphi \in [0;2\pi]$

$$\iiint \nabla \cdot f \, \underbrace{dx\,dy\,dz}_{\to\, r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr}$$

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} 2r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr$$

$$\int_0^1 2r^2 dr \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta$$

$$2\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 \cdot [\varphi]_0^{2\pi} \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}$$

$$\frac{2}{3} \cdot 2\pi \cdot (-(-1) - (-1)) = \frac{8\pi}{3}$$

Correction examen juin 2018- questions 4 et 5 seconde partie de l 'examen.

4 (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2\, 3^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3^n}$

lim d'un produit = produit des limites si chacune des lim existe

- $\lim \frac{n+1}{n^2} = ?$ Cas $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ x\in\mathbb{R}}} \frac{x+1}{x^2} \underset{\text{règle Hospital}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2x}$: Cas $\frac{1}{\infty}$. Par les règles de calcul vues au cours, cette limite est nulle.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2} = 0$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} 3^n = +\infty$. Donc par la mi règle de calcul (Cas $\frac{1}{\infty}$),

$\lim \frac{1}{3^n} = 0$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2 3^n} = \lim \frac{n+1}{n^2} \cdot \lim \frac{1}{3^n} = 0 . 0 = 0$.

(b) La série $\sum \frac{n+1}{n^2} \frac{1}{3^n}$ est une série à termes positifs. La convergence (simple) est donc équivalente à la conv. absolue.

Par ailleurs, $0 \leq \frac{n+1}{n^2} \leq 1$ dès que $n^2 - n - 1 \geq 0$ ce qui est le cas $\forall n \geq 2$.

Donc pour $n \geq 2$, on a $0 \leq \frac{n+1}{n^2} \frac{1}{3^n} \leq \frac{1}{3^n}$.

Or $\sum \frac{1}{3^n}$ converge (absolument) car c'est la série géométrique de raison $\frac{1}{3}$ (plus petite que 1) et on a vu que $\sum z^n$ converge absolument $\forall z$ tel que $|z|<1$. C'est bien le cas ici $(z=\frac{1}{3})$, donc $\sum \frac{1}{3^n}$ conv. abs^{t}.

Par le critère de comparaison, $\sum \frac{n+1}{n^2}\frac{1}{3^n}$ converge absolument, et donc en particulier aussi simplement.

(5) Opérateur linéaire :

$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \longmapsto (2x, y+z, -x+3z)$

(a) matrice de L : il suffit de chercher l'image de la base canonique par L et de mettre les coord. en colonne.

$L(1,0,0) = (2,0,-1)$
$L(0,1,0) = (0,1,0)$
$L(0,0,1) = (0,1,3)$

$\to$ matrice : $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(b) Valeurs propres de L :

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0 \iff (2-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

$\iff \lambda = 2$ ou $\lambda = 1$ ou $\lambda = 3$.

Sous espace propre V_1 associé à $\lambda = 1$:

On cherche (x,y,z) tel que $L(x,y,z) = (x,y,z)$:

$$\iff \begin{cases} 2x = x \\ y+z = y \\ -x+3z = z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ (0=0) \end{cases}$$

C'est donc le sous-espace :

$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z = 0\}$. C'est en fait l'axe des y.

Sous-espace V_2 :

$$L(x,y,z) = 2(x,y,z) \iff \begin{cases} (2x = 2x) \\ y+z = 2y \\ -x+3z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} y = z \\ z = x \end{cases}$$

$\Rightarrow V_2 = \{(x,y,z) \mid x = y = x\}$. (C'est une bissectrice)

Sous-espace V_3 :

$$L(x,y,z) = 3(x,y,z) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 3x \\ y+z = 3y \\ -x+3z = 3z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2y = z \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow V_3 = \{(x,y,z) \mid x=0 \text{ et } z=2y\}.$$

c'est une droite située dans le plan (y,z), passant par l'origine $(0,0,0)$, et de pente 2 (coef. angulaire).

(c) Pour voir que les vecteurs $(2,0,-1)$, $(0,1,0)$ et $(0,1,3)$, sont lin. indépt, on peut par ex. calculer le dét. de la matrice qu'ils constituent :

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 0 = 6 \neq 0$$

Comme ce dét. est non nul, les 3 vecteurs sont linét indépendants.

Une autre manière (+ longue) est de montrer que la seule solution du système d'équations :

$$\lambda(2,0,-1)+\mu(0,1,0)+\gamma(0,1,3)=(0,0,0)$$

est la solution $\begin{cases}\lambda=0\\ \mu=0\\ \gamma=0\end{cases}$.

Ce système se réécrit :

$$\begin{cases}2\lambda = 0\\ \mu+\gamma=0\\ -\lambda+3\gamma=0\end{cases} \iff \begin{cases}\lambda=0\\ \mu=-\gamma\\ 3\gamma=0\end{cases} \iff \begin{cases}\lambda=0\\ \mu=0\\ \gamma=0\end{cases}.$$

Donc les vecteurs sont bien lin^t indépendants.

Examen de MATH F-112 de Janvier 2019 – MATHÉMATIQUES

Toutes vos réponses doivent être **soigneusement justifiées.** Répondez à chaque exercice sur la ou les page correspondante(s).

Vous pouvez utiliser uniquement de quoi écrire. Des feuilles de brouillon sont accessibles à la fin de la copie. **Vous n'avez pas le droit à vos propres feuilles de brouillon.** LE SUJET DOIT RESTER AGRAFÉ: **une copie sans agrafe sera refusée.**

Inscrivez vos nom, prénom, matricule ci-dessous ET sur chaque feuille de réponse.

NOM, PRÉNOM:

MATRICULE:

SECTION:

Q. Théoriques		/10
Exercice 1		/10
Exercice 2		/10
Exercice 3		/ 12
Exercice 4		/10
Exercice 5		/ 8
Total		/ 60

QUESTIONS THÉORIQUES

(1) Soient x et y deux nombres réels. Exprimer (sans donner de justification) $\cos(x+y)$ et $\sin(x+y)$ en fonction de $\cos(x), \sin(x), \cos(y)$ et $\sin(y)$.

(2) Si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ désignent deux vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^3$, définissez leur produit vectoriel $\vec{a} \times \vec{b}$ et exprimez $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ en fonction de $\|\vec{a}\|$, $\|\vec{b}\|$ et de l'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

EXERCICE 1

En utilisant un changement de variable judicieux, calculer

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^t}{e^{2t}-1}\mathrm{d}t.$$

EXERCICE 2

Résoudre, en utilisant la méthode du pivot de Gauss, le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} x + y \quad + z = 2 \\ 2x + y \quad + z = 3 \\ 3x + y \; + 3z = -1 \end{cases}$$

EXERCICE 3

On rappelle que la fonction tangente est définie, pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, par

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

On rappelle aussi que la fonction tan admet une *fonction réciproque* sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, qu'on notera ici arctan:

$$\arctan :]-\infty, +\infty[\to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad x \mapsto \arctan(x).$$

(1) Montrer que

$$\tan'(x) = 1 + (\tan(x))^2.$$

(2) Montrer que, pour tout $y \in]-\infty, \infty[$:

$$(\arctan)'(y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

[Indication: utiliser la question 1.]

(3) Donner le polynôme de Taylor d'ordre 2 de la fonction arctan en 0.

EXERCICE 4

Trouver l'équation du plan de $\mathbb{R}^3$ passant par le point $A = (4, -2, 1)$ et perpendiculaire à la droite d'équations

$$\frac{x-1}{7} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{3}.$$

EXERCICE 5

Résoudre l'équation

$$\log_9(x^3) + 2\log_3\left(\frac{1}{x}\right) = 1.$$

Examen de MATH F-112 de JUIN 2019 – PARTIE Q1 DU MODULE T

BA1 BIOL/CHIM/IRBI/SCIE/INFO

Durée: 2h

Vérifiez que ce sujet correspond à votre section.

Toutes vos réponses doivent être **soigneusement justifiées.** Répondez à chaque exercice sur la ou les page correspondante(s).

Vous pouvez utiliser uniquement de quoi écrire. Des feuilles de brouillon sont accessibles à la fin de la copie. **Vous n'avez pas le droit à vos propres feuilles de brouillon.** LE SUJET DOIT RESTER AGRAFÉ: **une copie sans agrafe sera refusée.**

Inscrivez vos nom, prénom, matricule ci-dessous ET sur chaque feuille de réponse.

NOM, PRÉNOM:

MATRICULE:

Exercice 1		/10
Exercice 2		/10
Exercice 3		/ 10
Exercice 4		/10
Total		/ 40

EXERCICE 1

En utilisant *la méthode du pivot de Gauss* et en justifiant à chaque étape les opérations effectuées, résolvez le système linéaire suivant d'inconnues (x, y, z, t):

$$\begin{cases} x - 2y - t = -5 \\ x - y + z - t = -2 \\ 2x - y + z - 2t = -3 \\ 3x + 3y + 3z - 3t = 0 \end{cases}$$

Correction: On écrit le système sous la forme d'une matrice augmentée:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & -3 \\ 3 & 3 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Les opérations sur les lignes donnent alors:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & -3 \\ 3 & 3 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 9 & 3 & 0 & 15 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_4 \leftarrow \frac{1}{3}L_4}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

Les deux dernières équations sont incompatibles donc le système n'a pas de solutions.

EXERCICE 2

(1) Soit $R > 0$. Calculer
$$\int_3^R \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 3x + 2}.$$
(2) Est-ce que $\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x$ existe? (Autrement dit: est-ce que l'intégrale converge?). Si oui, donner sa valeur.
(3) Soit $2 < r < 3$. Calculer $\int_r^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-3x+2}$.
(4) Est-ce que $\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-3x+2}$ existe? Si oui, donner sa valeur.

Correction:

(1) Le polynôme de second degré $x^2 - 3x + 2$ a pour racines 1 et 2 et se factorise sous la forme suivante:
$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2).$$
Par le cours, on sait alors que la fraction rationnelle $\frac{1}{x^2-3x+2}$ s'écrit sous la forme suivante:
$$\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2},$$
où a et b sont deux constantes que nous devons déterminer. On réduit au même dénominateur:
$$\begin{aligned}\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} &= \frac{a(x-2)+b(x-1)}{(x-1)(x-2)} \\ &= \frac{(a+b)x - 2a - b}{x^2-3x+2}.\end{aligned}$$

Nous avons donc $a+b=0$ et $-2a-b=1$, ce qui donne alors $b=1$ et $a=-1$. On a donc:

$$\begin{aligned}\int_3^R \frac{\mathrm{d}x}{x^2-3x+2} &= \int_3^R \left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x\\ &= [\ln(x-2)-\ln(x-1)]_3^R\\ &= \left[\ln\left(\frac{x-2}{x-1}\right)\right]_3^R\\ &= \ln\left(\frac{R-2}{R-1}\right)-\ln(\frac{1}{2})\\ &= \ln\left(\frac{R-2}{R-1}\right)+\ln 2.\end{aligned}$$

(2) Par définition, $\int_3^{+\infty}\frac{1}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x$ existe si $\int_3^R\frac{1}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x$ a une limite lorsque R tend vers $+\infty$, et dans ce cas la valeur de $\int_3^{+\infty}\frac{1}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x$ est cette limite. Comme

$$\lim_{R\to\infty}\frac{R-2}{R-1}=1,$$

par la question précédente et la règle de composition des limites on a

$$\int_3^{+\infty}\frac{1}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x=\lim_{R\to+\infty}\int_3^R\frac{1}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x=\ln 2.$$

(3) **On connaît déjà une primitive de** $\frac{1}{x^2-3x+2}$ **qu'on a calculée à la question** (1) **donc on réutilise le calcul ici:**

$$\begin{aligned}\int_r^3\frac{\mathrm{d}x}{x^2-3x+2} &= \left[\ln\left(\frac{x-2}{x-1}\right)\right]_r^3\\ &= -\ln 2+\ln\left(\frac{r-1}{r-2}\right)\end{aligned}$$

(4) Comme $\lim_{r\to 2}\ln\left(\frac{r-1}{r-2}\right)=+\infty$ l'intégrale $\int_2^3\frac{\mathrm{d}x}{x^2-3x+2}$ n'existe pas.

EXERCICE 3

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n:

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Correction:
On définit, pour tout entier $n \geq 0$, la proposition suivante:

$$\mathrm{P(n)} : \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Initialisation: d'un côté, $\sum_{k=0}^{0} k^3 = 0^3 = 0$. D'un autre côté, $\frac{0^2\times(0+1)^2}{4} = 0$. Ces deux quantités sont égales, et donc $P(0)$ est vraie.

Étape de récurrence: supposons que la propriété $P(n)$ est vraie pour un certain entier $n \geq 0$. On veut montrer que $P(n+1)$ est encore vraie, et donc on calcule la somme de gauche:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=0}^{n} k^3 + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3,\end{aligned}$$

où pour écrire cette dernière égalité on a utilisé l'hypothèse de récurrence. On continue alors le calcul:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\
&= (n+1)^2 \left[\frac{n^2}{4} + (n+1)\right] \\
&= (n+1)^2 \times \frac{n^2+4n+4}{4} \\
&= (n+1)^2 \times \frac{(n+2)^2}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n+1+1)^2}{4}.
\end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est démontrée.

EXERCICE 4

On rappelle que les fonctions *sinus et cosinus hyperbolique* sont données, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

(1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1.$$

(2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sinh'(x) = \cosh(x) \qquad \text{et} \qquad \cosh'(x) = \sinh(x).$$

(3) On admet que $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet une fonction réciproque, notée $\operatorname{argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(4) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

Correction:

(1) On calcule:

$$\begin{aligned}\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{4}\\ &= \frac{4}{4} = 1.\end{aligned}$$

(2) Comme la dérivée de $x \mapsto e^{-x}$ est $-e^{-x}$ il sort:

$$\sinh'(x) = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x),$$

et de même pour la dérivée de $\cosh(x)$.

(3) Par la formule de la dérivée des fonctions réciproques on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\sinh'(\operatorname{argsh}(x))} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{argsh}(x))}.$$

En utilisant la question (1) on trouve:

$$\cosh(\operatorname{argsh}(x))^2 - \sinh(\operatorname{argsh}(x))^2 = 1,$$

et comme par définition $\sinh(\operatorname{argsh}(x)) = x$ on trouve

$$\cosh(\operatorname{argsh}(x)) = \sqrt{x^2+1}.$$

La dérivée de argsh est alors:

$$\operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(4) On calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$: par la dérivée des fonctions composées on trouve:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right) &= \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x\sqrt{x^2+1}+x^2+1} \\
&= \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x\sqrt{x^2+1}+x^2+1} \times \frac{x^2+1-x\sqrt{x^2+1}}{x^2+1-x\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}-x(x^2+1)+x(x^2+1)-x^2\sqrt{x^2+1}}{(x^2+1)^2-x^2(x^2+1)} \\
&= \frac{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}-x^2\sqrt{x^2+1}}{(x^2+1)^2-x^2(x^2+1)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \times \frac{(x^2+1)(x^2+1)-x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^2-x^2(x^2+1)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.
\end{aligned}$$

Les deux fonctions considérées ont même dérivée donc sont égales à une constante près. Comm elles valent toutes les deux 0 en 0 elles sont donc égales.

Examen de MATH F-112 de JUIN 2019 – PARTIE Q2 DU MODULE T

Durée: 1h30

Vérifiez que ce sujet correspond à votre section.

Toutes vos réponses doivent être **soigneusement justifiées.** Répondez à chaque exercice sur la ou les page correspondante(s).

Vous pouvez utiliser uniquement de quoi écrire. Des feuilles de brouillon sont accessibles à la fin de la copie. **Vous n'avez pas le droit à vos propres feuilles de brouillon.** LE SUJET DOIT RESTER AGRAFÉ: **une copie sans agrafe sera refusée.**

Inscrivez vos nom, prénom, matricule ci-dessous ET sur chaque feuille de réponse.

NOM, PRÉNOM:

MATRICULE:

Exercice 1		/10
Exercice 2		/10
Total		/ 20

EXERCICE 1

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}.$$

(1) Calculer le gradient de f et la matrice Hessienne de f en un point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
(2) Déterminer tous les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$. Pour chaque point critique, déterminer sa nature (c'est-à-dire: dire si c'est ou non un maximum local ou un minimum local).
(3) Soit $R > 0$. On note C la région de l'espace $\mathbb{R}^3$ égale à l'intersection entre le demi-cylindre $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2 \leq R^2, z \geq 0\}$ et la région située en-dessous du graphe de la fonction f.

    Calculer le volume de C.

Correction:

(1) Le gradient est le vecteur de $\mathbb{R}^2$ composé des dérivées partielles de f:

$$\nabla f(x,y) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Big).$$

En dérivant d'abord par rapport à x (en considérant y comme une constante) et ensuite par rapport à y on trouve:

$$\nabla f(x,y) = \Big(\frac{-2x}{(1+x^2+y^2)^2}, \frac{-2y}{(1+x^2+y^2)^2}\Big).$$

La matrice Hessienne est la matrice formée par les dérivées partielles secondes:

$$\mathrm{Hess}(f)(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

En dérivant les expressions des dérivées partielles précédentes on trouve alors:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{-2}{(1+x^2+y^2)^2} + \frac{8x^2}{(1+x^2+y^2)^3} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{8xy}{(1+x^2+y^2)^3} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{-2}{(1+x^2+y^2)^2} + \frac{8y^2}{(1+x^2+y^2)^3}
\end{aligned}$$

(2) On rappelle que $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est un point critique pour f si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$. Avec l'expression trouvée ci-dessus on a:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{-2x}{(1+x^2+y^2)^2} = 0 \\ \dfrac{-2y}{(1+x^2+y^2)^2} = 0 \end{cases} \iff (x,y) = (0,0).$$

Le point $(0,0)$ est donc le seul point critique de f sur $\mathbb{R}^2$. En remplaçant x et y respectivement par 0 et 0 dans l'expression de la Hessienne de f, la matrice Hessienne de f en $(0,0)$ vaut:

$$\mathrm{Hess}(f)(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice vaut 4, qui est strictement positif. Comme -2 est strictement négatif, $(0,0)$ est un minimum local de f sur $\mathbb{R}^2$ (et en particulier un minimum global, car c'est le seul point critique).

(3) Par définition, le volume de la région C est donné par la double intégrale:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(C) &= \int_{\{x^2+y^2 \leq R^2\}} f(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \\
&= \int_{\{x^2+y^2 \leq R^2\}} \frac{1}{1+x^2+y^2} \mathrm{d}x \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

On calcule cette intégrale avec un changement de coordonnées polaires (ρ, θ), où $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Le domaine sur lequel on intègre devient dans ces coordonnées:

$$\left\{ 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \theta < 2\pi \right\}.$$

L'élément de volume se transforme comme $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta$, de sorte que le volume de C se calcule comme:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(C) &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{1+\rho^2} \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi \int_0^R \frac{\rho}{1+\rho^2} \mathrm{d}\rho \\
&= \left[\pi \ln(1+\rho^2) \right]_0^R \\
&= \pi \ln(1+R^2).
\end{aligned}$$

EXERCICE 2

On considère l'équation différentielle suivante, définie sur $\mathbb{R}$:

$$y' - 5x^4 y = 5x^4.$$

(1) Donner toutes les solutions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation homogène

$$y' - 5x^4 y = 0.$$

(2) Donner une solution particulière de l'équation

$$y' - 5x^4 y = 5x^4.$$

(3) Résoudre les problèmes de Cauchy suivants:

$$\begin{cases} y' - 5x^4 y = 5x^4 \\ y(0) = 3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y' - 5x^4 y = 5x^4 \\ y(0) = -1 \end{cases}.$$

On considère maintenant l'équation différentielle suivante, définie sur $\mathbb{R}$:

$$y'' - 2y' + y = 3e^x.$$

(4) Donner toutes les solutions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation homogène

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

(5) Montrer que, pour une certaine valeur de β qu'on déterminera, la fonction $x \mapsto \beta x^2 e^x$ est une solution particulière de l'équation

$$y'' - 2y' + y = 3e^x.$$

(6) Donner alors toutes les solutions de l'équation

$$y'' - 2y' + y = 3e^x.$$

Correction

(1) Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Alors

$$y' - 5x^4 y = 0 \iff \frac{y'}{y} = 5x^4 \iff \int \frac{y'}{y} \mathrm{d}x = \int 5x^4 \mathrm{d}x \iff \ln|y| = x^5 + C$$

pour une constante $C \in \mathbb{R}$. Ceci donne donc:

$$|y| = e^C e^{x^5} = C' e^{x^5}$$

et donc

$$y = C' e^{x^5}$$

pour une contante $C' \in \mathbb{R}$.

(2) Pour ce genre d'équations on commence toujours par chercher une solution constante. Dans ce cas $y(x) = a$ est solution si et seulement si

$$-5x^4 a = 5x^4 \iff a = -1.$$

$y(x) = -1$ est donc une solutions constante de l'équation. Sinon la méthode de la variation des constantes permet de retrouver cette solution particulière.

(3) La solution générale de l'équation différentielle $y' - 5x^4 y = 5x^4$ est donc donnée par:

$$y(x) = -1 + C' e^{x^5}$$

pour $C' \in \mathbb{R}$.

Si on impose $y(0) = 3$ on a alors $3 = y(0) = -1 + C'$ et donc $C' = 4$. La solution du premier problème de Cauchy est donc

$$y(x) = -1 + 4e^{x^5}.$$

Si on impose en revanche $y(0) = -1$ on a alors $-1 = y(0) = -1 + C'$ et donc $C' = 0$. La solution du deuxième problème de Cauchy est donc

$$y(x) = -1.$$

(4) L'équation caractéristique associée à l'équation homogène est

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0,$$

dont 1 est **une racine double.** La solution générale de l'équation homogène est ainsi donnée par:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x$$

pour deux constante C_1 et C_2.

(5) Soit $y_0(x) = \beta x^2 e^x$. Alors:

$$y_0'(x) = \beta(2x + x^2)e^x,$$
$$y_0''(x) = \beta(2 + 4x + x^2)e^x.$$

Ainsi, y_0 est solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + y = 3e^x$ si et seulement si:

$$\beta(2 + 4x + x^2)e^x - 2\beta(2x + x^2)e^x + \beta x^2 e^x = 3e^x$$
$$\iff \; e^x \left(2\beta + 4\beta x - 4\beta x + \beta x^2 - 2\beta x^2 + \beta x^2\right) = 3e^x$$
$$\iff \; 2\beta e^x = 3e^x \; \iff \; \beta = \frac{3}{2}.$$

La solution particulière cherchée est ainsi

$$y_0(x) = \frac{3}{2}x^2 e^x.$$

(6) Toutes les solutions de l'équation $y'' - 2y' + y = 3e^x$ sont alors données par:

$$y(x) = \frac{3}{2}x^2 e^x + C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

Examen de MATH F-112 d'AOÛT 2019 – PARTIE Q1 DU MODULE T

BA1 BIOL/CHIM/IRBI/SCIE/INFO

Durée: 2h

Vérifiez que ce sujet correspond à votre section.

Toutes vos réponses doivent être **soigneusement justifiées.** Répondez à chaque exercice sur la ou les page correspondante(s).

Vous pouvez utiliser uniquement de quoi écrire. Des feuilles de brouillon sont accessibles à la fin de la copie. **Vous n'avez pas le droit à vos propres feuilles de brouillon.** LE SUJET DOIT RESTER AGRAFÉ: **une copie sans agrafe sera refusée.**

Inscrivez vos nom, prénom, matricule ci-dessous ET sur chaque feuille de réponse.

NOM, PRÉNOM:

MATRICULE:

Exercice 1		/10
Exercice 2		/10
Exercice 3		/ 10
Exercice 4		/10
Total		/ 40

EXERCICE 1

(1) Calculer le produit scalaire *et* le produit vectoriel des vecteurs $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}3\\3\\-2\end{pmatrix}$.

(2) Écrire l'équation *cartésienne* du plan passant par le point $A = (1,1,1)$ et orthogonal à la droite d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = -5t \\ y = 4t \\ z = t \end{cases}$$

(3) Soit D la droite de vecteur directeur $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ et passant par le point $B = (1,1,1)$. Est-ce que le plan d'équation cartésienne

$$x + 2y + 3z - 6 = 0$$

contient D?

EXERCICE 2

(1) Calculer
$$\int_1^e \ln x \mathrm{d}x.$$
(2) Calculer
$$\int_0^1 x^2 e^{x^3} \mathrm{d}x.$$

EXERCICE 3

On considère la fonction

$$f(x) = x\cos(x^2)$$

définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(1) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
(2) Donner le polynôme de Taylor d'ordre 2 de f en 0.
(3) Calculer

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} f(x)\mathrm{d}x.$$

EXERCICE 4

Résoudre l'équation

$$\log_8(x^3) + \log_2(4 - x) = 2.$$

Correction

Faculté des Sciences

Interrogation de Mathématiques — Math-F-112

(Titulaires : J. De Saedeleer, D. Leemans, M. D'Adderio)

29 Octobre 2019

Sections: BIOL1, CHIM1, GEOG1, GEOL1, INFO1, IRBI1, SCIE1

Consignes :

- Indiquez votre nom, prénom et matricule aux endroits indiqués et sur chaque feuille que vous rendez.
- Répondez aux questions à choix multiple en noircissant la case appropriée.

Votre NOM et Prénom :

Votre section :

Votre matricule, à noircir :

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Les questions qui suivent sont à choix multiple, répondez-y en cochant la case appropriée.

Question 1 Parmi les fonctions suivantes quelle est celle qui est paire ?

- ■ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\to x^2+1$
- ☐ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\to x$
- ☐ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\to \sin(x)$
- ☐ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\to x^3+x$
- ☐ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\to 2-x$
- ☐ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\to x^2+x+2$

Question 2 Le produit $(5,2,3)\times(1,3,2)$ vaut

- ☐ $(3,2,-1)$
- ■ $(-5,-7,13)$
- ☐ $(7,13,2)$
- ☐ $(-5,7,13)$
- ☐ $(1,5,-5)$
- ☐ $(13,3,-3)$

Question 3 Quel est l'ensemble des solutions de l'équation $(\sin(x)+\cos(x))^2=1$?

- ☐ $\{\pi/4+k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$
- ☐ $\{2k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$
- ☐ $\{k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$
- ☐ $\{\pi/2+2k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$
- ☐ $\{\pi/4+2k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$
- ■ $\{k\pi/2|k\in\mathbb{Z}\}$

Question 4 Le point symétrique au point $(1,1)$ par rapport à la droite d'equation $y=3-x$ est le point de coordonnées

- ■ $(2,2)$
- ☐ $(3,-1)$
- ☐ $(2,4)$
- ☐ $(-1,1)$
- ☐ $(0,0)$
- ☐ $(-2,1)$

Question 5 Si x est tel que $log_x 5=2$, x vaut

- ■ $\sqrt{5}$
- ☐ 125
- ☐ 25
- ☐ 1/5
- ☐ 5
- ☐ $\sqrt{25}$

Question 6 Combien de mots de 3 lettres peut-on former avec les lettres X, Y, Z, T, U et V ?

- ☐ 108
- ■ 216
- ☐ 120
- ☐ 45
- ☐ 180
- ☐ 28

Question 7 Lesquelles des argumentations suivantes sont correctes ?

- ☐ Quand il pleut je prend mon parapluie. J'ai pris mon parapluie aujourd'hui. Donc il pleut aujourd'hui.
- ■ Aucun étudiant n'est agé de plus de 45 ans. Alfred a 60 ans. Alfred n'est donc pas un étudiant.
- ☐ Tout étudiant étudie durant le week-end. Jacques travaille le vendredi. Jacques n'est donc pas étudiant.
- ☐ Aucun étudiant ne possède une voiture. Donc aucun conducteur n'est étudiant.
- ☐ Tout étudiant a le droit de vote. Jules a voté, Jules est donc un étudiant.

Question 8 L'équation du plan de $\mathbb{R}^3$ passant par $a = (1, 2, 3)$ et perpendiculaire à la droite passant par les points $b = (1, 1, 1)$ et $c = (0, 1, 2)$ est

- ☐ $x + 2y + z = 16$
- ☐ $z = 5$
- ☐ $y - 2z = 6$
- ☐ $x + y + z = 12$
- ☐ $x + z = 8$
- ■ $x - z + 2 = 0$

Question 9 Le cosinus de l'angle $-2\pi/3$ vaut

- ☐ $\sqrt{3}/2$
- ☐ $-\sqrt{3}/2$
- ■ $-1/2$
- ☐ $-\sqrt{2}/2$
- ☐ $1/2$
- ☐ $\sqrt{2}/2$

Question 10 Pour quelle(s) valeur(s) de λ, la droite de $\mathbb{R}^3$ d'équation

$$\frac{x-3}{4} = \frac{y-2}{5} = \frac{z}{\lambda}$$

est-elle parallèle au plan d'équation $x + 2z = 2019$?

- ☐ -5
- ■ -2
- ☐ 0
- ☐ 5
- ☐ -4
- ☐ 3

MATH-F-111 : Examen janvier 2020

1) Trouver l'équation cartésienne
   a. du plan passant par le point (-1, 1, -1) et orthogonal au vecteur (1, 2, 1)
   b. du plan passant par le point (1, -1, 2) et parallèle aux vecteurs (1, 1, 2) et (0, 1, 4)
   c. du plan passant par le point (0, -2, 2) et contenant la droite d'équations
      x + 3y – z = 7
      3x -2y + 2z = 8

2) Calculer l'intégrale définie suivante :

$$\int_3^4 \frac{dx}{x^2-7x+10}$$

3) Résoudre le système d'équations suivant :

   x + y + z = 2
   x – y + z = -1
   x + 3y + z = 5

4) Calculer les asymptotes de la fonction suivante :

$$\sqrt{x^2+1}+x$$

5) Calculer le développement de Taylor d'ordre 5 en 0 pour la fonction sin(x)

6) Quelle est la valeur de la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)-x}{x^2}\right)$$

7) Déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles la matrice suivante est inversible et calculer son inverse.

$$\begin{matrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

8) Résoudre :
   a. $\frac{1-3x}{1-x} \geq 2$
   b. $|x^2-2x-7| = 8$
   c. $\log_2(-2x+3) = \log_2(x^2-4x) - 2$

9) De combien de manières est-ce que 8 personnes peuvent être assises en ligne si
   a) Il n'y a pas de contrainte ?
   b) Il y a 5 hommes et ils doivent être assis les uns à côté des autres ?
   c) Il y a 4 couples et chaque couple doit être assis ensemble ?

Correction examen janvier 2020

① a) π ? $\pi \in (-1;1;-1)$ et $\perp$ à $(1;2;1)$

$$\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$$
$$\equiv x + 2y + z + d = 0$$
$$\Leftrightarrow -1 + x - 1 + d = 0$$
$$\Leftrightarrow d = 0 \quad \Rightarrow \underline{\pi \equiv x + 2y + z = 0}$$

b) $V_1(1,1,2)$ et $V_2(0,1,4)$

$$V_d = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (2;-4;1)$$

$$\Rightarrow \pi \equiv 2x - 4y + z + d = 0$$
$$\equiv 2.1 - 4(-1) + 2 + d = 0$$

car passe par $(1;-1;2)$

$$\Rightarrow d = -8$$

$$\Rightarrow \underline{\pi \equiv 2x - 4y + z - 8 = 0}$$

c) $d \begin{cases} x + 3y - z = 7 \\ 3x - 2y + 2z = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \bar{V_1} = (1;3,-1) \\ \bar{V_2} = (3;-2;2) \end{matrix}$

$$\bar{V_d} = \bar{V_1} \times \bar{V_2} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (6-2); -(2+1); (-2-9)$$
$$= (4;-3;-11)$$

$$\pi = 4x - 3y - 11z + d = 0$$
$$\Leftrightarrow -6 - 22 = -d \quad \Rightarrow d = 28 \Rightarrow \underline{\pi = 4x - 3y - 11z + 28 = 0}$$

② $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 7x + 10}$ $\quad \Delta = 9 \quad \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} = \frac{7 \pm 3}{2} \begin{matrix} \nearrow 5 \\ \searrow 2 \end{matrix} \Rightarrow \dfrac{1}{x^2 - 7x + 10} \stackrel{DFS}{=} \dfrac{A}{(x-5)} + \dfrac{B}{(x-2)}$

$$= A(x-2) + B(x-5)$$
$$= x(A+B) - 2A - 5B$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{3}\int_3^4 \frac{dx}{x-5} - \frac{1}{3}\int_3^4 \frac{dx}{x-2} \qquad \begin{cases} A + B = 0 \\ -2A - 5B = 1 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{3}\Big[\ln(x-5)\Big]_3^4 - \frac{1}{3}\Big[\ln(x-2)\Big]_3^4 \Rightarrow \begin{cases} A = -B \\ 2B - 5B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1/3 \\ B = 1/3 \end{cases}$$

$$= -\frac{1}{3}\Big(\underbrace{\ln(1)}_{0} - \ln(2)\Big) - \frac{1}{3}\Big(\ln(2) - \underbrace{\ln(1)}_{0}\Big)$$

$$= \underline{-\frac{2}{3}\ln(2)}$$

(3)
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&2\\ 1&-1&1&-1\\ 1&3&1&5\end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 \to L_2-L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1\end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&2\\ 0&-2&0&-3\\ 0&2&0&3\end{array}\right] \text{ même info}$$

$$\underset{L_2 \to L_2 - L_3}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&2\\ \cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}\\ 0&2&0&3\end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \to L_1 - L_2 \\ L_3 \to L_3/2\end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1&0&1&1/2\\ 0&1&0&3/2\end{array}\right] \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x+z = 1/2 \\ y = 3/2\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{l} z = 1/2 - x \\ y = 3/2\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \underline{S = \{(x, 3/2, 1/2 - x)\} \quad x \in \mathbb{R}}$$

(4) $f(x) = \sqrt{x^2+1} + x \qquad CE: x^2+1 \geq 0 \to x \in \mathbb{R}$

$\to$ pas d'AV car pas de points hors du domaine

AH: $\displaystyle \lim_{x \to \pm\infty} \left(\sqrt{x^2+1} + x\right) \begin{array}{|l} = +\infty + \infty = +\infty \to \text{pas d'AH en } +\infty \\ \\ = +\infty - \infty \quad FI \end{array}$

$$= \lim_{-\infty} \sqrt{x^2+1} + x \cdot \frac{(\sqrt{x^2+1} - x)}{(\sqrt{x^2+1} - x)} = \lim_{-\infty} \frac{(x^2+1) - x^2}{\sqrt{x^2+1} - x} = \frac{1}{\sqrt{x^2}} = \frac{1}{-\infty} = 0^-$$

$\to \underline{AH \equiv y = 0 \text{ en } -\infty}$

AO: $$\lim_{\pm\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + 1\right) = \lim_{\pm\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x} + 1\right)$$

$$= \frac{\cancel{|x|}\sqrt{1+0}}{\cancel{x}} + 1 = 2 = m \to AO$$

$$p = \lim_{\pm\infty} \left(\sqrt{x^2+1} + x\right) - 2x = \sqrt{x^2+1} - x = |x|\sqrt{1 + 1/x^2} - x$$

$$= |x| - x = 0$$

$\to \underline{AO \equiv y = 2x}$

(5)
$f(x) = \sin(x) \quad f(0) = 0$
$f'(x) = \cos(x) \quad f'(0) = 1$
$f''(x) = -\sin(x) \quad f''(0) = 0$
$f'''(x) = -\cos(x) \quad f'''(0) = -1$
$f^4(x) = \sin(x) \quad f^4(0) = 0$
$f^5(x) = \cos(x) \quad f^5(0) = 1$

$$P = 0 + \frac{1(x-0)}{1!} + 0 + (-1)\frac{(x-0)^3}{3!} + 0 + \frac{1(x-0)^5}{5!}$$

$$= 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!}$$

$$= \underline{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}}$$

⑥ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x) - x}{x^2} = \dfrac{0}{0}$ FI $\to$ L'Hospital

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sin(x) - x)'}{(x^2)'} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x) - 1}{2x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-\sin(x)}{2}$

$= -\dfrac{\sin(0)}{2} = 0$

⑦ $M = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $M^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 2 & 1 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$ mineur de ① $= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix} = -b$

etc .....

$\Rightarrow \operatorname{cof}(M^t) = \begin{pmatrix} -b & 0 & ab \\ 0 & 0 & -b \\ 1 & -1 & 2-a \end{pmatrix}$ et $\det(M) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & b \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} a & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

$= -b$

$\Rightarrow M^{-1} = \dfrac{\operatorname{cof}(M^t)}{\det(M)}$ $\Rightarrow$ CE: $\underline{b \neq 0}$

$= \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{b} & \frac{1}{b} & \frac{a-2}{b} \end{pmatrix}}$

⑧ a) $\dfrac{1-3x}{1-x} \geq 2$ CE: $1 - x \neq 0$ $\Rightarrow x \neq 1$

$1 - 3x \geq 2(1-x)$

$1 - 3x \geq 2 - 2x$

$-3x + 2x \geq 2 - 1$

$\underline{x \leq -1}$

$\to$ dom $f =]-\infty; -1] \cup]1; +\infty[$

b) $|x^2 - 2x - 7| = 8$

$\begin{cases} x^2 - 2x - 7 = 8 \\ x^2 - 2x - 7 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 64 \\ \Delta = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 - 2x - 15 = 0 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases}$

$x_{1,2} = \dfrac{2 \pm 8}{2}$ ↗ 5, ↘ -3

$x_{3,4} = \dfrac{2 \pm 0}{2}$ ↗ 1

$\to \underline{Sol = \{-3; 1; 5\}}$

c) $\log_2(-2x+3) = \log_2(x^2 - 4x) - 2$ CE: $-2x + 3 > 0$ et $x^2 - 4x > 0$

$\Rightarrow x < 3/2$

$\Leftrightarrow \log_2\left(\dfrac{-2x+3}{x^2+4x}\right) = -2$ $\Rightarrow 0 > x$

		0		4	
x	$-$	0	$+$		$+$
$x-4$	$-$		$-$	0	$+$
	$+$		$-$		$+$

$\Leftrightarrow \dfrac{-2x+3}{\dots} = 1/4$ $\Rightarrow x^2 + 4x - 12 = 0$ $\Delta = 64$ $x_{1,2} = \begin{cases} 2 \\ -6 \end{cases}$

(9) a) $8!$ (pas de contraintes) $= 46\,233$

b) - entre eux, il y a $5!$ possibilités de s'assoir

- il y a 4 possibilités pour qu'ils soient assis à côtés

- il y a $3!$ possibilités pour les personnes restantes

Donc $4 \cdot 5! \cdot 3! = 2880$

c) - il y a 2 possibilités pour chaque couple donc 2^4 possibilités

- il y a $4!$ possibilités d'emplacement des couples

Donc $4! \cdot 2^4 = 384$

MATH-F-112 : Examen juin 2020 ModuleT

1) Quelle est la longueur de la courbe donnée par la paramétrisation suivante ?

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto (\cos(3t), \sin(3t), 4t)$$

solution : 5

2) Que vaut le déterminant de la matrice suivante ?

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$$

solution : $1 - (a^2 + b^2 + c^2) + 2abc$

3) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 2x^2 + 5y^3$

Quelle est la direction de plus grande pente au point (1, -1) ?

solution : (4, 15)

4) Que vaut $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(4x) + 3x}{x^2}$?

solution : Elle n'existe pas

5) Calculer le produit vectoriel suivant : (1, 3, 7) x (4, 6, 7)

solution : (-21, 21, -6)

6) Calculer l'intégrale suivante, où D est le disque centré en (0, 0) et de rayon 1.

$$\iint_D \frac{x^2 + y^2 + 6}{\pi} dxdy$$

solution : 6,5

7) Quels types d'asymptotes possède cette fonction ?

$$f : dom(f) \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{10x^2 + 7}{5x + 6}$$

solution : f possède une asymptote verticale et une asymptote oblique

8) Que vaut la pente de la droite d'équation 9x + 4y = 2 avec une précision de 0,01 ?

solution : -2,25

9) Dans le champ des nombres complexes, que vaut $(1+\sqrt{3}i)^9$?

solution : -512

10) Soit l'équation différentielle y'' + 3y' + 2y = 0. Résoudre le problème de Cauchy y(0) = 4 et y'(0) = 7. En déduire la valeur de y''(0).

solution : -29

Module S juin 2020 – Michele D'Adderio
Note: cette année l'examen s'arrêtait aux suites à cause du covid-19.

1. L'intégrale $\int_\gamma F(\ x, y) \cdot \boldsymbol{ds}$ où $F(x,y) = (y,x)$ et γ et l'arc de cubique déterminé par $y = x^3 + x^2 + x + 1$, $0 \leq x \leq 1$, vaut :

- 1
- -4
- 0
- -1
- 4

2. La suite $(a_n)_{n\in N}$ définie par $a_n = (-\frac{1}{3})^n$

- est décroissante et convergente
- n'est ni croissante ni décroissante mais convergente
- est croissante et divergente
- est croissante et convergente
- n'est ni croissante ni décroissante et diverge

3. Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n\, n^3+2n}{4n^3-5}$?

- 1/4
- 0
- Elle n'existe pas
- +∞
- -1/4

4. Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right)$?

- +∞
- 0
- 1
- Elle n'existe pas
- -1

5. Soit *D* le disque de rayon 1 centré à l'origine. L'intégrale $\iint_D (y^2 - 2x)\, dx\, dy$ est égale à :

- $\oint_C (2xydx + xy^2\, dy)$ où C est le cercle paramétré par $(\cos t\, , \sin t), t \in [0,2\pi]$
- 0
- $\oint_C (2xdx + 2dy)$ où C est le cercle paramétré par $(\cos t\, , \sin t), t \in [0,2\pi]$
- $\oint_C (2xdx + 2dy)$ où C est le cercle paramétré par $(-\cos t\, , \sin t), t \in [0,2\pi]$
- $\oint_C (2xydx + xy^2\, dy)$ où C est le cercle paramétré par $(-\cos t\, , \sin t), t \in [0,2\pi]$

6. Un potentiel pour $f(x,y,z) = (e^x, z, y + 2z)$ est :

- $F(x,y,z) = yz^2e^x$
- $F(x,y,z) = (e^x, 0,2)$
- $F(x,y,z) = e^x + yz + z^2$

- $F(x,y,z) = e^x + 2$
- $F(x,y,z) = (e^x, yz, yz + z^2)$

7. Les courbes de niveau de $F(x,y) = \exp\left(\frac{y}{x^2+1}\right)$ sont :

- uniquement des paraboles
- des cercles
- des droites
- des paraboles et une droite
- des hyperboles

8. On considère la suite définie par la récurrence suivante :

$a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ pour tout $n \geq 2$
Calculer a_{12}.

- 12
- 233
- 377
- 11
- 144

9. La valeur au point (1,0,0) du rotationnel de $F(x,y,z) = (y + x, z^2, -5)$ est :

- (0,0,-1)
- n'existe pas
- (-2,0,-1)
- 0
- -1

10. Considérons les fonctions $f(x) = 3x$ et $g(x) = -(x-1)^2 + 3$. Calculer l'aire du domaine délimité par ces deux fonctions et le côté positif de l'axe des abscisses.

- $-2\sqrt{3} - \frac{3}{2}$
- $\sqrt{3} + 3$
- $\sqrt{3} - 3$
- $2\sqrt{3} + \frac{3}{2}$
- $2\sqrt{3} - \frac{3}{2}$

Module S juin 2020 – Michele D'Adderio Correction

1. 4

2. N'est ni croissante ni décroissante mais convergente

3. Elle n'existe pas

4. $+\infty$

5. $\oint_C (2xydx + xy^2\, dy)$ où C est le cercle paramétré par $(\cos t\ , \sin t), t \in [0,2\pi]$

6. $F(x,y,z) = e^x + yz + z^2$

7. Des paraboles et une droite

8. 233

9. (0,0,-1)

10. $2\sqrt{3} - \frac{3}{2}$

Question 1

Terminer

Noté sur 2,00

Marquer la question

On considère la suite définie par la récurrence suivante :

$a_0 = 3, a_n = -a_{n-1} + 3$ pour tout $n \geq 1$.

Calculer a_5.

Veuillez choisir une réponse :

1. 3
2. 0
3. 9
4. 10
5. 6

La réponse correcte est : 0

Question 2

Terminer

Noté sur 2,00

Marquer la question

On considère la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-6n-1}{n+1000}$.

Laquelle des affirmations suivantes est-elle vraie?

Veuillez choisir une réponse :

i. La série converge car le numérateur est beaucoup plus petit que le dénominateur

ii. La série converge car son terme général tend vers 0

iii. La série est divergente car son terme général ne tend pas vers 0

iv. La série ne converge pas absolument mais converge simplement

v. La série est convergente et cela peut se voir par le critère de la racine

La réponse correcte est : La série est divergente car son terme général ne tend pas vers 0

Question 3

Terminer

Noté sur 2,00

Marquer la question

La valeur au point $(0, 0, -1)$ du rotationnel de $F(x, y, z) = (y + x, z^2, -5)$ est :

Veuillez choisir une réponse :

1. $(-2, 0, -1)$
2. n'existe pas
3. $(2, 0, -1)$
4. 0
5. 1

La réponse correcte est : $(2, 0, -1)$

Question 4

Terminer

Noté sur 2,00

Marquer la question

Un potentiel pour $f(x, y, z) = ((2x + 1)y, x^2 + x, 3z^2)$ est :

Veuillez choisir une réponse :

1. $F(x, y, z) = (x^2, y, z^3)$
2. $F(x, y, z) = 2y + 1 + 6z$
3. $F(x, y, z) = (yx^2, yx, z^3)$
4. $F(x, y, z) = yx(x + 1) + z^3$
5. $F(x, y, z) = 2y + 6z$

La réponse correcte est : $F(x, y, z) = yx(x + 1) + z^3$

Question 5

Terminer

Noté sur 2,00

Marquer la question

On considère dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$ les vecteurs suivants:

$(1, 0, 0)$ et $(2, 0, 2)$.

Lequel des vecteurs suivants peut-on ajouter aux deux vecteurs précédents afin de constituer une base de notre espace vectoriel?

Veuillez choisir une réponse :

- a. $(2, 0, 1)$
- b. $(1, 0, 3)$
- c. $(0, 0, 0)$
- d. $(2, 0, 0)$
- e. $(0, -1, 0)$

La réponse correcte est : $(0, -1, 0)$

Question 6

Terminer

Noté sur 2,00

Marquer la question

La surface $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ peut être paramétrisée par

Veuillez choisir une réponse :

- I. les coordonnées sphériques : $x = \sin\theta\cos\phi$, $y = \sin\theta\sin\phi$, $z = \cos\theta$, avec $0 \leq \phi \leq 2\pi$ et $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$
- II. les coordonnées cartésiennes : $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ et $z \geq 0$
- III. les coordonnées sphériques : $x = \sin\theta\cos\phi$, $y = \sin\theta\sin\phi$, $z = \cos\theta$, avec $0 \leq \phi \leq 2\pi$ et $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$
- IV. les coordonnées cylindriques : $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$, $z = z$, avec $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $z \geq 0$
- V. les coordonnées cartésiennes : $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$ et $z \geq 0$

La réponse correcte est : les coordonnées sphériques : $x = \sin\theta\cos\phi$, $y = \sin\theta\sin\phi$, $z = \cos\theta$, avec $0 \leq \phi \leq 2\pi$ et $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

Question 7

Terminer

Noté sur 2,00

Marquer la question

On considère dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ la base B suivante:

$e_1 = (2, 1), e_2 = (1, 1).$

On considère ensuite la nouvelle base B' constituée des vecteurs:

$f_1 = (3, 3), f_2 = (3, 1).$

Laquelle des matrices suivantes est-elle la matrice de changement de base permettant de passer de B à B'?

Veuillez choisir une réponse :

- a. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$
- b. $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$
- c. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$
- d. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$
- e. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$

La réponse correcte est : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$

Question 8

Terminer

Noté sur 2,00

Marquer la question

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire dont la matrice dans la base canonique est la suivante:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Voici deux affirmations:

Affirmation A: Le vecteur $(0, 1)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$.

Affirmation B: $\lambda = 3$ est une valeur propre.

Parmi les quatre propositions suivantes, laquelle est vraie?

Veuillez choisir une réponse :

- ○ A et B sont toutes deux fausses.
- ○ Seule A est vraie.
- ◉ Seule B est vraie.
- ○ A et B sont toutes deux vraies.

La réponse correcte est : A et B sont toutes deux vraies.

Question 9

Terminer

Noté sur 2,00

Marquer la question

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_n = e^{3n+1}$

Veuillez choisir une réponse :

- ○ 1. n'est ni croissante ni décroissante et diverge
- ○ 2. est croissante et convergente
- ◉ 3. est croissante et non bornée
- ○ 4. n'est ni croissante ni décroissante mais convergente
- ○ 5. est non bornée et convergente

La réponse correcte est : est croissante et non bornée

Question 10

Terminer

Noté sur 2,00

Marquer la question

L'intégrale $\iint_S dS$, où
$S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \leq 0\}$, vaut

Veuillez choisir une réponse :

- A. -2π
- B. 2π
- C. 0
- D. $\frac{\pi}{2}$
- E. π

La réponse correcte est : 2π

Examen de MATH F-112 de Janvier 2022 – MATHÉMATIQUES

CORRIGE

NOM PRÉNOM:

MATRICULE:

SECTION:

Exercice 1		/14
Exercice 2		/20
Exercice 3		/16
Exercice 4		/20
Exercice 5		/15
Exercice 6		/15
Total		/100

ATTENTION:
1. Vous ne pouvez sortir de la salle sans remettre définitivement votre copie ni sans autorisation.
2. Toute calculatrice et tout objet connecté (même éteint) sont formellement interdits. Les seuls documents autorisés sont ceux que nous vous fournissons.

Toute tentative de fraude ou de communication sera sévèrement sanctionnée.

1. Ecrivez immédiatement vos **nom, prénom et matricule** sur cette page.
2. Des feuilles de brouillon sont accessibles à la fin de la copie.
Vous n'avez pas le droit à vos propres feuilles de brouillon.
Les brouillons ne seront en aucun cas lus ni corrigés.
3. **Ne dégrafez pas** les feuilles !
4. Les réponses doivent être **soigneusement justifiées** sauf mention expresse du contraire.
5. Ecrivez lisiblement et soignez la présentation de vos réponses.
6. Vous pouvez écrire vos réponses **au verso des pages** et **au crayon** mais **pas en rouge**.
7. L'examen dure **3 heures**.

EXERCICE 1

(a) (/4) Enoncer la formule du binôme de Newton.
(b) (/5) Aotearoa est le nom d'origine de la Nouvelle Zélande. Combien de mots peuvent être obtenus en réarrangeant les lettres du mot AOTEAROA ?
(c) (/5) Vérifier la parité de la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto | \cos(3x) |$$

et donner sa (plus petite) période.

Réponse question 1 :

(a)

Résultat (Formule du binôme de Newton)

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$
$$= \binom{n}{0} y^n + \binom{n}{1} x y^{n-1} + \binom{n}{2} x^2 y^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1} x^{n-1} y + \binom{n}{n} x^n$$
$$= y^n + \binom{n}{1} x y^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1} x^{n-1} y + x^n.$$

(b) On a 8 lettres parmi lesquelles deux se répètent : A, 3 fois, et O, 2 fois. On peut donc obtenir

$$\frac{8!}{3!\ 2!} = \frac{8.7.6.5.\overset{2}{\cancel{4}}.\cancel{3}.\cancel{2}}{\cancel{3}.\cancel{2}\ .\ \cancel{2}} = ((7.6).8).10 = (42.8).10$$
$$= 3360$$

Réponse question 1 (suite):

mots en réarrangeant les lettres du mot AOTEAROA

1(c) Parité : $\forall x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(-x) = |\cos(3.(-x))| = |\cos(-3x)|$$

$$= |\cos(3x)|$$

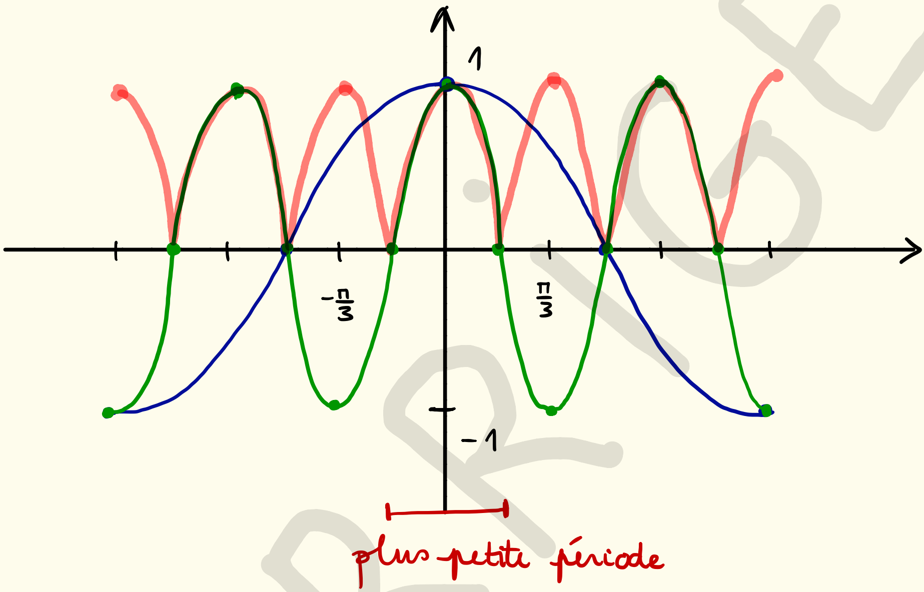
$$(\text{puisque } \cos(-t) = \cos(t) \ \forall t \in \mathbb{R})$$

$$= f(x)$$

Donc f est paire.

Périodicité : La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est périodique de période 2π donc la fonction $x \mapsto \cos(3x)$ est périodique de période $\frac{2\pi}{3}$ et la fonction $x \mapsto |\cos(3x)|$

de période $\dfrac{\frac{2\pi}{3}}{2} = \dfrac{\pi}{3}$



EXERCICE 2

(a) (/8) Enoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwar z.

(b) (/3) Vérifier l'inégalité de Cauchy-Schwar z avec les vecteurs $(2, 1, -1)$ et $(-1, 2, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.

(c) (/9) Dans $\mathbb{R}^3$, donner l'équation cartésienne du plan Π parallèle à la droite d'équations

$$D_1 \equiv 1 - x = \frac{y-2}{2} = z - 1$$

et passant par la droite d'équations

$$D_2 \equiv \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t + 9 \\ z = 3 - t \end{cases} .$$

Réponse question 2 :

(a)

Résultat (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Pour tous ***vecteurs*** $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ *de* $\mathbb{R}^n$*, on a*

$$\left|\left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right\rangle\right| \leq \left\|\overrightarrow{a}\right\| \left\|\overrightarrow{b}\right\|.$$

Réponse question 2 (suite) :

Proof. $t \in \mathbb{R}$

(3) Pour tout nombre réel t, on calcule la quantité $\langle \vec{a} + t\vec{b}, \vec{a} + t\vec{b} \rangle$. Elle est positive par définition du produit scalaire. Nous pouvons la ré-écrire grâce à la bilinéarité sous la forme :

(1) + (2)

$$\langle (\vec{a} + t\vec{b}), (\vec{a} + t\vec{b}) \rangle = \langle \vec{a}, (\vec{a} + t\vec{b}) \rangle + t\langle \vec{b}, (\vec{a} + t\vec{b}) \rangle$$

$= \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + t\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$

$+ \underbrace{t\langle \vec{b}, \vec{a} \rangle}_{\mathrm{sym}(2)} + t.t\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle$

$$= \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle t + t^2 \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle$$

$$= \|\vec{a}\|^2 + 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle t + t^2 \|\vec{b}\|^2 \geq 0$$

$A + Bt +$ en t Ct^2

Mais cette expression est un polynôme du second degré. Si elle est positive pour toute valeur de t c'est que son discriminant est négatif:

$B^2 - 4AC$

$$(2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle)^2 - 4\|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 \leq 0$$

qui donne alors:

$$\cancel{4}|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leq \cancel{4}\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|$$

qui est l'inégalité annoncée. □

(b) On calcule

$$|\langle (2,1,-1), (-1,2,1) \rangle| = |2.(-1) + 1.2 + (-1).1|$$
$$= |-2 + 2 - 1|$$
$$= |-1|$$
$$= 1,$$

$$\|(2,1,-1)\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$$

et $\|(-1,2,1)\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}$

On a bien

$$|\langle(2,1,-1),(-1,2,1)\rangle| = 1$$

$$\leq 6 = \sqrt{6}.\sqrt{6} = \|(2,1,-1)\|.\|(-1,2,1)\|,$$

comme l'affirme l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

(c) On a

$$D_1 \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1}$$

donc D_1 a un vecteur directeur $(-1,2,1)$.

Sur base de ses équations paramétriques, D_2 a un vecteur directeur $(2,1,-1)$.

Comme π est parallèle à D_1 et D_2, un vecteur normal de π est donné par

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-1 \\ 2-1 \\ -1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$(3,-1,5)$ est également un vecteur normal à Π.

Comme Π passe par D_2, tout point de D_2 appartient à Π.

On a, par exemple, $(1,9,3) \in \Pi$.

Donc

$$\Pi \equiv 3(x-1) - (y-9) + 5(z-3) = 0$$

c'est-à-dire

$$\Pi \equiv 3x - y + 5z - 6 = 0$$

ou $\Pi \equiv 3x - y + 5z = 6$.

EXERCICE 3

(a) (/8) Donner l'ensemble S des solutions à l'équation

$$2 - x = \log_3(3^x - 8).$$

(b) (/8) Donner l'ensemble T des solutions à l'équation

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x = 1.$$

Réponse question 3 :

(a) Conditions d'existence :

$3^x - 8 > 0$

Sous les conditions d'existence, on a

$2 - x = \log_3(3^x - 8)$

$\Leftrightarrow 3^{2-x} = 3^x - 8$

$\Leftrightarrow \dfrac{3^2}{3^x} = 3^x - 8$

$\Leftrightarrow 9 = (3^x)^2 - 8 \cdot 3^x$

$\Leftrightarrow (3^x)^2 - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$

Réponse question 3 (suite) :

En posant $t = 3^x$ on obtient

$t^2 - 8t - 9 = 0$

$\Leftrightarrow (t-9)(t+1) = 0$

$\Leftrightarrow t = 9$ ou $t = -1$

Comme $t = 3^x > 0$, on rejette $t = -1$ et

on obtient $3^x = 9$ donc $x = 2$.

Cette solution satisfait les conditions

d'existence.

On a $S = \{2\}$.

(b) $1\cos x + \sqrt{3}\sin x = 1$

$\iff \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \frac{1}{2}$

(en divisant par $\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$)

$\iff \sin\frac{\pi}{6}\cos x + \cos\frac{\pi}{6}\sin x = \frac{1}{2}$

$\iff \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

$\iff x+\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x+\frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

(avec $k \in \mathbb{Z}$)

$\iff x = 2k\pi$ ou $x = \frac{4\pi}{6} + 2k\pi$

$= \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

On a

$T = \left\{2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

EXERCICE 4

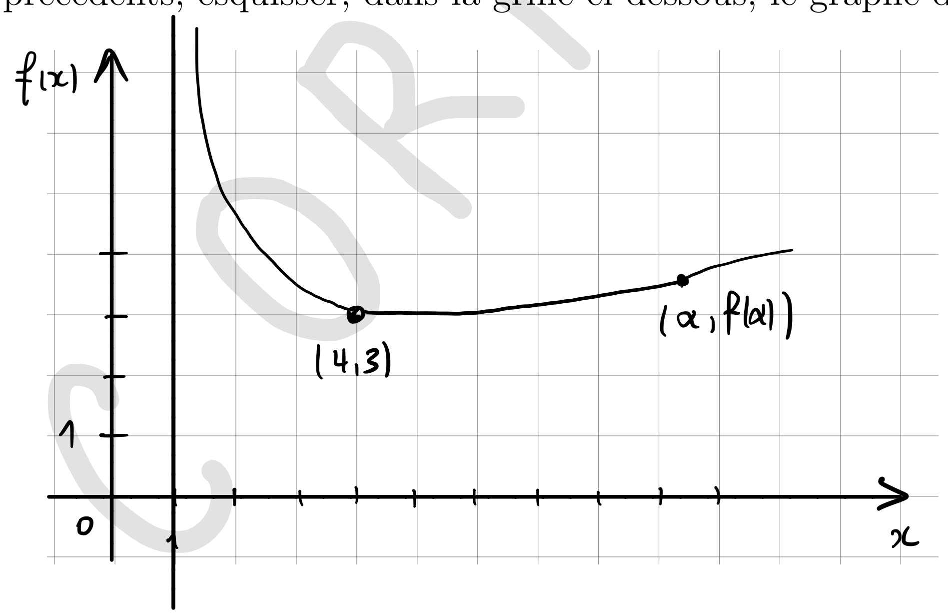
Considérer la fonction réelle donnée par $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+x+7}{x-1}}$.

(a) (/3) Déterminer le (plus grand) domaine de f.
(b) (/3) Montrer que $\frac{x^2+x+7}{x-1} = x + 2 + \frac{9}{x-1}$.
(c) (/5) La fonction f admet-elle des points critiques sur son domaine ? Si oui, trouver leurs coordonnées et les caractériser.
(d) (/5) Déterminer les asymptotes de f s'il en existe.
(e) (/4) Voici le tableau de variation de f'' :

x		1		α	
$f''(x)$			$+$	0	$-$

où $\alpha \approx 9,39$ et $f(\alpha) \approx 3,53$.

En utilisant ce tableau et les informations collectées aux points précédents, esquisser, dans la grille ci-dessous, le graphe de f.



Réponse question 4 :

(a) Le delta de x^2+x+7 est $1^2-4.7=-27<0$ et son coefficient de tête est $1>0$ donc $x^2+x+7<0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Réponse question 4 (suite) :

		1	
$x-1$	$-$	0	$+$
x^2+x+7	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{x^2+x+7}{x-1}$	$-$	$\|\|$	$+$

$$\text{dom} f = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2+x+7}{x-1} \geq 0 \right\}$$

$$= \left]1, +\infty\right[$$

(b) $$x+2+\frac{9}{x-1} = \frac{(x+2)(x-1)+9}{x-1}$$

$$= \frac{x^2+2x-x-2+9}{x-1}$$

$$= \frac{x^2+x+7}{x-1}$$

(c) Pour tout $x \in]1, +\infty[$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2+x+7}{x-1}}} \cdot \left(\frac{x^2+x+7}{x-1}\right)'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2+x+7}{x-1}}} \cdot \left(x+2+\frac{9}{x-1}\right)'$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2+x+7}{x-1}}}}_{>0} \cdot \left(1 - \frac{9}{(x-1)^2}\right)$$

On a $f'(x) = 0$ lorsque $\frac{9}{(x-1)^2} = 1$

$$\iff (x-1)^2 = 9$$

$$\iff x-1 = \pm 3$$

$$\iff x = \begin{cases} -2 \\ 4 \end{cases}$$

Comme $-2 \notin \operatorname{dom} f$, on a un unique point critique en $x = 4$.

Les coordonnées du point du graphe ayant cette abscisse sont $(4, f(4)) = \left(4, \sqrt{\frac{16+4+7}{4-1}}\right)$

$$= (4, 3)$$

x	1		4	
f'	‖	$-$	0	$+$
f	‖	↘	(4,3) est un minimum local de f	↗

(d) Asymptotes verticales ?

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \sqrt{\underbrace{x+2}_{\to 3}+\underbrace{\frac{9}{x-1}}_{\to +\infty}}$$

$$= +\infty$$

Asymptote verticale en $x = 1$

Asymptotes horizontales ?

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\underbrace{x+2}_{+\infty} + \underbrace{\frac{9}{x-1}}_{0}}$$

$$= +\infty$$

Pas d'asymptote horizontale

Asymptotes obliques ?

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+2+\frac{9}{x-1}}}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x+2+\frac{9}{x-1}}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{9}{x^2(x-1)}} = 0$$

Pas d'asymptote oblique

EXERCICE 5

(a) (/5) Enoncer le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral.

(b) (/10) Calculer l'intégrale définie suivante :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sin^2 x - 4}.$$

Réponse question 5 :

(a)

Theorem (Théorème fondamental)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit a un point de I.

$a \in I$

Alors la fonction

$$F : I \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en $x = a$.

(b)

$$\int \frac{\cos x\, dx}{\sin^2 x - 4} = \int \frac{dt}{t^2-4} = \cdots$$

$t = \sin x$

$dt = \cos x\, dx$

$$\frac{1}{t^2-4} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t-2}$$

$$= \frac{A(t-2)+B(t+2)}{(t+2)(t-2)}$$

$$= \frac{(A+B)t + 2(B-A)}{t^2-4}$$

Réponse question 5 (suite) :

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2(B-A)=1 \end{cases} \iff \begin{cases} A+B=0 & (1) \\ B-A=\frac{1}{2} & (2) \end{cases}$$

$(1)+(2)$: $2B=\frac{1}{2} \iff B=\frac{1}{4}$

Dans (1) : $A=-B=-\frac{1}{4}$

$$\cdots = \int \frac{dt}{t^2-4} = \int\left(\frac{\frac{-1}{4}}{t+2}+\frac{\frac{1}{4}}{t-2}\right)dt$$

$$= -\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t+2}+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t-2}$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|t+2|+\frac{1}{4}\ln|t-2| + cst$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + cst$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin x-2}{\sin x+2}\right| + cst$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \, dx}{\sin^2 x - 4}$$

$$= \left[\frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sin x - 2}{\sin x + 2} \right| \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sin \frac{\pi}{2} - 2}{\sin \frac{\pi}{2} + 2} \right| - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sin 0 - 2}{\sin 0 + 2} \right|$$

$$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1-2}{1+2} \right| - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{-2}{2} \right|$$

$$= \frac{1}{4} \ln \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ln 1$$

$$= \frac{1}{4} \ln \frac{1}{3}$$

$$\left(= -\frac{1}{4} \ln 3 \right).$$

EXERCICE 6

(a) (/10) Montrer, par récurrence, que la n-ième dérivée de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto xe^{-x}$ est

$$f^{\underline{n}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (-1)^n e^{-x}(x-n)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) (/5) Donner la série de Taylor de la fonction f autour de $x = 0$.

Réponse question 6 :

(a) Initialisation : $n=0$

$$f^{\underline{0}}(x) = f(x) = xe^{-x} = (-1)^0 e^{-x}(x-0)$$

Hypothèse de récurrence :

$$f^{\underline{n}}(x) = (-1)^n e^{-x}(x-n) \quad \text{pour un } n \in \mathbb{N}$$

Étape de récurrence :

$$f^{\underline{n+1}}(x) = \left(f^{\underline{n}}(x)\right)' = \left((-1)^n e^{-x}(x-n)\right)'$$

$$= (-1)^n(-1)e^{-x}(x-n) + (-1)^n e^{-x} \cdot 1$$

$$= (-1)^{n+1} e^{-x}(x-n) - (-1)^{n+1} e^{-x}$$

$$= (-1)^{n+1} e^{-x}\left[(x-n) - 1\right]$$

$$= (-1)^{n+1} e^{-x}\left(x-(n+1)\right) \qquad \text{CQFD}$$

Réponse question 6 (suite) :

(b) La série de Taylor de f autour de 0 est

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n}(0)}{n!}(x-0)^n = \overset{\overset{0}{\shortparallel}}{f(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{n}(0)}{n!} x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-0}(0-n)}{n!} x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!} x^n$$

Examen de MATH F-112
2ième Quadrimestre
13 Juin 2022

NOM:
PRÉNOM:
MATRICULE:
SECTION:

Exercice 1		/25
Exercice 2		/25
Exercice 3		/25
Exercice 4		/25
Total		/100

<u>ATTENTION</u>:
1. Vous ne pouvez pas sortir de la salle sans remettre définitivement votre copie, ni sans autorisation.
2. Toute calculatrice et tout objet connecté (même éteint) sont formellement interdits. Les seuls documents autorisés sont ceux que nous vous fournissons.

<u>Toute tentative de fraude ou de communication sera sévèrement sanctionnée.</u>

1. Ecrivez immédiatement vos **nom, prénom, matricule et section** sur cette page.
2. Des feuilles de brouillon sont accessibles à la fin de la copie.
Vous n'avez PAS le droit à vos propres feuilles de brouillon.
Les brouillons ne seront en aucun cas lus ni corrigés.
3. **Ne dégrafez pas** les feuilles !
4. Les réponses doivent être **soigneusement justifiées** sauf mention expresse du contraire.
5. Ecrivez lisiblement et soignez la présentation de vos réponses.
6. Vous pouvez écrire vos réponses **au verso des pages** et **au crayon** mais **pas en rouge**.
7. L'examen dure **2 heures**.

EXERCICE 1

(a) (/6) Trouver l'ensemble T des solutions complexes à l'équation

$$t^2 - 2t + 2 = 0.$$

(b) (/9) A l'aide du point (a), trouver l'ensemble S des solutions complexes à l'équation

$$z^6 - 2z^3 + 2 = 0.$$

(c) (/10) Enoncer et démontrer la formule de De Moivre.

Réponse question 1 :

(a) $t^2 - 2t + 2 = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4.2 = 4 - 8 = -4$

Les racines complexes de -4 sont $\pm 2i$

$t_{\frac{1}{2}} = \dfrac{-(-2) \pm 2i}{2} = \dfrac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$

On trouve $T = \{1+i, 1-i\}$

(b) Posons $t = z^3$.

On a $z^6 - 2z^3 + 2 = 0 \iff t^2 - 2t + 2 = 0$

Donc, par (a),

$z^3 = t = 1 \pm i$

Réponse question 1 (suite):

$$1+i = \sqrt{2}\ e^{i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}$$

$$1-i = \sqrt{2}\ e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

$$z = \rho e^{i\theta} \Rightarrow z^3 = \rho^3 e^{i3\theta}$$

$$\rho^3 = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \rho = 2^{\frac{1}{6}}$$

$$3\theta = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3}$$

On trouve

$$S = \left\{ 2^{\frac{1}{6}} e^{i\psi} : \psi = \frac{\pi}{12} \text{ ou } -\frac{\pi}{12} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} \text{ ou } \frac{7\pi}{12} \text{ ou } \frac{17\pi}{12} \text{ ou } \frac{5\pi}{4} \right\}$$

(c) Formule de De Moivre :

$$(\rho \exp(i\theta))^n = \rho^n \exp(in\theta) \qquad \forall\, n \geq 1$$

Démonstration :

- Cas de base : $n=1$

$$(\rho\exp(i\theta))^1 = \rho\exp(i\theta) = \rho^1\exp(i\,1.\theta)$$

- Supposons que

$$(\rho\exp(i\theta))^n = \rho^n\exp(in\theta)$$

pour un certain $n \geq 1$ fixé.

- $(\rho\exp(i\theta))^{n+1}$

$$= \rho\exp(i\theta) . (\rho\exp(i\theta))^n$$

$$= \rho\exp(i\theta) . \rho^n\exp(in\theta)$$

(par hypothèse de récurrence)

$$= \rho.\rho^n\exp(i(\theta+n\theta))$$

$$= \rho^{n+1}\exp(i(n+1)\theta)$$

$\square$

EXERCICE 2

(a) (/12) Donner l'ensemble $S \subseteq \mathbb{R}^3$ des solutions au système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2x + 3y - 3z = 1 \\ -4x - 5y + 5z = 3. \\ x + 2y - 2z = 3 \end{cases}$$

(b) (/8) Calculer le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & 7 \end{pmatrix}$.

(c) (/5) Ecrire le système linéaire suivant sous forme matricielle :

$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ -3x - 4y + 7z = 0 \end{cases}$$

A l'aide du point (b) et **sans** effectuer de calculs, justifier du fait que son unique solution dans $\mathbb{R}^3$ est $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

Réponse question 2 :

(a) Appliquons la méthode de Gauss à la matrice augmentée associée au système :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -3 & 1 \\ -4 & -5 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ -4 & -5 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

Réponse question 2 (suite) :

$$\xrightarrow[L_3 \to L_3 - 2L_1]{L_2 \to L_2 + 4L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 15 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \to \frac{1}{3}L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_1 \to L_1 - 2L_2]{L_3 \to L_3 + L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Cette matrice est sous forme échelonnée réduite. Le système donné est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} x = -7 \\ y - z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7 \\ y = z + 5 \end{cases}$$

On a

$$S = \{(-7, z+5, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$

(b) En développant selon la 3^e colonne,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= -(-1) \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} + 7 \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= (-4-(-9)) + 7 . (2-3)$$

$$= 5 - 7 = -2$$

(c) La forme matricielle du système est

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Notons $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & 7 \end{pmatrix}$.

Comme $\det M \neq 0$, M est inversible donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M^{-1}.M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et l'unique solution à notre système est $(x,y,z) = (0,0,0)$.

EXERCICE 3

(a) (/4) Définir la notion de *point critique* d'une fonction différentiable $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

(b) (/14) Considérer la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^3 + y^3 + 3x^2 - 6y^2.$$

Trouver ses points critiques ET déterminer leur nature respective.

(c) (/7) Intégrer la fonction

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 7x$$

sur la région de $\mathbb{R}^2$ délimitée par les paraboles d'équations respectives $y = x^2 + 3$ et $y = 2x^2 + 2$.

Réponse question 3 :

(a) On appelle point critique de f tout point $a \in \mathbb{R}^n$ intérieur au domaine de f tel que $\nabla f(a) = \vec{0}$

Réponse question 3 (suite) :

(b) $\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right)$

$= \left(3x^2+6x, 3y^2-12y\right)$

(x,y) est un point critique de f

ssi $\nabla f(x,y) = (0,0)$

ssi $\begin{cases} 3x^2+6x=0 \\ 3y^2-12y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x(x+2)=0 \\ 3y(y-4)=0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x=0 \text{ ou } x=-2 \\ y=0 \text{ ou } y=4 \end{cases}$

On a 4 points critiques :

$(0,0), (0,4), (-2,0)$ et $(-2,4)$

Déterminons la nature de ces points critiques.

On a

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Or

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x+6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y-12$$

Donc

$\rightarrow$ $\det H_f(0,0) = \det\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} = -72 < 0$

de sorte que $(0,0)$ est un point de selle

$\rightarrow$ $\det H_f(0,4) = \det\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} = 72 > 0$

et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,4) = 6 > 0$ de sorte que $(0,4)$ est un minimum local

$\rightarrow \det H_f(-2,0) = \det\begin{pmatrix}-6 & 0\\ 0 & -12\end{pmatrix} = 72>0$

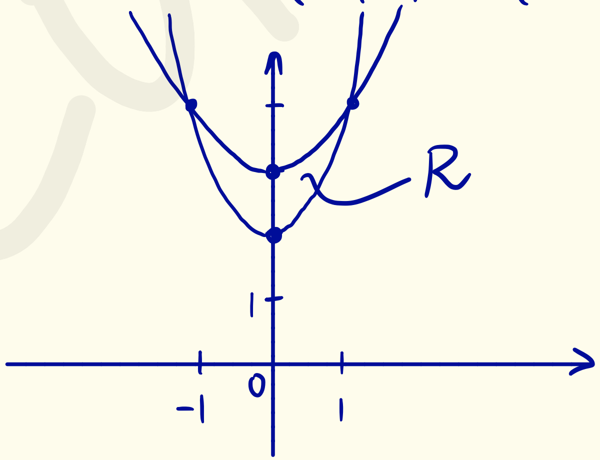
et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2,0) = -6<0$ de sorte que $(-2,0)$ est un maximum local

$\rightarrow \det H_f(-2,4) = \det\begin{pmatrix}-6 & 0\\ 0 & 12\end{pmatrix} = -72<0$

de sorte que $(-2,4)$ est un point de selle

(c) On a $x^2+3 = 2x^2+2 \iff x^2=1$

$\iff x=\pm 1$. Les deux paraboles s'intersectent en $(-1,4)$ et $(1,4)$.



Nommons R la région qu'elles délimitent

$$\iint_R 7x \, d(x,y)$$

$$= 7\int_{-1}^{1}\int_{x^2+3}^{2x^2+2} x \, dy \, dx$$

$$= 7\int_{-1}^{1} \left[xy\right]_{y=x^2+3}^{2x^2+2} dx$$

$$= 7\int_{-1}^{1} x\Big(\underbrace{2x^2+2-(x^2+3)}_{x^2-1}\Big) dx$$

$$= 7\int_{-1}^{1} (x^3-x)\, dx$$

$$= 7 \cdot \left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{x=-1}^{1}$$

$$= 7\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\right) = 0$$

EXERCICE 4

(a) (/5) Définir la notion de *problème de Cauchy*.

(b) (/5) Vérifier que

$$y_0(x) := \sin x + \cos x$$

est une solution particulière à l'équation

$$y'' - 4y' + 4y = 7\sin x - \cos x.$$

(c) (/8) Donner la solution générale à l'équation non-homogène

$$y'' - 4y' + 4y = 7\sin x - \cos x.$$

(d) (/7) Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$y'' - 4y' + 4y = 7\sin x - \cos x, \qquad y(0) = 1, y'(0) = 2.$$

Réponse question 4 :

(a) Un problème de Cauchy est la donnée d'une équation différentielle ordinaire d'ordre $n \geq 1$ $F(x, y, y', \dots, y^{n}) = 0$ définie sur un intervalle I, d'un point $x_0 \in I$, et d'une condition initiale en x_0 : $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \dots, y^{n-1}(x_0) = y_0^{n-1}$, où $y_0, y_0', \dots, y_0^{n-1}$ sont des constantes données.

Réponse question 4 (suite) :

(b) $y_0(x) = \sin x + \cos x$

$y_0'(x) = \cos x - \sin x$

$y_0''(x) = -\sin x - \cos x$

$y_0'' - 4y_0' + 4y_0$

$= -\sin x - \cos x - 4(\cos x - \sin x) + 4(\sin x + \cos x)$

$= \sin x(-1-4(-1) + 4) + \cos x(-1-4+4)$

$= 7\sin x - \cos x$

Comme requis.

(c) Equation homogène associée :

$y_H'' - 4y_H' + 4y_H = 0$

Equation caractéristique et solution :

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \iff (\lambda - 2)^2 = 0 \iff \lambda = 2$

Solution générale à l'équation homogène associée :

$$y_{SGHA}(x) = (Ax+B)e^{2x}$$

avec $A, B \in \mathbb{R}$.

Solution générale à l'équation non-homogène :

$$y(x) = (Ax+B)e^{2x} + \cos x + \sin x$$

(d) $1 = y(0) = B + 1 \iff B = 0$

$$y'(x) = 2(Ax+B)e^{2x} + Ae^{2x} - \sin x + \cos x$$

$$2 = y'(0) = 2B + A + 1 \iff A = 1 - 2B = 1$$

Solution unique au problème de Cauchy :

$$y(x) = xe^{2x} + \cos x + \sin x$$

Envi-F1001 / 5 crédits

Pendant le Q1, ce sera ton seul cours de géo ! En voyant les bases de la géographie, ça te permettra de savoir si ça te plaît et comment tu sens les années à venir :) Essaie de bien comprendre les différents concepts vus parce qu'ils te serviront de base pour la suite.
Ce cours est divisé en trois parties : Sciences de la Terre, Environnement et Société. Tu auras donc trois profs différents que tu auras sans doute tout au long de ton parcours universitaire.
La partie Sciences de la Terre est donnée par P.Regnier. Sa partie est axée sur la géographie physique. Essaie de bien assimiler les notions pour te forger une base solide ! L'examen de « Sciences de la Terre » est un QCM sans point négatif. Un conseil, essaie un maximum de faire et refaire les examens des années précédentes car les questions sont très semblables. Au Q2, tu partiras en excursion pour observer différents phénomènes naturels de la Belgique. Tu devras (comme pour chaque excursion) rendre un rapport écrit, peu de temps après l'excursion. Essaie de faire un rapport quali pour avoir des points bonus à cette partie du cours !
La partie « Environnement » est donnée par F.Pattyn que tu auras chaque année de ton bachelier. Sa partie est composée de différents concepts que tu aborderas dans ses autres cours au fil des années. L'examen est un vrai ou faux sans point négatif et il y a une ou deux questions ouvertes.
La partie « Société » est donnée par J-M Decroly. De nouveau, tu aborderas toutes sortes de notions que tu approfondiras plus tard dans d'autres cours de géographie humaine. Depuis deux ans, son examen est un travail écrit. Si rien n'a changé, par groupe, tu devras choisir un des trois thèmes proposés et développer selon la consigne donnée. Il est généralement assez gentil dans la cotation mais essaie de bien comprendre son cours en assimilant ses slides et ses réflexions pour pousser ta propre réflexion le plus loin possible !

Cercle des Sciences

ENVI-F1001 : Sciences de la Terre, environnement et société

Conseils à la réussite :

Ce cours est divisé en trois parties, introduction aux sciences de la Terre (Pierre Regnier) et environnement et société (Decroly et Pattyn). Ces deux parties valent pour 50% de la note totale.

Partie de Pierre Regnier (Sc. De la Terre) :

Les questions sont sous forme de QCM et ceux-ci se ressemblent souvent d'années en années. Cependant soyez prudent, il est déjà arrivé que les questions changent complètement (sans devenir pour autant plus difficiles) et étudier par cœur les questions des années précédentes n'est plus suffisant. Je vous conseille de bien étudier cette partie car ce n'est pas trop compliqué de faire des bons points et ca peut s'avérer très utile pour compenser un manque de point à l'autre partie (50% de la note pour chaque partie).

1. La surface terrestre est caractérisée par un gradient latitudinal d'énergie radiative. Quelle en est la cause fondamentale ?

Un flux de chaleur interne variable	☐
La courbure de la Terre	X
La tectonique des plaques	☐
La circulation atmosphérique	☐
La concentration en CO_2 atmosphérique	☐

2. Soit deux corps noirs (A et B). La longueur d'onde à laquelle ils émettent leur maximum d'énergie radiative est telle que $\lambda_{max,A} = 2\ \lambda_{max,B}$, respectivement. Calculez le rapport entre le flux de chaleur émis par le corps B et le flux de chaleur émis par le corps A (F_B/F_A).

Indiquez laquelle des propositions suivantes est correcte.

$F_B/F_A = 1/8$	☐
$F_B/F_A = 2$	☐
$F_B/F_A = 4$	☐
$F_B/F_A = 16$	X
$F_B/F_A = 1/4$	☐

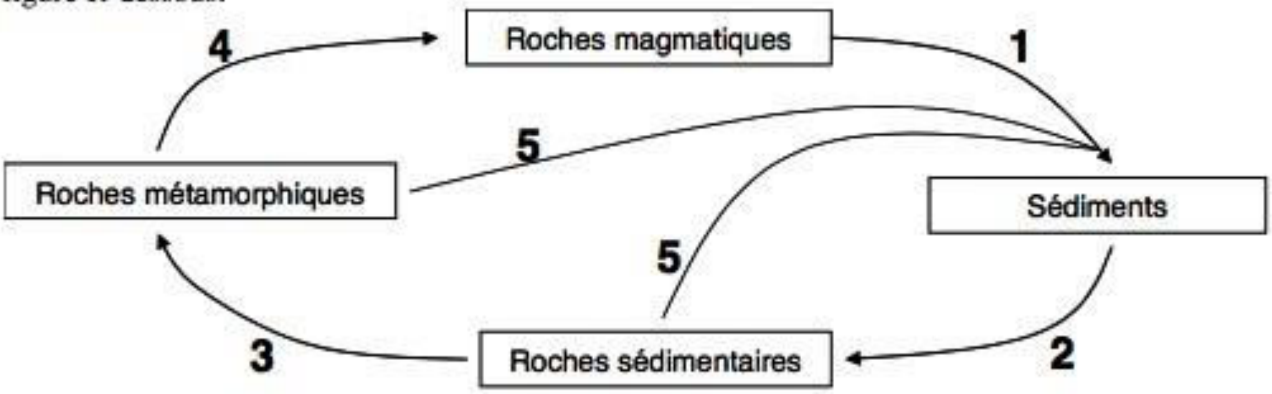
3. Le système Terre est caractérisé par différents réservoirs contenant des quantités de carbone organique et/ou inorganique très variables. (roches = roches carbonatées ; océan = colonne d'eau)

Si M_x dénote la masse de C total dans le réservoir x, indiquez parmi les propositions suivantes laquelle est correcte :

$M_{roches} > M_{océan} > M_{atmosphère}$	X
$M_{biomasse\ vivante} > M_{océan}$	☐
$M_{atmosphère} > M_{océan} > M_{roches}$	☐
$M_{océan} > M_{roches} > M_{atmosphère}$	☐
Aucun de ces propositions	☐

4. Cette question porte sur la composition chimique de l'atmosphère. Actuellement, la concentration varie suivant la proposition **A**. Au Précambrien, l'atmosphère était cependant beaucoup plus riche en gaz à effet de serre. Ce enrichissement est nécessaire pour compenser **B**. L'épisode d'oxygénation majeur (GOE) a eu lieu quant à lui il y a **C**. **Indiquez laquelle des propositions suivantes est correcte :**	
A = $O_2 > N_2 > CO_2 > CH_4$; B = une luminosité solaire réduite ; C = 200 millions d'années	☐
A = $N_2 > O_2 > N_2O > CO_2$; B = un albédo quasi nul ; C = 60 millions d'années	☐
A = $N_2 > O_2 > CO_2 > CH_4$; B = une luminosité solaire réduite ; C = 2300 millions d'années	**X**
A = $N_2 > O_2 > CH_4 > CO_2$; B = une tectonique des plaques ralentie ; C = 2300 millions d'années	☐
A = $N_2O > O_2 > CH_4 > CO_2$; B = un taux d'altération des roches silicatées plus élevé ; C = 60 millions d'années	☐
A = $O_2 > N_2 > CH_4 > CO_2$; B = une tectonique de plaques accélérée ; C = 2300 millions d'années	☐
A = $N_2 > O_2 > CO_2 > CH_4$; B = un albédo quasi nul ; C = 200 millions d'années	☐

5. Le cycle des roches est caractérisé par différents processus, identifiés par des numéros dans la figure ci-dessous.



Parmi les six propositions suivantes, laquelle est-t-elle correcte ?

1 = métamorphisme dans les bassins sédimentaires ; 2 = surrection ; 3 = lithification ; 4 = fusion au niveau des zones de subduction ; 5 = fusion	☐
1 = lithification ; 2 = altération ; 3 = métamorphisme dans les bassins sédimentaires ; 4 = fusion au niveau des zones de subduction ; 5 = surrection	☐
1 = surrection ; 2 = lithification ; 3 = métamorphisme dans les bassins sédimentaires ; 4 = fusion au niveau des zones de subduction ; 5 = altération	☐
1 = fusion au niveau des zones de subduction ; 2 = lithification ; 3 = métamorphisme dans les bassins sédimentaires ; 4 = surrection ; 5 = altération	☐
1 = altération ; 2 = lithification ; 3 = surrection ; 4 = métamorphisme dans les bassins sédimentaires ; 5 = fusion au niveau des zones de subduction	☐
1 = altération ; 2 = lithification ; 3 = métamorphisme dans les bassins sédimentaires ; 4 = fusion au niveau des zones de subduction ; 5 = surrection	**X**

6. La circulation thermohaline influence le climat terrestre à une échelle de temps caractéristique de **A**. Les masses d'eau profondes les plus anciennes sont localisées dans **B**. Le transport d'eau chaude par les courants de surface transfère une quantité de chaleur vers les pôles correspondant approximativement à **C** de celle transportée par la circulation atmosphérique.

Indiquez laquelle des propositions suivantes est correcte:

A = 10 ans **; B** = Atlantique du Nord ; **C** = 5%	☐
A = 10^6 ans **; B** = Océan Indien ; **C** = 50%	☐
A = 100 ans **; B** = Pacifique du Nord ; **C** = 100%	☐
A = 10^3 ans **; B** = Océan Indien ; **C** =50%	☐
A = 10^6 ans ; **B** = Atlantique du Nord ; **C** =20%	☐
A = 10^3 ans **; B** = Pacifique du Nord ; **C** = 100%	**X**

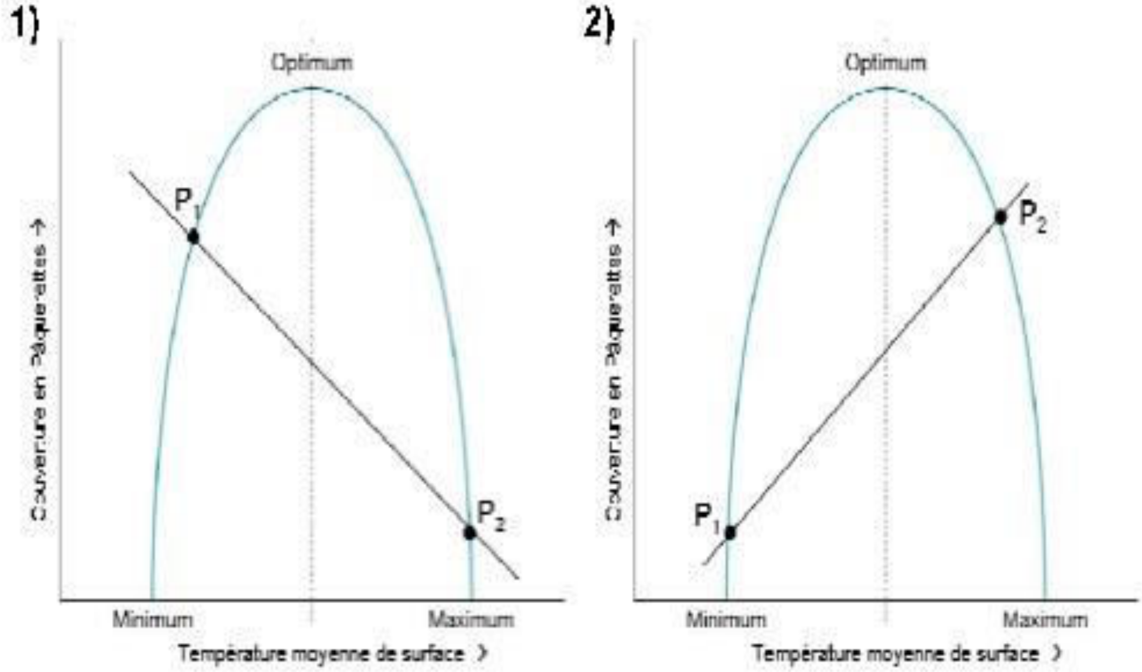
7. Le niveau hiérarchique le plus élevé de la subdivision du temps géologique s'appelle **A**. Celui-ci est subdivisé en **B**, puis en **C**. Les derniers **D** millions d'années de l'histoire de notre planète constitue l'éon Phanérozoïque, qui débute lors de **E**.

Indiquez parmi les propositions suivantes laquelle est correcte :

A = éon ; B = ère ; C = période ; D = 820 ; E = l'apparition de la photosynthèse oxygénique	☐
A = éon ; B = ère ; C = période ; D = 200 ; E = l'apparition de fossiles à coquille et de la vie multicellulaire	☐
A = ère ; B = éon ; C = période ; D = 10 ; E = l'apparition de la vie sur Terre	☐
A = période ; B = éon ; C = ère ; D = 540 ; E = l'apparition de stromatolithes	☐
A = éon ; B = ère ; C = période ; D = 540 ; E = l'apparition de fossiles à coquille et de la vie multicellulaire	**X**
Aucun de ces propositions	☐

8. Le système « Planète pâquerettes blanches (PPB) » a un homologue qui se comporte exactement de la même façon, sauf qu'il est entièrement couvert de pâquerettes noires (PPN). Parmi les figures ci-dessous, la figure **A** correspond au système PPN. Dans ce système, l'état d'équilibre stable correspond au point **B**.

Figures :



Indiquez laquelle des propositions suivantes est correcte :

A = 1 ; B = P_1	☐
A = 2 ; B = P_2	**X**
A = 2 ; B = P_1	☐
A = 1 ; B = P_2	☐
A = 1 ; B = aucun de ces points	☐
A = 2 ; B = aucun de ces points	☐
Aucune de ces réponses	☐

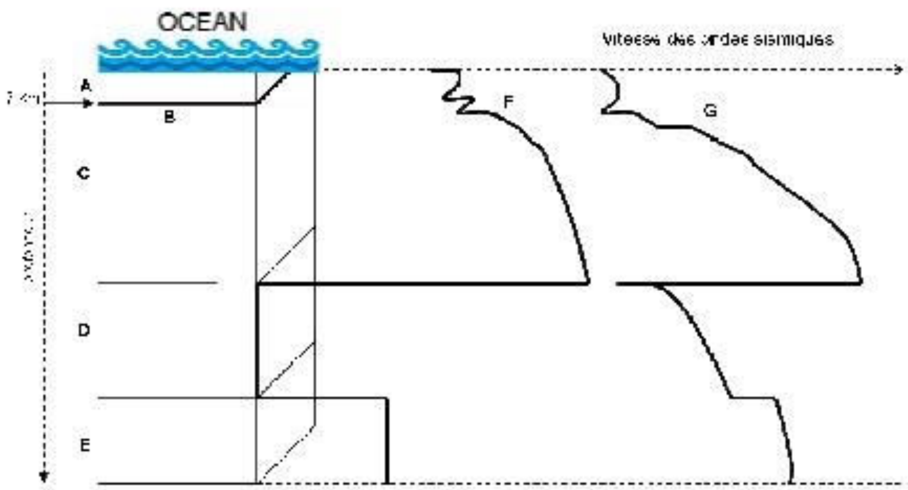
9. Soit les roches suivantes: granite (**A**), calcaire (**B**), péridotite (**C**), gneiss (**D**), grès (**E**). Nous souhaitons les classer suivant la typologie des grandes classes de roches. **Indiquez laquelle des propositions suivantes est la plus adéquate:**	
A = sédimentaire détritique ; B = métamorphique ; C = métamorphique ; D = magmatique extrusive mafique ; E = sédimentaire chimique ou biochimique	☐
A = métamorphique ; B = magmatique intrusive mafique ; C = métamorphique ; D = sédimentaire détritique ; E = sédimentaire détritique	☐
A = magmatique intrusive felsique ; B = sédimentaire chimique ou biochimique ; C = magmatique intrusive ultramafique ; D = métamorphique ; E = sédimentaire détritique	**X**
A = magmatique intrusive mafique ; B = magmatique intrusive mafique ; C = sédimentaire détritique ; D = sédimentaire chimique ou biochimique ; E = magmatique extrusive felsique	☐
A = magmatique extrusive ; B = métamorphique ; C = magmatique intrusive felsique ; D = magmatique ; E = métamorphique	☐
A = magmatique intrusive felsique ; B = sédimentaire chimique ou biochimique ; C = magmatique intrusive ultramafique ; D = métamorphique ; E = métamorphique	☐
A = métamorphique ; B = magmatique extrusive mafique ; C = métamorphique ; D = sédimentaire détritique ; E = sédimentaire détritique	☐
A = magmatique intrusive mafique ; B = magmatique intrusive felsique ; C = sédimentaire détritique ; D = métamorphique; E = magmatique extrusive felsique	☐

10. La composition élémentaire de le Terre dans son ensemble varie suivant la proposition **A**. Celle de la croute terrestre varie dans l'ordre donné par la proposition **B**. **Indiquez laquelle des propositions suivantes est correcte:**	
A = Fe>O>Si>Mg ; B = Fe>Al>Si>O	☐
A = Fe>O>Si>Mg ; B = Al>O>Si>Fe	☐
A = Mg>Fe>Si>O ; B = O>Si>Al>Fe	☐
A = O>Fe>Mg>Si ; B = Fe>Si>Al>O	☐
A = Si>O>Fe>Mg ; B = O>Si>Al>Fe	☐
Aucune de ces propositions	**X**

Introduction aux sciences de la terre - Janvier 2013

EXEMPLES DE QUESTIONS D'EXAMEN

1. Sur base de la figure ci-dessous, représentant la structure interne de la Terre,



indiquez laquelle des combinaisons suivantes est correcte :

A = manteau ; **B** = discontinuité de Mohorovicic ; **C** = noyau externe solide ; **D** = croute ; **E** = noyau interne liquide ; **F** = ondes sismiques P ; **G** = ondes sismiques S	☐
A = croute ; **B** = discontinuité de Mohorovicic ; **C** = manteau ; **D** = noyau externe liquide ; **E** = noyau interne solide ; **F** = ondes sismiques S ; **G** = ondes sismiques P	☐
A = croute ; **B** = discontinuité de Gutenberg ; **C** = manteau ; **D** = noyau externe liquide ; **E** = noyau interne solide ; **F** = ondes sismiques P ; **G** = ondes sismiques S	☐
A = lithosphère ; **B** = discontinuité de Mohorovicic ; **C** = asthénosphère ; **D** = noyau externe solide ; **E** = noyau interne solide ; **F** = ondes sismiques S ; **G** = ondes sismiques P	☐
A = croute ; **B** = discontinuité de Gutenberg ; **C** = manteau ; **D** = noyau externe liquide ; **E** = noyau interne solide ; **F** = ondes sismiques P ; **G** = ondes sismiques S	☐
A = croute ; **B** = discontinuité de Mohorovicic ; **C** = manteau ; **D** = noyau externe liquide ; **E** = noyau interne solide ; **F** = ondes sismiques P ; **G** = ondes sismiques S	☐

2. Soit les roches suivantes: **(A)** grès, **(B)** ardoise, **(C)** rhyolite, **(D)** basalte, **(E)** marbre.
Indiquez laquelle des propositions suivantes est la plus adéquate:

A = métamorphique ;**B** = sédimentaire chimique ou biochimique ; **C** = métamorphique ; **D** = magmatique intrusive mafique; **E** = magmatique extrusive felsique	☐
A = sédimentaire détritique ; **B** = métamorphique ; **C** = magmatique extrusive felsique ; **D** = magmatique extrusive mafique ; **E** = métamorphique	☐
A = sédimentaire chimique ou biochimique ; **B** = magmatique intrusive mafique ; **C** = métamorphique ; **D** = sédimentaire détritique ; **E** = sédimentaire chimique ou biochimique	☐
A = magmatique intrusive felsique ; **B** = sédimentaire détritique ; **C** = magmatique intrusive felsique ; **D** = métamorphique ; **E** = métamorphique	☐
A = sédimentaire détritique ; **B** = métamorphique ; **C** = magmatique intrusive felsique ; **D** = magmatique extrusive mafique ; **E** = métamorphique	☐
Aucune de ces réponses	☐

3. D'un point de vue géologique, les émissions de gaz a effet de serre dans l'atmosphère dues à la combustion d'énergie fossile (charbon, pétrole) peuvent-être envisages comme une intensification très importante d'un processus se déroulant sinon naturellement. **De quel processus s'agit-t-il :**	
La précipitation des carbonates	☐
L' altération des silicates	☐
L' altération et oxydation du carbone organique présent dans les roches sédimentaires	☐

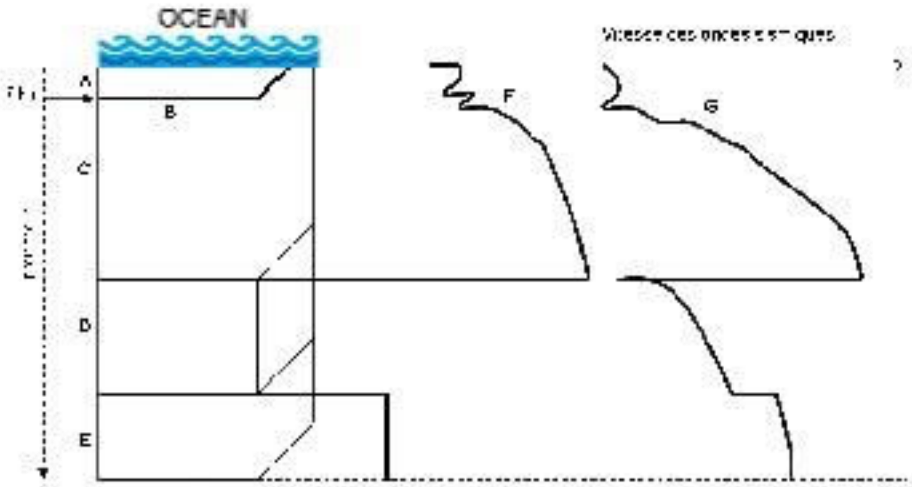
4. Le flux d'énergie arrivant à la surface terrestre est transporté à plus de 99 % par **A**. Une partie de cette énergie est redistribuée par la circulation atmosphérique, principalement au travers du mécanisme de **B**. De plus, des quantités importantes d'énergie associée à la présence d'eau sur Terre sont transférées des zones tropicales vers les zones polaires sous forme de **C**. Le flux de chaleur interne arrivant à la surface terrestre aux travers des plaques lithosphériques rigides est quant à lui transporté par **D**. **Indiquez laquelle des propositions suivantes est correcte:**	
A = conduction ; B = convection ; C = chaleur latente de vaporisation ; D = convection	☐
A = rayonnement ; B = convection ; C = chaleur latente de fusion ; D = conduction	☐
A = rayonnement ; B = convection ; C = chaleur latente de vaporisation ; D = conduction	☐
A = rayonnement ; B = conduction ; C = chaleur latente de vaporisation ; D = convection	☐
A = convection ; B = conduction ; C = capacité thermique ; D = rayonnement	☐
A = convection ; B = rayonnement ; C = chaleur latente de fusion ; D = capacité thermique	☐
Aucune de ces réponses	☐

5. Cette question porte sur la composition chimique de le Terre dans son ensemble, dont l'abondance varie suivant la proposition **A**, et de la croute terrestre, dont l'abondance des éléments varie dans l'ordre représenté par la proposition **B**. **Indiquez laquelle des propositions suivantes est correcte:**	
A = Si>O>Fe>Mg ; B = O>Si>Al>Fe	☐
A = Fe>O>Si>Mg ; B = Al>O>Si>Fe	☐
A = Mg>Fe>Si>O ; B = O>Si>Al>Fe	☐
A = O>Fe>Mg>Si ; B = Fe>Si>Al>O	☐
A = Fe>O>Si>Mg ; B = O>Si>Al>Fe	☐

CORRIGÉ **Introduction aux sciences de la terre - Janvier 2013**

EXEMPLES DE QUESTIONS D'EXAMEN

1. Sur base de la figure ci-dessous, représentant la structure interne de la Terre,



indiquez laquelle des combinaisons suivantes est correcte :

~~**A** = manteau ; **B** = discontinuité de Mohorovicic ; **C** = noyau externe solide ; **D** = croute ; **E** = noyau interne liquide ; **F** = ondes sismiques P ; **G** = ondes sismiques S~~	☐
A = croute ; **B** = discontinuité de Mohorovicic ; **C** = manteau ; **D** = noyau externe liquide ; **E** = noyau interne solide ; **F** = ondes sismiques S ; **G** = ondes sismiques P	☐
~~**A** = croute ; **B** = discontinuité de Gutenberg ; **C** = manteau ; **D** = noyau externe liquide ; **E** = noyau interne solide ; **F** = ondes sismiques P ; **G** = ondes sismiques S~~	☐
~~**A** = lithosphère ; **B** = discontinuité de Mohorovicic ; **C** = asthénosphère ; **D** = noyau externe solide ; **E** = noyau interne solide ; **F** = ondes sismiques S ; **G** = ondes sismiques P~~	☐
~~**A** = croute ; **B** = discontinuité de Gutenberg ; **C** = manteau ; **D** = noyau externe liquide ; **E** = noyau interne solide ; **F** = ondes sismiques P ; **G** = ondes sismiques S~~	☐
A = croute ; **B** = discontinuité de Mohorovicic ; **C** = manteau ; **D** = noyau externe liquide ; **E** = noyau interne solide ; ~~**F** = ondes sismiques P ; **G** = ondes sismiques S~~	☐

2. Soit les roches suivantes: **(A)** grès, **(B)** ardoise, **(C)** rhyolite, **(D)** basalte, **(E)** marbre.
Indiquez laquelle des propositions suivantes est la plus adéquate:

A = métamorphique ;**B** = sédimentaire chimique ou biochimique ; ~~**C** = métamorphique~~ ; **D** = magmatique intrusive mafique; **E** = magmatique extrusive felsique	☐
A = sédimentaire détritique ; **B** = métamorphique ; **C** = magmatique extrusive felsique ; **D** = magmatique extrusive mafique ; **E** = métamorphique	☐
A = sédimentaire chimique ou biochimique ; **B** = magmatique intrusive mafique ; **C** = métamorphique ; ~~**D** = sédimentaire détritique~~ ; **E** = sédimentaire chimique ou biochimique	☐
A = magmatique intrusive felsique ; **B** = sédimentaire détritique ; **C** = magmatique intrusive felsique ; ~~**D** = métamorphique~~ ; **E** = métamorphique	☐
A = sédimentaire détritique ; **B** = métamorphique ; ~~**C** = magmatique intrusive felsique~~ ; **D** = magmatique extrusive mafique ; **E** = métamorphique	☐
Aucune de ces réponses	☐

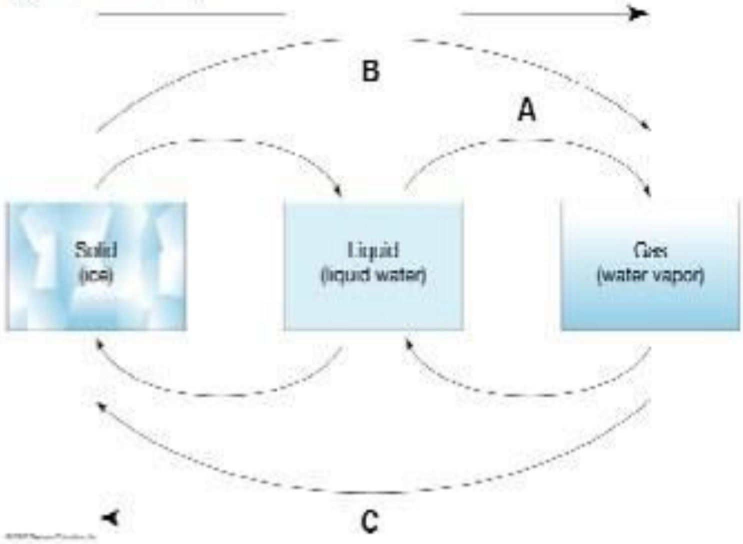
3. D'un point de vue géologique, les émissions de gaz a effet de serre dans l'atmosphère dues à la combustion d'énergie fossile (charbon, pétrole) peuvent-être envisages comme une intensification très importante d'un processus se déroulant sinon naturellement. **De quel processus s'agit-t-il :**	
La précipitation des carbonates	☐
L' altération des silicates	☐
L' altération et oxydation du carbone organique présent dans les roches sédimentaires	☐

4. Le flux d'énergie arrivant à la surface terrestre est transporté à plus de 99 % par **A**. Une partie de cette énergie est redistribuée par la circulation atmosphérique, principalement au travers du mécanisme de **B**. De plus, des quantités importantes d'énergie associée à la présence d'eau sur Terre sont transférées des zones tropicales vers les zones polaires sous forme de **C**. Le flux de chaleur interne arrivant à la surface terrestre aux travers des plaques lithosphériques rigides est quant à lui transporté par **D**. **Indiquez laquelle des propositions suivantes est correcte:**	
~~A = conduction ;~~ B = convection ; C = chaleur latente de vaporisation ; D = convection	☐
A = rayonnement ; B = convection ; ~~C = chaleur latente de fusion~~ ; D = conduction	☐
A = rayonnement ; B = convection ; C = chaleur latente de vaporisation ; D = conduction	☐
A = rayonnement ; ~~B = conduction~~ ; C = chaleur latente de vaporisation ; D = convection	☐
~~A = convection~~ ; B = conduction ; C = capacité thermique ; D = rayonnement	☐
~~A = convection~~ ; B = rayonnement ; C = chaleur latente de fusion ; D = capacité thermique	☐
Aucune de ces réponses	☐

5. Cette question porte sur la composition chimique de le Terre dans son ensemble, dont l'abondance varie suivant la proposition **A**, et de la croute terrestre, dont l'abondance des éléments varie dans l'ordre représenté par la proposition **B**. **Indiquez laquelle des propositions suivantes est correcte:**	
A = Si>O>Fe>Mg ; B = O>Si>Al>Fe	☐
A = Fe>O>Si>Mg ; ~~B = Al>O>Si>Fe~~	☐
A = Mg>Fe>Si>O ; B = O>Si>Al>Fe	☐
A = O>Fe>Mg>Si ; ~~B = Fe>Si>Al>O~~	☐
A = Fe>O>Si>Mg ; B = O>Si>Al>Fe	☐

Introduction aux sciences de la terre

1. Sur base de la figure ci-dessous,



indiquez laquelle des combinaisons suivantes est correcte :

A = évaporation ; **B** = condensation ; **C** = énergie libérée	☐
A = sublimation ; **B** = évaporation ; **C** = énergie absorbée	☐
A = condensation ; **B** = sublimation ; **C** = énergie libérée	☐
A = évaporation ; **B** = sublimation ; **C** = énergie absorbée	☐
Aucune de ces réponses	X

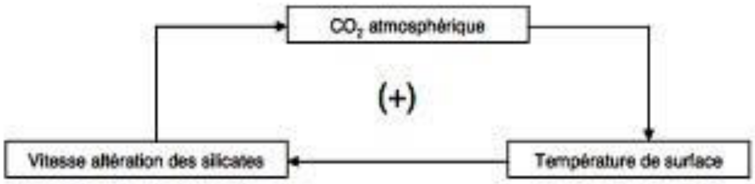
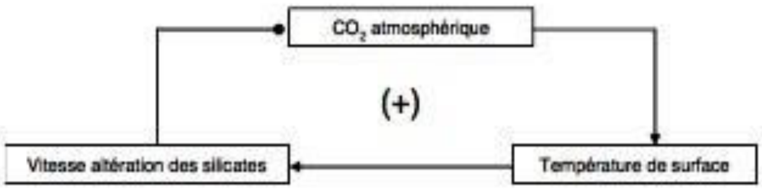
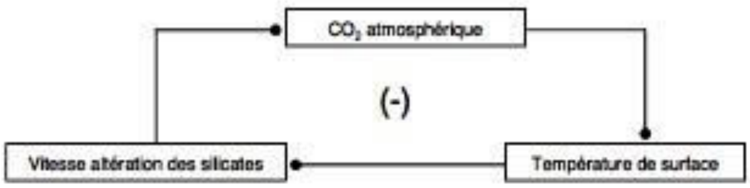
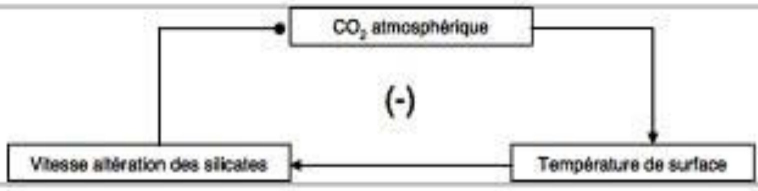
2. La composition chimique de l'atmosphère durant la première partie de l'histoire de notre planète était beaucoup plus riche en gaz à effet de serre. Cet enrichissement est nécessaire pout compenser :

Un flux de chaleur interne de la Terre plus faible	☐
Une distance Terre-Soleil plus grande	☐
Une tectonique des plaques ralentie	☐
Une luminosité solaire réduite	X
Un albédo quasi nul	☐

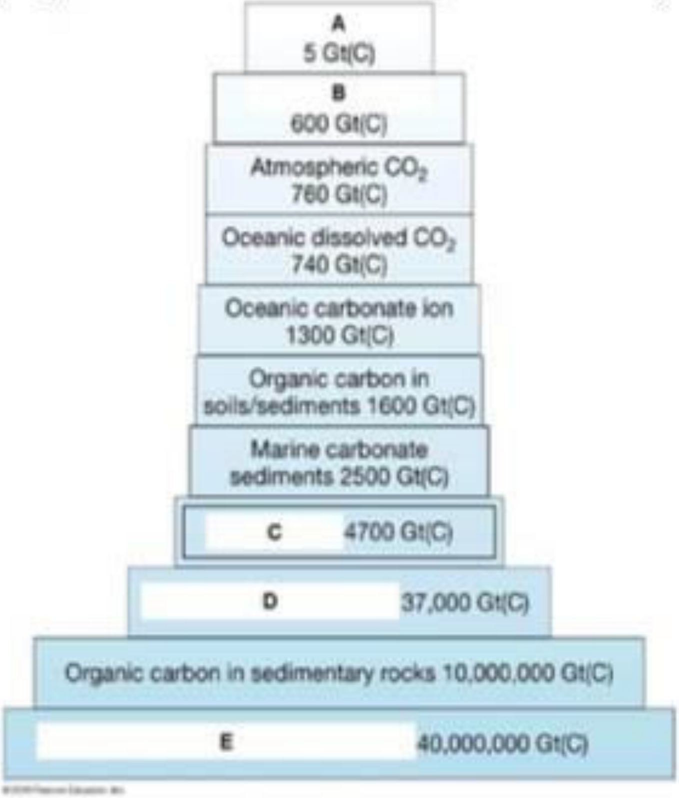
3. L' abondance des éléments chimique de la croute terrestre varie dans l'ordre donné par la proposition **A**. Par ailleurs, les deux minéraux les plus abondants (en poids) de la croute continentale sont, dans l'ordre, **B** et **C.** Pour le manteau, il s'agit, dans l'ordre, des minéraux **D** et **E**, présents dans une roche nommée **F**.
Indiquez laquelle des propositions suivantes est correcte:

A = O_2 > Si > Al > Fe ; **B** = quartz ; **C** = feldspaths ; **D** = pyroxène ; **E** = olivine ; **F** = péridotite	☐
A = O_2 > Si > Al > Fe ; **B** = feldspaths ; **C** = quartz ; **D** = olivine ; **E** = pyroxène ; **F** = péridotite	**X**
A = Al > O_2 > Si > Fe ; **B** = olivine ; **C** = quartz ; **D** = feldspaths ; **E** = calcite ; **F** = gabbro	☐
A = O_2 > Si > Al > Fe ; **B** = quartz ; **C** = olivine ; **D** = calcite ; **E** = feldspaths ; **F** = dolomite	☐
A = O_2 > Al > Si > Fe ; **B** = calcite ; **C** = feldspaths ; **D** = quartz ; **E** = pyroxène ; **F** = dolomite	☐
A = Si > O_2 > Al > Fe ; **B** = pyroxène ; **C** = feldspaths ; **D** = quartz ; **E** = olivine ; **F** = gabbro	☐

4. L'altération des roches silicatées est un processus clé du contrôle de l'évolution climatique à long-terme (> millions d'années). Ce contrôle peut-être caractérise par une boucle de rétroaction. **Laquelle des quatre propositions suivantes est-t-elle correcte ?**

	☐
	☐
	☐
	**X**

5. Le système Terre est caractérisé par différents réservoirs contenant des quantités de carbone organique et/ou inorganique très variables. Ceux-ci sont représentés dans la figure ci-dessous.



Indiquez parmi les propositions suivantes laquelle est correcte :

A = biomasse vivante ; B = combustibles fossiles ; C = méthane atmosphérique ; D = roches calcaires ; E = ion bicarbonate océanique	☐
A = combustibles fossiles; B = méthane atmosphérique; C = ion bicarbonate océanique ; D = roches calcaires ; E = biomasse vivante	☐
A = méthane atmosphérique ; B = ion bicarbonate océanique ; C = roches calcaires ; D = combustibles fossiles; E = biomasse vivante	☐
A = méthane atmosphérique ; B = biomasse vivante ; C = combustibles fossiles ; D = ion bicarbonate océanique ; E = roches calcaires	X

6. La Terre a connu **A** glaciations principales depuis sa formation. La période Crétacé moyen appartient à l'éon **B** et se place dans l'échelle du temps géologique à environ **C** millions d'années. Le climat durant cette période était particulièrement **D**.

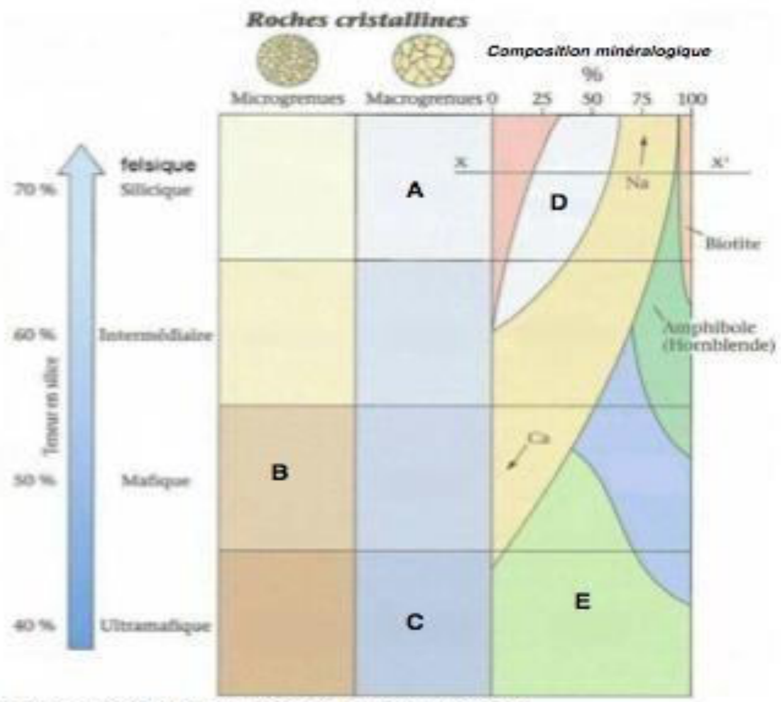
Indiquez laquelle des propositions suivantes est correcte:

A = 6 ; **B** = Précambrien ; **C** = 900 ; **D** = chaud	☐
A = 2 ; **B** = Phanérozoïque ; **C** = 100 ; **D** = froid	☐
A = 12 ; **B** = Archéen ; **C** = 500 ; **D** = chaud	☐
A = 7 ; **B** = Précambrien ; **C** = 1000 ; **D** = froid	☐
A = 6 ; **B** = Phanérozoïque ; **C** = 100 ; **D** = chaud	X

7. L'échelle de temps caractéristique de la circulation thermohaline est **A**. L'échelle de temps caractéristique du cycle des roches est B. **Indiquez laquelle des propositions suivantes est correcte:**	
A = 10^6 ans ; B = 10^8 ans	☐
A = 1 an ; B = 1 an	☐
A = 1 an ; B = 10^3 ans	☐
A = 10^3 ans ; B = 10^8 ans	X
A = 10^3 ans ; B = 10^6 ans	☐
Aucune de ces propositions	☐

8. La théorie de la dérive des continents nous indique que les masses continentales étaient regroupées autour d'un seul supercontinent nommé Pangée, il y a environ **A** d'années. En prenant en compte l'âge moyen des plus vieilles roches océaniques et une distance moyenne ride médio-océanique - continent de l'ordre de 5000 km, nous pouvons estimer une vitesse d'écartement des plaques tectoniques de l'ordre du **B**. Par ailleurs, sur base de la durée moyenne d'un cycle de Wilson caractérisant la formation puis la destruction des supercontinents, on peut estimer que ce processus s'est répété environ **C** fois depuis la formation de notre planète. **Indiquez laquelle des propositions suivantes est correcte:**	
A = 250 millions d'années ; B = cm/an ; C = 10	X
A = 250 millions d'années ; B = km/an ; C = 10	☐
A = 10 millions d'années ; B = m/an ; C = 10	☐
A = 1 milliard d'années ; B = cm/an ; C = 10	☐
A = 250 millions d'années ; B = cm/an ; C = 100	☐
A = 100 millions d'années ; B = km/an ; C = 100	☐

9. Cette question porte sur la composition minéralogique et la nomenclature des roches magmatiques.
Sur base de la figure ci-dessous,



indiquez laquelle des combinaisons suivantes est correcte :

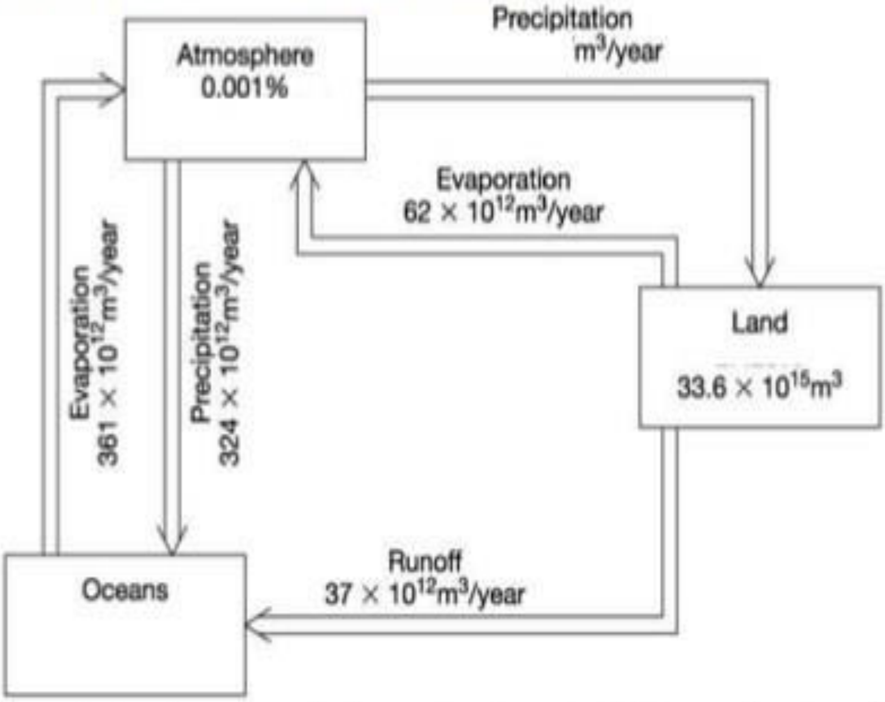
A = granite ; B = péridotite ; C = basalte ; D = olivine ; E = quartz	☐
A = olivine ; B = quartz ; C = basalte ; D = péridotite ; E = granite	☐
A =granite; B = basalte; C = péridotite ; D = quartz; E = olivine	X
A = basalte ; B = péridotite ; C = quartz ; D = granite ; E = olivine	☐
A = granite ; B = basalte ; C = péridotite ; D = olivine ; E = quartz	☐
A = péridotite ; B = basalte ; C = granite ; D = quartz ; E = olivine	☐
A = basalte; B = quartz; C = granite ; D = péridotite ; E = olivine	☐

10. Soit deux corps noirs (A et B). La longueur d'onde à laquelle ils émettent leur maximum d'énergie radiative est telle que $\lambda_{max,A} = 2\ \lambda_{max,B}$, respectivement. Calculez le rapport entre le flux de chaleur émis par le corps B et le flux de chaleur émis par le corps A (F_B/F_A).

Indiquez laquelle des propositions suivantes est correcte.

$F_B/F_A = 1/8$	☐
$F_B/F_A = 2$	☐
$F_B/F_A = 4$	☐
$F_B/F_A = 16$	X
$F_B/F_A = 1/4$	☐

1. La figure ci-dessous représente le cycle hydrologique.



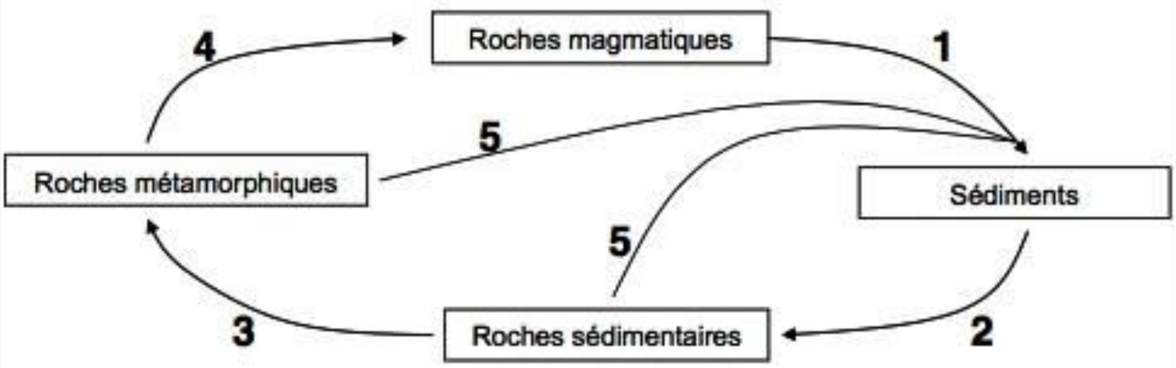
La contribution relative des eaux océaniques au volume total d'eau présente sur Terre est de **A%**. Sur base de l'hypothèse que le cycle est à l'état stationnaire, le flux de précipitation sur les continents est de **B x 10^{12} m^3/an** et le temps de résidence des eaux sur les continents est, quant à lui, de l'ordre de **C ans**.

Indiquez laquelle des propositions suivantes est correcte:

A = 97 ; B = 99 ; C = 30	☐
A = 93; B = 37 ; C = 300	☐
A = 93 ; B = 37 ; C = 30	☐
A = 97; B = 99 ; C = 300	X
A = 93; B = 99 ; C = 30	☐
A = 93; B = 300 ; C = 100	☐
A = 97; B = 300 ; C = 30	☐
A = 97; B = 99 ; C = 100	☐
Aucune de ces réponses	☐

2. Le système Terre est caractérisé par différents réservoirs contenant des quantités de carbone organique et/ou inorganique très variables. (roches = roches carbonatées ; océan = colonne d'eau) **Si M_x dénote la masse de carbone dans le réservoir x, indiquez parmi les propositions suivantes laquelle est correcte :**	
$M_{biomasse} > M_{océan} > M_{atmosphère}$	☐
$M_{biomasse} > M_{roches}$	☐
$M_{atmosphère} > M_{océan} > M_{roches}$	☐
$M_{océan} > M_{roches} > M_{atmosphère}$	☐
Aucun de ces propositions	X

3. L'échelle de temps caractéristique du cycle des roches est de **A**. Par ailleurs, ce cycle est caractérisé par différents processus, identifiés par les numéros dans la figure ci-dessous. Parmi les propositions **B**, indiquez laquelle correspond à la transformation d'un granite en grès.



Laquelle des huit propositions suivantes est-t-elle correcte ?

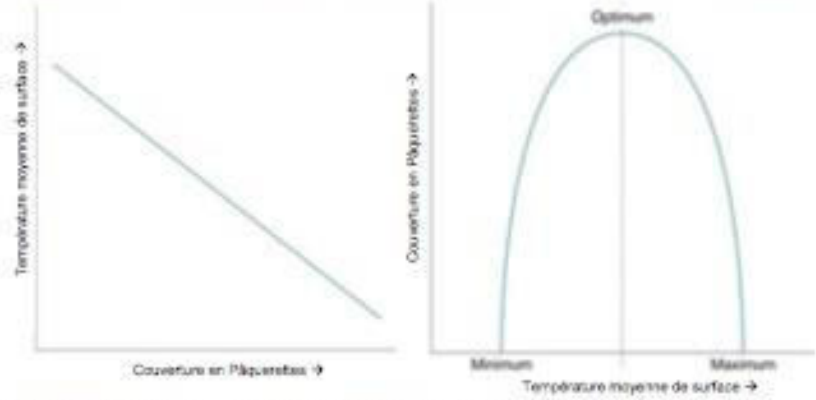
A = 10^8 ans ; **B** = 1 + 2	X
A = 10^7 ans ; **B** = 2 + 5	☐
A = 10^6 ans ; **B** = 1 + 2	☐
A = 10^3 ans ; **B** = 3 + 4	☐
A = 10^6 ans ; **B** = 4 + 1	☐
A = 10^8 ans ; **B** = 2 + 5	☐
A = 10^7 ans ; **B** = 2	☐
A = 10^8 ans ; **B** = 2 + 3	☐

4. Cette question porte sur la composition chimique de l'atmosphère *actuelle*, dont l'abondance varie suivant la proposition **A**. L'épisode d'oxygénation majeur (GOE) a eu lieu quant à lui il y a **B** millions d'années. **Indiquez laquelle des propositions suivantes est correcte :**	
A = $O_2 > N_2 > CO_2 > CH_4$; B = 200	☐
A = $N_2 > O_2 > CO_2 > CH_4$; B = 2300	X
A = $N_2 > O_2 > CO_2 > CH_4$; B = 200	☐
A = $N_2 > O_2 > CH_4 > CO_2$; B = 2300	☐
A = $N_2 > O_2 > CO_2 > CH_4$; B = 1700	☐
A = $O_2 > N_2 > CH_4 > CO_2$; B = 2300	☐
A = $N_2 > O_2 > O_3 > CO_2$; B = 60	☐

5. Le flux de chaleur interne a diminue depuis la formation de notre planète d'environ un facteur **A.** Aujourd'hui, celui-ci est de l'ordre de **B** du flux total d'énergie arrivant à la surface terrestre. Le moteur principal de la génération du champ magnétique terrestre est quant à lui associe à **C**. **Indiquez laquelle des propositions suivantes est correcte:**	
A = 5 ; B = 0.1% ; C = croissance du noyau interne	X
A = 100 ; B = 10% ; C = décroissance radioactive	☐
A = 5 ; B = 10% ; C = décroissance radioactive	☐
A = 5 ; B = 0.1% ; C = décroissance radioactive	☐
A = 100 ; B = 10% ; C = croissance du noyau interne	☐

6. La contribution élémentaire à la masse de la Terre dans son ensemble varie suivant la proposition **A**. Celle de la croute terrestre varie dans l'ordre donné par la proposition **B**. **Indiquez laquelle des propositions suivantes est correcte:**	
A = Fe>O>Si>Mg ; B = Fe>Al>Si>O	☐
A = Fe>O>Si>Mg ; B = Al>O>Si>Fe	☐
A = Mg>Fe>Si>O ; B = O>Si>Al>Fe	☐
A = O>Fe>Mg>Si ; B = Fe>Si>Al>O	☐
A = Si>O>Fe>Mg ; B = O>Si>Al>Fe	☐
Aucune de ces propositions	X

7. L'analyse du système 'planète pâquerette' est basée sur les deux graphiques suivants:



Nous pouvons maintenant déterminer les signes des couplages du système.

Pour des températures inférieures à l'optimum de température, $T_{optimum}$, indiquez laquelle des propositions suivantes est correcte :

Système caractérisé par deux couplages négatifs	☐
Système caractérisé par deux couplages positifs	☐
Système caractérisé par un couplage positif et un couplage négatif	X
Aucune de ces propositions	☐

8. Le niveau hiérarchique le plus élevé de la subdivision du temps géologique s'appelle **A**. Celui-ci est subdivisé en **B**, puis en **C**. Les derniers **D** millions d'années de l'histoire de notre planète constituent l'éon Phanérozoïque, qui débute lors de **E**.
Indiquez parmi les propositions suivantes laquelle est correcte :

A = éon ; B = ère ; C = période ; D = 820 ; E = l'apparition de la photosynthèse oxygénique	☐
A = éon ; B = ère ; C = période ; D = 200 ; E = l'apparition de fossiles à coquille et de la vie multicellulaire	☐
A = ère ; B = éon ; C = période ; D = 10 ; E = l'apparition de la vie sur Terre	☐
A = période ; B = éon ; C = ère ; D = 540 ; E = l'apparition de stromatolithes	☐
A = éon ; B = ère ; C = période ; D = 540 ; E = l'apparition de fossiles à coquille et de la vie multicellulaire	X
Aucun de ces propositions	☐

9. La théorie de la dérive des continents nous indique que les masses continentales étaient regroupées autour d'un seul supercontinent nommé Pangée, il y a environ **A** d'années. En prenant en compte l'âge moyen des plus vieilles roches océaniques et une distance moyenne ride médio-océanique - continent de l'ordre de 5000 km, nous pouvons estimer une vitesse d'écartement des plaques tectoniques de l'ordre du **B**. Par ailleurs, sur base de la durée moyenne d'un cycle de Wilson caractérisant la formation puis la destruction des supercontinents, on peut estimer que ce processus s'est répété environ **C** fois depuis la formation de notre planète. **Indiquez laquelle des propositions suivantes est correcte:**	
A = 250 millions d'années ; B = cm/an ; C = 10	X
A = 250 millions d'années ; B = km/an ; C = 10	☐
A = 10 millions d'années ; B = m/an ; C = 10	☐
A = 1 milliard d'années ; B = cm/an ; C = 10	☐
A = 250 millions d'années ; B = cm/an ; C = 100	☐
A = 100 millions d'années ; B = km/an ; C = 100	☐

10. Soit un modèle d'une planète de température T_0 se comportant comme un corps noir et se trouvant à une distance r_0 de son Soleil. Si la luminosité solaire est réduite de 50%, la température de surface sera égale à **A**. Par ailleurs, sa température de surface sera égale à **B** si la distance planète-soleil est réduite à $r_0/2$. (! Ce problème ne nécessite pas de calculatrice) **Indiquez laquelle des propositions suivantes est correcte :**	
A = $\frac{1}{2}T_0$; **B** = $4T_0$	☐
A = $\left(\frac{1}{2}\right)^{1/4} T_0$; **B** = $\sqrt[4]{4}T_0$	X
A = $\frac{1}{2}T_0$; **B** = $2T_0$	☐
A = $\left(\frac{1}{2}\right)^{1/4} T_0$; **B** = $10T_0$	☐
Aucune de ces propositions	☐

Partie de Decroly et Pattyn (environnement et société) :

Geol-F105 / 5 crédits

Tu auras ce cours pendant la deuxième moitié du Q2. L'année passée, c'est la première fois que les géographes avaient ce cours en BA1. Tu apprendras principalement la formation et la dérive des continents à travers le temps ainsi que la formation de la Belgique. C'est un cours introductif aux cours de géologie que tu auras plus tard.

À la fin de l'année, tu auras une excursion en Belgique (et un rapport à rendre qui compte pour 20% de l'examen). L'excursion est obligatoire comme toutes les autres et tu y verras plein de choses trop fun vues pendant tes cours !

L'examen est divisé en deux parties : Géologie de l'Europe et Géologie de la Belgique. Pour chaque partie, tu auras quelques QCM et une question ouverte. Essaie de bien comprendre la question ouverte car elle compte pour la moitié des points de chaque partie !!

L'année passée, beaucoup d'entre-nous nous étions fié.e.s aux questions de la dernière slide du cours, mais finalement l'examen n'était pas semblable. Donc essaie de bien étudier tout le cours en profondeur !

Geol-F104 / 5 crédits

Tu auras ce cours pendant ton Q2. C'est un cours introductif à la géologie et il t'aidera à devenir familier.ère avec les notions de base qui te serviront plus tard. Des cours théoriques et des tp te seront donnés. Les profs des cours théoriques insistent sur l'essentiel de la matière et sont sympas donc je te conseille d'assister aux cours !! Pour ce qui est des tp, tu devras rendre un rapport en fin de séance.

L'examen ne devrait pas être si compliqué. Les profs s'inspirent souvent des questions des slides donc si tu étudies bien et comprends bien la matière, tout devrait bien aller !

Depuis l'année passée, il y a un examen écrit sur la théorie ainsi qu'un examen de tp. Encore une fois, si tu as bien suivi et compris le cours, pas besoin de te tracasser plus !

Cercle des Sciences

Questions de l’examen de 2017 de théorie :

Il s’agit d’un examen écrit sous forme de QCM avec parfois plusieurs bonnes réponses à cocher et quelques petites questions ouvertes.

QCM :

- Sur quoi nous renseigne l’enregistrement des roches dans les strates ?
- Quelles sont les lois de Sténon ?
- 5 schémas de strates dans des régions différentes avec des fossiles A et B dedans, on vous donne l'âge des différentes strates pour 3 régions et il faut remettre les périodes dans l'ordre chronologiques, indiquer de quand à quand ont vécu les fossiles A et B, pour le 4e schéma il n'y a plus qu'un fossile et il faut dater soi-même les strates en fonction de ce qu'on a appris sur ce fossile grâce aux précédents schémas
- Schéma de la décroissance en isotope radioactif dans une roche, on donne la demi-vie, donner l'âge de l'échantillon, quelle fraction de la teneur initiale après x temps
- Faire correspondre le nom des principes à leur définition: recoupement, horizontalité primaire, continuité, etc.

Questions ouvertes :

- Schéma d'une discordance angulaire, indiquer la discordance sur le schéma, remettre les lettres indiquant les strates de la plus vieille à la plus jeune, dire quels concepts de la stratigraphie sont utilisés dans la résolution de cet exercice.
- Expliquer brièvement le concept d'uniformitarisme/actualisme (le présent est la clé pour comprendre le passé).
- Différence entre système/période.
- Donner les 4 éons (Précambrien, Phanérozoïque, etc.).
- Qu'est-ce qui fait qu'on passe d'un éon à l'autre ?
- Isotopes stables: différence en isotopes C dans des sédiments biogéniques et pas biogéniques ?

Questions de l’examen de 2017 de théorie :

Dans le cadre de ce cours, vous aurez des travaux pratiques basés sur la connaissance des fossiles. Vous devrez, tout au long du deuxième quadrimestre faire des recherches sur différents fossiles ainsi que les dessiner. Il est conseiller de faire ca le plus sérieusement possible car vous devrez rendre vos recherches et dessins sous forme de rapports écrits et ceux-ci vaudront pour un certain pourcentage de la note finale de TP. L’autre partie des notes de TP vient de l’examen. Il s’agit d’un examen reprenant des questions sur les différents fossiles (la plupart sous forme de QCM). Il faut bien
1 connaître les slides des TP ainsi que l’échelle des temps géologiques (il est possible d’avoir une question où il faut replacer des ères, périodes et étages).

Biol-F102 / 5 crédits

Tu auras ce cours pendant le Q2. La matière ne te sera normalement pas trop inconnue. Tu rentreras juste plus dans les détails de ce que tu as sûrement dû voir en secondaire. Quoi qu'il en soit, tu reverras toutes les bases dans les premiers cours pour que tout le monde soit au même niveau.

Essentiellement, tu auras des cours théoriques assez conséquents donc essaie de bien t'y prendre à l'avance avant l'exam parce que ça fait beaucoup de notions à retenir ! En fin de Q2, il y aura quelques séances d'exercices en génétique. Les exercices ne sont pas trop compliqués mais si tu n'es pas sûr.e d'avoir tout assimilé, essaie d'aller aux séances d'exos. Les slides sont super complètes et tu peux aussi te procurer un syllabus.

Pendant l'année, tu auras la possibilité de lire un livre et d'en faire une critique. Ce rapport peut te faire gagner jusqu'à 2 points bonus ! Donc un conseil, fonce car ça ne prend normalement pas trop de temps :) Surtout que si tu ne le fais pas, tu perdras 2 points sur ta note finale.

L'examen sera un oral : 2 questions principales te seront posées. Tu commences par répondre à ces deux questions puis au fur et à mesure, le prof t'en posera d'autres plus petites, ce qui finira en une sorte de discussion. Le prof est assez exigeant donc essaie de montrer que tu es sûr.e de toi, en disant un maximum de choses complètes et précises (et justes si possible). No stress si t'as un trou, il essaie de te mettre sur la bonne voie pour t'aider autant que possible. Et il essaie de faire des critiques constructives pour toujours t'améliorer plus.

Cercle des Sciences

Questions examen oral :

• Différence entre une cellule végétale et une cellule animale

• Points communs entre une mitochondrie et un chloroplaste

• Qu’est-ce que le code génétique ?

• Où/Comment se passe la synthèse des protéines ?

• Qu’est-ce qu’un codon ?

• Le mécanisme de reproduction du virus

• Réplication de l'ADN bactérien.

• Loi de Hardy-Weinberg.

• Différences et similitudes mitose/méiose.

• Expliquez le travail cellulaire, son fonctionnement et donnez des exemples.

• Qu’est-ce que le patrimoine génétique ? Par quoi se caractérise-t-il ?

• Qu'est-ce que la membrane plasmique ?

• Décrivez la structure de l'ADN et expliquez sa relation avec l'information génétique.

• Cycle lytique et lysogénique.

• Qu’est-ce que l’osmose, pression et potentiel osmotique ?

• Comparez le mode de transmission des gènes liés au sexe et l’hérédité maternelle.

• Expliquez la photosynthèse.

• Quelles sont les caractéristiques entraînant la diversité chez les individus à reproduction sexuée ?

• La composition du réseau intracellulaire de membranes et leur fonction.

• Quels sont les éléments qui constituent le cytosquelette ? Définissez les fonctions spécifiques de ces constituants. Parlez des liens entre les filaments intermédiaires et la matrice extracellulaire.

• Expliquez, dans la cellule animale, les éléments qui permettent à une cellule de faire partie intégrante d’un tissu.

• Expliquez la respiration cellulaire aérobie.

• Qu’est-ce qu’une enzyme, quel est son fonctionnement, les conditions physicochimiques ontelles une influence sur leur activité ?

- Y a-t-il recombinaison des gènes lors de la méiose ? Si oui, à quel moment se déroule-t-elle ?
- Qu’est-ce qu’une protéine ? Donnez des exemples de fonctions.
- Expliquez les 2 lois de Mendel.
- Expliquez les propriétés principales de l'eau
- Qu’est-ce que le code génétique ?
- La variation génétique chez les procaryote
- Comparez le mode de transmission des gènes liés au sexe et l’hérédité maternelle
- Expliquez la loi mendélienne des assortiments indépendants de caractères mais également de sa première loi.
- Expliquez le lien entre le génotype et le phénotype. Définir Epistasie, Hérédité polygénique (expliquer). Qui est le plus important entre la génétique et l’environnement
- Expliquez, lors d’une fécondation sexuée, les différents processus de variation génétique et développer. Expliquer les différentes mutations
- Expliquez le travail cellulaire, son fonctionnement et donner des exemples
- De quoi est composé le réseau intracellulaire de membranes et quelles sont leurs fonctions ?
- Qu’est-ce que l’assortiment indépendant des caractères? Qu’est-ce qu’une liaison génétique? Y a-t-il recombinaison des gènes lors de la méiose? Si oui, à quel moment se déroule-t-elle?